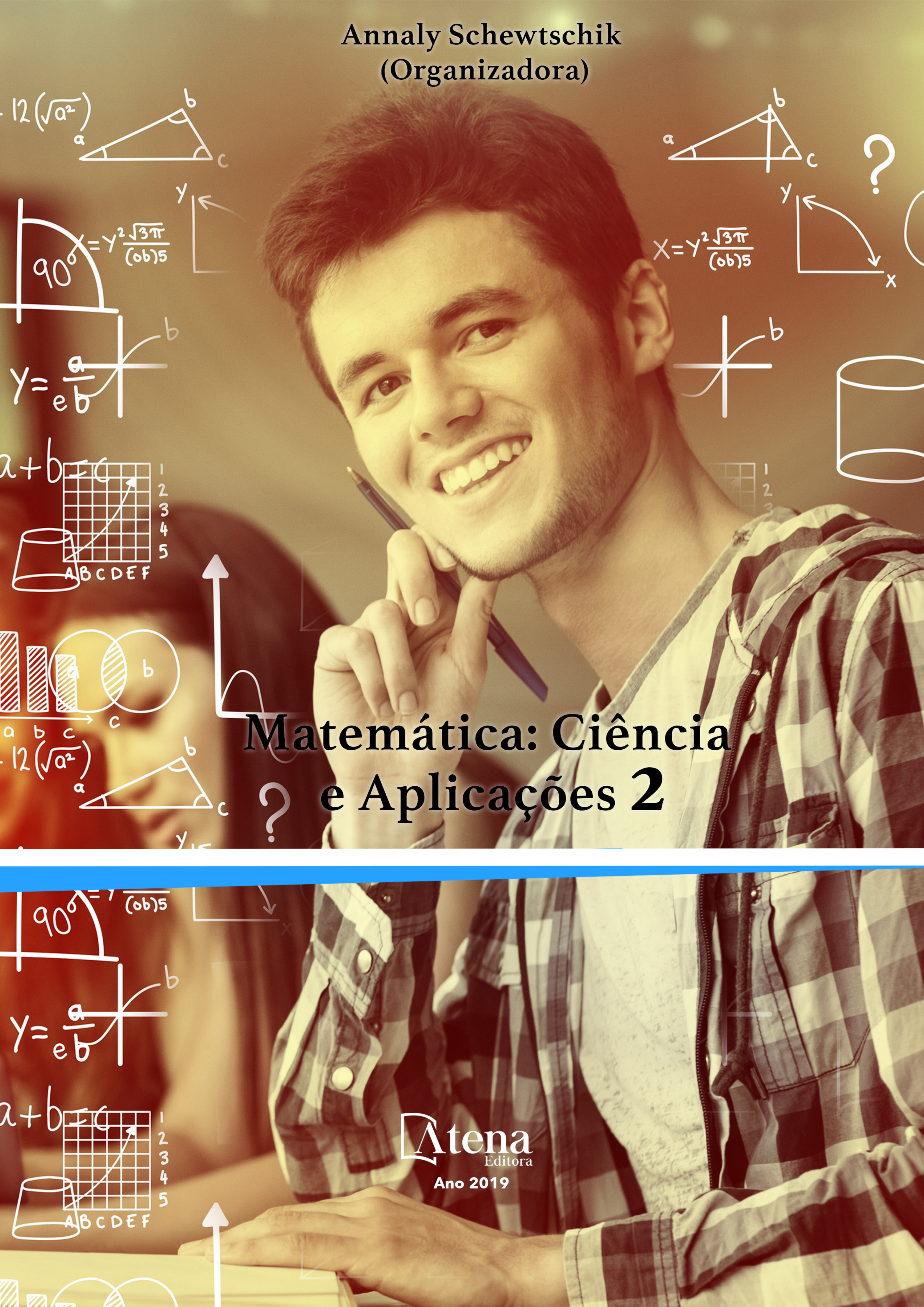


Annaly Schewtschik
(Organizadora)

Matemática: Ciência e Aplicações 2

Atena Editora
Ano 2019

Annaly Schewtschik
(Organizadora)

Matemática: Ciência e Aplicações 2

Atena Editora
2019

2019 *by Atena Editora*
Copyright © da Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

M376 Matemática: ciência e aplicações 2 [recurso eletrônico] / Organizadora Annaly Schewtschik. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Matemática: Ciência e Aplicações; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7247-122-0
DOI 10.22533/at.ed.220191402

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Prática de ensino. I. Schewtschik, Annaly. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

APRESENTAÇÃO

A obra “Matemática: ciências e aplicações” aborda uma série de livros de publicação da Atena Editora publicado em três volumes. O Volume II, em seus 22 capítulos, apresenta resultados de pesquisas que trazem estudos frente aos objetos matemáticos trabalhados tanto na Educação Básica, incluindo a EJA, como no Ensino Superior.

Os trabalhos evidenciam os estudos sobre conceitos e aplicações dos objetos da matemática no contexto da Educação Brasileira, contemplando aspectos da aprendizagem dos alunos, incluindo alunos com deficiências.

Revelam também os aspectos históricos que contribuíram para a formação dos conceitos dos objetos matemáticos e a análises destes objetos segundo seus idealizadores. Apresentam como os objetos matemáticos são contemplados em livros didáticos e fazem reflexões em torno da resolução de problemas que envolvem diferentes objetos matemáticos, incluindo conceito de letramento, enquanto prática social, nos diferentes campos da matemática.

A Matemática como Ciência é pensada nos trabalhos que enfocam os objetos matemáticos no contexto de aprendizagem, e como aplicações do conhecimento matemático na resolução de problemas tanto na Educação Básica como no Ensino Superior, incluindo as Engenharias.

A Educação Matemática é revelada nas análises referente as práticas de sala de aula – contanto com discussões inclusivas, tanto na Educação Básica como na Educação Superior.

Este Volume II é dedicado aos matemáticos, aos professores de matemática e pedagogos que ensinam matemática, a fim de compreenderem os aspectos do conhecimento matemático e do ensino e da aprendizagem dos objetos matemáticos âmbito da educação matemática.

Annaly Schewtschik

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

COMPREENDENDO O SISTEMA DE NUMERAÇÃO PARA O ENSINO DE NÚMEROS NA ESCOLA BÁSICA

Weslei Lima de Figueiredo
Professor do Colégio Santa Dorotéia de Bel Horizonte
Mestrando Universidade Federal de Minas Gerais – Faculdade de Educação
Belo Horizonte – Minas Gerais

Samira Zaidan
Universidade Federal de Minas Gerais – Faculdade de Educação
Belo Horizonte – Minas Gerais

RESUMO: Algumas dificuldades dos estudantes permanecem persistentes na capacidade de realizar operações numéricas e por isto nos remetemos ao estudo do ensino de números no Ensino Fundamental. Apontamos a necessidade de melhor compreensão das características do Sistema de Numeração Decimal, destacando a composição e decomposição do número, os diversos significados do valor posicional, a organização dos números decimais como foco para melhor ensinar e aprender as operações básicas e sua utilização social.
PALAVRAS-CHAVE: Sistema de Numeração Decimal; Números Racionais; Números com vírgula; Algoritmos das Operações Básicas; Educação Matemática.

ABSTRACT: Some difficulties of the students remain persistent in the ability to perform numerical operations and for this we refer our study of the teaching of numbers in Elementary School. We point out the need for a better understanding of the characteristics of the Decimal Numbering System, highlighting the composition and decomposition of the number, the various meanings of the positional value, the organization of decimal numbers as a focus for better teaching and learning the basic operations and their social use.
KEYWORDS: Decimal Numbering System; Rational Numbers; Comma numbers; Basic Operations Algorithms; Mathematical Education.

1 I INTRODUÇÃO

Ao se ensinar matemática, o professor sempre tem de responder perguntas sobre utilidades e usos dos conteúdos, mostrando que, muitas vezes, não se compreende o seu motivo ou qual sua aplicação. Em muitos casos, nós professores não nos preocupamos com detalhes, que entendemos ser irrelevantes ou por julgarmos supérfluos. Porém, é bastante comum nos depararmos com situações em que é necessário esmiuçar o objeto de estudo para que não percamos o seu propósito. Um bom exemplo é o ensino das operações básicas nos anos iniciais do ensino fundamental. Os algoritmos utilizados, muitas vezes, contribuem para que o aluno, em pouco tempo, esqueça como fazia uma continha simples de divisão, já que é levado pela escola a aprender os procedimentos formais e talvez, em função da necessidade de propicia-lo uma maneira mais fácil de atingir um resultado satisfatório nas quatro operações, não se dá a devida atenção aos porquês dos acontecimentos que justifiquem o algoritmo usado.

A intenção aqui não é apontar qual é o melhor caminho a percorrer ao trabalhar na sala de aula com o ensino do Sistema de Numeração Decimal, pois sabemos que o contexto de onde acontece o aprendizado precisa ser considerado e vale mais que seguir uma orientação enrijecida. Pretendemos mostrar que podemos encarar o nosso Sistema de Numeração por completo, explorando bem as suas características e observando que elas se entrelaçam como um conjunto de informações baseadas em uma lógica e que pode ser um modo de favorecer o seu ensino em todos os níveis da escolarização. Visamos, assim, ofertar um suporte ao professor que está diretamente em sala de aula, apoiando-o em suas práticas, ratificando ou promovendo uma leitura mais centrada nos porquês de algumas abordagens vistas nos livros e materiais didáticos voltados para o ensino do Sistema de Numeração Decimal.

O Sistema de Numeração Decimal é bastante utilizado no mundo todo, como se sabe, possui ricas características que contribuíram sobremaneira para a evolução da humanidade e o seu ensino para as novas gerações é essencial. A utilização de números decimais e de números inteiros faz parte do cotidiano de todos nós, presente em inúmeras situações informais e formais, logo é importante valorizar em algum momento da escolarização uma abordagem conjunta e articulada entre os decimais e inteiros como parte do mesmo sistema. Esse entendimento resgata a ideia de ser o Sistema de Numeração Decimal um só, contemplando tanto os inteiros quanto os decimais.

No ensino dos números e suas operações, dar mais atenção aos algoritmos do que à formação dos números pode estar levando a que a própria capacidade operatória fique prejudicada. Esta é uma hipótese de nosso estudo. Muito se tem criticado um ensino focado em procedimentos da Matemática nos anos iniciais da escolarização e, como nos fala D`Ambrosio (1989), os “alunos passam a acreditar que a aprendizagem matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos”. Nossa suspeita é que o processo do algoritmo convencional (formal) das operações básicas, de modo geral, quase que atropela o processo de formação dos números e leva o aluno a atuar de forma memorizada e, muitas vezes, sem sentido. É importante construir a capacidade (e agilidade) operatória na escola, mas entendemos que a ação docente de rápida introdução e memorização dos algoritmos tende a dificultar a própria aprendizagem dos algoritmos. Acreditamos que o uso dos algoritmos não carece de mais atenção que o próprio sentido da operação. Veja como Alfonso inicia sua escrita sobre os algoritmos da seguinte forma:

> Pocas veces se puede encontrar en matemáticas un término tan mal definido y sin embargo com tantas definiciones. Parece como si cada vez que se quiere explicar lo que es, cada cual hiciera de su capa um sayo y optara por cualquier argucia que le permitiera salir del passo. (ALFONSO, 2000, p.103)

Em nosso entendimento, a apresentação dos algoritmos das quatro operações básicas da matemática demanda uma exploração para uma compreensão ampla da composição e decomposição dos números. Percebemos que a falta de melhor compreensão da decomposição dos números dificulta a aprendizagem das próprias operações. Não que se esgote um passo para dar outro, mas defenderemos a necessidade de explorar mais aprofundadamente as características do Sistema de Numeração Decimal antes e durante o estudo das operações e em qualquer nível da escolarização em que se ensina operações. Mais ainda, defendemos que o ensino das operações deve se basear e recorrer à organização do próprio Sistema de Numeração Decimal. Nessa linha de pensamento, quando o ensino não leva a compreender a organização dos números na lógica do sistema de numeração, poderemos ter inúmeras lacunas durante toda a caminhada do entendimento dos fundamentos da matemática.

Usaremos, a partir de agora, SDN para designar Sistema de Numeração Decimal.

2 I PROBLEMATIZAÇÃO SOBRE O ENSINO DE NÚMEROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

A utilização dos números é amplamente difundida em diversos setores da vida humana, ocupando um espaço singular na sociedade na qual sua organização e praticidade movem o mundo. Veja a importância do SND para Teberosky e Tolchisnsky:

> A invenção e difusão do Sistema de Numeração Decimal constitui uma contribuição extraordinária que poderíamos comparar, sem nenhum exagero, à suposta modernização produzida pelas calculadoras e pelos computadores, porque facilitou o cálculo e, consequentemente, permitiu a evolução da matemática. (TEBEROSKY e TOLCHISNSKY, 2007, p.263).

Para Pires (2013, p.52) “Um sistema de numeração é um conjunto de princípios que constitui o artifício lógico de classificação em grupos e subgrupos das unidades que formam os números”. Para Cardoso (2013, p. 8) “O Sistema de Numeração é um conjunto de regras usado para descrever quantidades, utilizando um determinado conjunto de símbolos”.

Praticamente em todo o universo social utiliza-se do SND, também conhecido como Sistema de Numeração Indo-Arábico. Materiais didáticos para formação de professores como o de Centurión (1994, p.36) mostram que esse sistema possui características próprias: utiliza apenas dez símbolos com os quais pode-se escrever qualquer número; sua base de contagem e organização é dez; possui o zero para indicar uma “posição vazia”; é posicional, ou seja, a posição do algarismo mostra seu valor no número; o posicionamento dos algarismos é aditivo (pode ser escrito como a soma de seus valores posicionais) e multiplicativo (tomando como referência uma posição, o número à sua esquerda representa dez vezes mais e o número à sua direita representa a décima parte).

Os professores e as professoras dos anos iniciais recebem a função de iniciar a construção da matemática na escola e o conteúdo de grande importância nessa construção é a ideia de medida vinculada à formação dos números racionais positivos e suas operações. Para Pires (2013), é nos anos iniciais da escola básica que se introduz a ideia de números e utiliza-se do sistema de numeração para compreensão desse elemento-chave da matemática. Nos projetos curriculares hoje existentes, o ensino de números se prolonga pela escolarização do ensino fundamental, mas muitas vezes ainda aparecem como dificuldade para o aluno do ensino médio.

Nos anos atuais, pesquisas e experiências dos docentes na escola básica indicam a necessidade de ensinar de modo compreensivo e significativo, especialmente a Matemática que tem enfrentado tantas dificuldades. Assim, vemos de modo essencial a construção de metodologias dialógicas na sala de aula, a resolução de problemas e investigações que, com o uso de tecnologias, tem despertado a curiosidade e o interesse dos estudantes pela área (FIORENTINI, 2006; PONTE, 2007; TOBIAS, 2018 e outros). Não desconhecemos a inseparabilidade entre conteúdos e metodologias no ensino, mas neste trabalho estamos focando no estudo da hipótese que o melhor entendimento do SND pode favorecer a compreensão e capacidade operatória, a qual nos preocupamos com o entendimento dos professores.

O número usado como algarismo e vice-versa

Seria necessário separar entendimentos de número e algarismo? Em que esta separação ajudaria? O símbolo 5, por exemplo, pode ser utilizado como número e como algarismo. Em determinados contextos este uso não cria maiores problemas, mas é possível que em várias situações se pense que o número 35 seja formado pelos números 3 e 5 ou pelos algarismos 3 e 5, deixando transparecer que números e algarismos sejam sinônimos. Em sua coleção Imenes, Lellis e Milane (2009, v.2, p.12), não enfatizam a diferença entre algarismo e número, mas chamam a atenção que o algarismo 4 não é o mesmo que o número 4. Para eles “Essas diferenças não são discutidas porque crianças dessa faixa etária não veem importância nessas sutilezas lógicas”. Isto é compreensível, mas haverá algum momento da escolarização em que tal ideia necessita ser explicitada. Sobretudo o professor necessita ter clareza sobre ela.

O número 9 poderia ser o maior dos números naturais caso não se tenha o cuidado de fazer a distinção entre o 9 número e o 9 algarismo. Nesse sentido, pode-se criar uma confusão ou um embaraço na aprendizagem, pois seria de extrema dificuldade discernir que os números são formados pelos algarismos 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 ou, ainda no mesmo contexto, os números são formados pelos números 0,1 ,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Entendemos que à medida que o estudante percebe a organização do sistema de numeração, compreender quais são os algarismos e como se organiza o número pode ser muito importante.

A composição e decomposição dos números

Esta característica é essencial no SND. Julgamos importante valorizar e destacar o processo de composição e decomposição de um número, e encontramos nos Conteúdos Conceituais dos PCN`s que é preciso ter:

- Compreensão e utilização das regras do SND para leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de qualquer ordem de grandeza.
- Formulação de hipótese sobre a grandeza numérica, pela observação da posição dos algarismos na representação decimal de um número racional.
- Extensão das regras do sistema de numeração decimal para compreensão, leitura e representação dos números racionais na forma decimal.
- Comparação e ordenação de números racionais na forma decimal. (PCN's, MEC, Governo Federal, 1997, p. 58)

Nesse sentido, decompor o número comparando suas ordens faz parte do cenário para a compreensão do processo de construção do pensamento numérico, pois é aceitável na vida cotidiana dizer que uma dezena equivale a dez unidades, uma centena equivale a dez dezenas, uma centena equivale a 100 unidades e assim por diante. Estaria, contudo, esta ideia clara para o aluno?

A utilização de um esquema lógico e organizado que explora as ordens de um número com recursos diversos, como o Q. P. (Quadro Posicional) ou Q. V. L. (Quadro Valor de Lugar) pode ser de extrema relevância no ensino do SND, pois os números devem ser apresentados de maneira gradativa e sem caracterizar uma única forma rígida. É primordial que sejam acompanhados de materiais concretos e manipuláveis que facilitem a compreensão da lógica aplicada e para Smole e Diniz (2016, p.25) "pela confrontação de conhecimentos, a criança, além de poder entender os procedimentos utilizados, pode estabelecer relações entre os procedimentos distintos e aproxima-los entre si, apresentando maior compreensão do objeto estudado".

Veja na figura abaixo uma visualização muito comum do reagrupamento de cada dez unidades para uma dezena que pode contribuir para o entendimento de equivalência entre duas ordens. A estrutura do recurso abaixo, apresentada em um ábaco, mostra com clareza uma transformação que dá início ao processo de entendimento de um sistema de base dez.

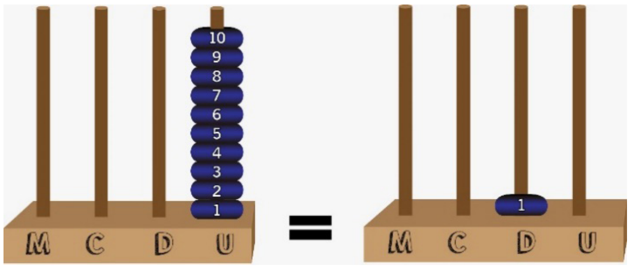


Figura 1: Correspondência entre ordens

Fonte: Arquivo pessoal

Porém, consideramos que tal organização necessita ser mostrada aos estudantes para ordens superiores e ordens das classes não inteiras, o que nem sempre ocorre. Consideramos válido transitar de forma serena com as seguintes questões: Uma centena possui quantas dezenas? Quantas unidades? Uma unidade de milhar possui quantas dezenas? Quantas centenas? Quantas unidades? Uma dezena possui quantos décimos? Uma centena possui quantos centésimos? Veja que há uma infinidade de combinações que podem contribuir com a composição de um número. Por que não explorar tais comparações de forma sistematizada uma vez que reforçaria a ideia do posicionamento do algarismo em um número?

Na investigação de um número é possível assimilar intuitivamente que ele pertence a um sistema posicional. Por exemplo, 28 objetos representam quantidades diferentes de 82 objetos. Nota-se que o simples fato de trocar a posição do algarismo 8 com o algarismo 2, altera toda a quantidade dos objetos. Perceber essa diferença é quase automática, mas sua justificativa passa pelo entendimento que a cada dez unidades tem-se uma dezena ou que a cada dez dezenas tem-se uma centena. Por que não explicitar as outras ordens e contribuir com o raciocínio para o entendimento da característica do sistema posicional? Não se pode esperar que o educando o faça sozinho, porque isto pode nem sempre ocorrer. Logo, nos parece preciso retomar a organização das ordens considerando números pequenos, médios e grandes, nos momentos que forem considerados adequados.

Satisfaz também acreditar que seja suficiente entender que o SND é um sistema posicional só por praticar a comparação entre ordens consecutivas, no qual se estabelece que dez elementos de uma determinada ordem equivalem a um elemento da ordem superior. Porém, é essencial analisar e procurar ver com facilidade a sistematização das comparações entre centenas e décimos, unidade de milhar e dezenas, unidade de milhar e centésimo ou décimo e milésimo.

Vejamos que seria interessante ter o costume de mostrar que o número 237 possui 23 dezenas inteiras ou que possui 23,7 dezenas. Certamente é preciso considerar o ano escolar em que tal abordagem seja adequada, mas sua compreensão se mostra relevante para o entendimento do sistema e, daí, das operações, como veremos adiante. Outro exemplo é entender que o número 1251 possui 12 centenas inteiras ou que ele possui mais que 12 centenas e meia. Em se tratando de números decimais, o mesmo raciocínio se coloca, como por exemplo compreender que o número 21,35 possui 2135 centésimo ou 213,5 décimos, pois tal abordagem poderá induzir a uma boa noção do funcionamento posicional do nosso sistema de numeração.

Pode não ser considerado muito simples a explicação dos valores posicionais dos números, como os exemplos acima citados, porém, a omissão de abordagens como estas pode induzir a erros. Por exemplo, pode-se levar ao falso entendimento que no número 305, por exemplo, tem-se três centenas, zero dezena e cinco unidades. O que ocorre nessa análise errônea é que a quantidade na ordem das dezenas simples do número 305 não é explícito e não temos o costume de pensar no número como uma composição de valores baseado no posicionamento de suas ordens. Entender que o número 305 possui cinco unidades é outra confusão muito comum na análise de valores relativos. Veja que 305 representa uma quantidade maior que 5, são 305 unidades, mas na representação de seus valores absolutos, tem-se uma análise individual de suas ordens, onde a ordem das unidades possui 5 unidades que é o valor do algarismo 5. Ou seja, a análise do valor absoluto da ordem das unidades (valor do algarismo) induz ao entendimento que o valor da ordem das unidades se equivale as unidades que o número representa.

A organização do valor posicional do sistema de numeração pode ajudar a entender, por exemplo, que a cada dez unidades se tem uma dezena, que a cada dez dezenas se tem uma centena ou a cada 100 dezenas se tem uma unidade de milhar, mas o registro e a notação podem não esclarecer suficientemente esta questão para os alunos. O mesmo se pode dizer em relação aos décimos, centésimos e milésimos.

Retomando um exemplo: o número 204 possui duas centenas, zero dezenas e quatro unidades? Essa dúvida parece indicar o não entendimento do sistema de numeração decimal. Não seria exagero explicitar que este número possui 204 unidades, 20,4 dezenas, 20 dezenas inteiras e 4 unidades, 2,04 centenas, duas centenas inteiras e 4 unidades; assim como não seria errado citar que ele possui 2 centenas. Nossa indicação é que a flexibilização e versatilidade que pode ser construída nessa abordagem da organização posicional do número certamente o favorecerá nas ações que realizar com o SND.

Ainda considerando um exemplo de uma verificação inautêntica, tem-se que se o número 28 possui 2 dezenas e 8 unidades, então o número 1031 possui 1 unidade de milhar, não possui centena, possui 3 dezenas e possui 1 unidade ou que o número 3,02 possui 3 unidades, não possui décimo e possui 2 centésimos. Um exemplo muito prático que pode envolver confusões entre o valor relativo e o valor do algarismo de um número é quando uma pessoa que possui uma nota de dez Reais nega-se a dizer que possui um Real por não possuir explicitamente uma moeda de um Real.

Dessa maneira, de modo mais ou menos aprofundado, pensamos que explorar a organização posicional dos números, considerando sua organização inteira e decimal, pode favorecer melhor compreensão do sistema e seus números. Para nós, tal entendimento irá favorecer a compreensão dos algoritmos.

Os números na forma decimal

Outra situação curiosa no processo do ensino dos números racionais positivos é quando se trabalha com números decimais, também denominado como os números que contêm vírgula. Podemos perceber que já nos anos iniciais da escolarização é possível abordá-lo, pois há muitos exemplos do cotidiano que podem contribuir para sua assimilação. Para Van de Walle (2009, p. 236) “não deveríamos permitir que as crianças estudassem conceitos de valor posicional sem encoraja-las a procurar números no mundo ao seu redor. Você não precisa de uma atividade prescrita para trazer números reais para a sala de aula”.

Pires (2013, p.120) salienta algumas expectativas de aprendizagem que são frequentemente citadas em documentos curriculares e nos primeiros anos do Ensino Fundamental onde há um destaque para o reconhecimento da utilização de números no seu contexto diário. O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (BRASIL, Secretaria de Educação Básica, 2014-2018) em seu caderno oito explora algumas conexões que podem ser feitas, destacando o próprio corpo da criança para a construção do sentido da medida na ordenação dos números decimais, pois é muito comum a visualização da relação peso X altura, por exemplo. No entendimento dos números com vírgula espera-se que uma criança do Ensino Fundamental compreenda que ter 24,5 kg significa ter mais de 24 kg e menos que 25 kg.

Ressalta-se ainda no ensino dos números decimais que o uso da vírgula na formação do número é de extrema importância, pois ela pode alterar totalmente a sua representação. Veja por exemplo que 13,7 é diferente de 1,37. Já para o número 5 ou 5,0 a vírgula é simplesmente ignorada, em muitos casos, mas não há grandes problemas deixar de apresenta-la em determinados contextos dos números inteiros, porém deixar para apresentar sua função apenas quando utilizar o número decimal, pode ser que 2,0 passe a funcionar como se tivesse um significado diferente de 2,00 ou de 2,000 ou daquela definição já apresentada do número inteiro 2. Seria recomendável iniciar a compreensão dos números em um universo que expresse quantidades inteiras e ir adquirindo uma prática do uso da vírgula para não precisar separar a parte inteira da parte não inteira de um número decimal. Seria importante trabalhar a ideia que, após um determinado tempo de assimilação do funcionamento dos números, se faz necessário a contextualização da representação numérica. Não seria indicado utilizar a escrita 28,0 para representar a quantidade de 28 cadeiras porque representamos cadeiras como um objeto inteiro, mas se tratando da medida da temperatura de um determinado ambiente, pode ser bastante conveniente que se utilize da escrita 28,0 para indicar 28 graus, assim como uma indicação da nota em um exame sendo 28 ou 28,0 pontos.

Nota-se que, quase sempre, em orientações como a do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) - MEC Governo Federal, que é preciso tempo para o aprendizado na sala de aula dos números decimais, visto de modo articulado às demais representações dos números racionais. Observamos em nossa experiência prática que essa situação chega a configurar que a parte decimal dos números racionais não pertence ao SND ou que o processo utilizado em sua formação é totalmente desvinculado com o processo de formação dos números inteiros. Talvez isto se dê em função de seu tratamento ocorrer em momento separado do número inteiro. Além disto, ao ver essa notação como um assunto diferente, pode-se incorrer em erro, como nos mostra Moreira e David quando citam que:

> Na pesquisa do CSMS, M. Brown desenvolveu a parte do trabalho referente aos decimais. O primeiro tipo de dificuldade que ela relata é o seguinte: alguns alunos tendem a ver o decimal como um composto de dois números naturais separados por uma vírgula. Isso leva, por exemplo, a considerar 0,8 menor que 0,75 ou, de modo análogo, 4,9 menor que 4,90. (MOREIRA e DAVID, 2010, p.74)

Respeitando o tempo de assimilação dos alunos, por que não apresentar os números decimais juntamente com os números inteiros? Por que não valorizar a mesma lógica utilizada na composição dos números inteiros e fazer a apresentação dos decimais de forma a compor o SND?

É preciso analisar o contexto em que o ensino se dá para ter um planejamento adequado. Logicamente não se deve esperar que essa apresentação seja feita de forma rigorosa ou exigente, porque em alguns casos basta apenas a utilização da vírgula, como por exemplo apresentar o número 2 como 2,0 ou 02,00. O uso da vírgula pode muito bem ser contextualizado e exemplificado nas questões monetárias ou de medidas. Por que não valorizar a mesma lógica utilizada na composição dos números inteiros e fazer a apresentação dos decimais de forma a compor o SND? Seria muito rico que os alunos percebessem que o raciocínio utilizado no reagrupamento de unidades para dezenas, é o mesmo usado no reagrupamento dos centésimos para os décimos. Acreditamos que tal entendimento favorecerá o professor e a professora no ensino, pois poderá ampliar as possibilidades que o SND oferece.

Por que não explorar com frequência os valores relativos e dos algarismos do número 3,05 ou do número 10,10 ou outro decimal qualquer, uma vez que, em vários contextos, não há exclusividade de posicionamento para os números inteiros? Ocultar a informação que a organização dos números decimais possui a mesma lógica dos números inteiros, pode contribuir para o distanciamento do entendimento dos números decimais, sendo que estes estão socialmente muito presentes. Além disso, pode contribuir com a ideia que os decimais fazem parte de um outro sistema de numeração, incorrendo no erro de levar ao entendimento que o número 3,05 não possui décimo ou que o número 10,10 possui 10 unidades e dez décimos. Nossa hipótese é que uma abordagem mais completa em todas as fases do ensino e aprendizagem irá favorecer a visão necessária do sistema para sua utilização.

Podemos observar em livros didáticos que os números decimais são apresentados em comparação aos números fracionários e quase não se vê uma abordagem inicial deles associada com os números inteiros. Deixar de abordar os números decimais juntamente com os números inteiros, ignorando até mesmo a importância da vírgula, pode acabar entrando em confronto com a realidade experimentada fora da escola, pois tem-se, por exemplo, a vivência de comparar os preços dos produtos de um supermercado ou as notas dos alunos em uma atividade avaliativa que ora contempla números inteiros, ora contempla números decimais. Nesse procedimento, pode estar havendo uma lacuna considerável que distancia a prática do dia a dia com o aprendizado.

Problematizando mais um pouco a questão, destacamos que, em grande parte, o enfoque no ensino apenas dos números naturais ou inteiros, onde por exemplo, quando se considera que 7 unidades são menores que 70 unidades, pode estar apontando que 7 décimos são menores que 70 centésimos, cometendo um erro por analogia e lendo a parte decimal de forma desatenta. Itzcovichi (2008, P.159) diz que é necessário deixar claro as relações próprias dos números decimais, pois muitas crianças acreditam que 3,8 é menor que 3,79 já que compreendem as propriedades dos números naturais onde 79 é maior que 8. Para Van de Walle (2009, p.370) ao colocar uma lista de números decimais em ordem do menor ao maior, o erro mais comum é selecionar o número com mais algarismos como o maior, tendo uma aplicação incorreta de ideias com números inteiros. Nesse sentido, Ponte, Branco e Matos destacam:

> Nota-se, porém, que mesmo na representação decimal surgem, por vezes, dificuldades significativas nos alunos, por exemplo, ao ordenar 0,7 e 0,14. Muitos deles ignoram o significado posicional dos algarismos e dizem que 0,14 é maior que 0,7 pois 14 é maior que 7. Na verdade nem todos os alunos generalizam as propriedades do Sistema de Numeração Decimal dos números inteiros para os números decimais, assunto que tem de ser abordado explicitamente na sala de aula. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p.25)

Ao nomear as ordens de um número com frequência, tais distorções poderiam ser evitadas uma vez que comparar 3,7 com 3,70 ressaltando que em 3,7 há 3 unidades e 7 décimos e em 3,70 encontramos 3 unidades e 70 centésimos, poderíamos identificar que a cada 1 décimo se tem 10 centésimos. Veja que reconhecer o lugar que o algarismo se encontra na formação do número é bastante essencial na compreensão da grandeza do próprio número evitando assim pensar que 0,8 seja menor que 0,75, pois em 0,8 há 8 décimos que correspondem a 80 centésimos que são maiores que os 75 centésimos do número 0,75.

3 I EXPLORANDO AS CARACTERÍSTICAS DO SND NAS OPERAÇÕES

De um modo geral, o ensino de conceitos iniciais e fundamentais da matemática não tem se mostrado como uma tarefa simples. Dadas as dificuldades operatórias demonstradas pelos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, largamente citadas em noticiários e sistemas avaliativos diversos em nosso país, nós nos perguntamos se os docentes não se sentem pressionados a introduzir rapidamente os algoritmos das operações. O ensino de números racionais positivos, que normalmente se inicia nos primeiros anos do ensino fundamental, estaria sendo atropelado pela necessidade de valorizar as operações básicas da matemática?

Em seu artigo, Batista (1995) investigou que o total de erros de vários tipos de operações envolvendo as quatro operações básicas é bastante alto em relação às expectativas de desempenho previstos nas propostas curriculares.

O processo de operação dos números, quando se foca no seu algoritmo sem citar o nome de suas ordens, pode dificultar a compreensão do educando, uma vez que o algoritmo convencional é pautado, em sua essência, na operação entre ordens individualmente. No algoritmo convencional da adição, a transformação de dez unidades em uma dezena é sinônimo da expressão “vai um”, e “pegar emprestado” no algoritmo convencional da subtração significa transforma uma dezena em 10 unidades, criando uma certa artificialidade como um “macete” para utilizar o procedimento. Não negamos esse tipo de explicação, mas é preciso que o estudante entenda o que está sendo feito quando a utiliza.

A não nomeação das ordens de um número no ensino do algoritmo convencional da multiplicação e da divisão pode levar à busca do suporte nos “macetes” do mesmo jeito. O que se pode perceber é que, ao executar esses algoritmos, se o entendimento é que o procedimento não pode ser explicado, cria-se uma dicotomia sem sentido: não se usa nomear as ordens em uma operação básica por julgar que seu entendimento se dará em função da exaustiva repetição dos algoritmos ou em função da exaustiva repetição dos algoritmos se entende que não precisa usar a nomeação das ordens de um número. Contudo, a nomeação das ordens de um número se faz necessária para um melhor entendimento do que se está fazendo, justificando os procedimentos do algoritmo formal.

Também queremos ressaltar que a noção incompleta da ideia do algoritmo, com os procedimentos que compõe, pode levar a obscuridade do que está promovendo. Nos PCS`s (1998), temos que:

> Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos. (PCN’s 1998, p. 37)

É indispensável compreender o conjunto de regras de um algoritmo antes e durante sua colocação em uma operação, pois assimilar a lógica utilizada pode impedir eventuais erros. Moreira e David (2010, p.58) dizem que estudos sugerem que vários erros que alunos cometem na utilização dos algoritmos das quatro operações possuem a justificativa do aluno não entender a lógica que justifica o algoritmo empregado. Nesse contexto, Teberosky (2007) aponta que:

> Vários trabalhos demonstram que boa parte dos erros que os alunos cometem deve-se ao fato de terem aprendido a manipular símbolos de acordo com determinadas regras, sem se deterem no significado dos mesmos. (TEBEROSKY, 2007, p. 26)

Também Smole e Muniz (2013) dizem que:

> Não podemos banir a prática da técnica, mas não acreditamos em técnicas sem um pouco de compreensão. Por exemplo, muitas vezes já nos deparamos com alunos adultos que têm dificuldades em dividir números decimais (Onde acrescenta o zero? E a vírgula, quando coloco?) e, ao investigarmos suas dúvidas percebemos que elas têm origem na compreensão do sistema de numeração decimal. (SMOLE e MUNIZ, 2013, p.47)

Em seu livro, Kamii (1995) defende fortemente que os algoritmos não devem ser ensinados às crianças do 1º ano do Ensino Fundamental. Para ela “as crianças não consideram o valor posicional e desenvolvem um senso numérico pobre” e diz também:

> O algoritmo é conveniente para os adultos, se já compreenderam o valor posicional dos números. Para as crianças no primário, contudo, que têm tendência para pensar em cada coluna como unidade, o algarismo acaba por reforçar essa ideia. (KAMII, 1995, p.57-58)

Nos parece que podemos avançar um pouco mais. Sem a compreensão do significado do valor posicional de um número, os algoritmos usados nas quatro operações básicas funcionarão como regras decoradas e sem sentido, podendo contribuir com sérios equívocos. Ao compreender os algoritmos, que funcionam de forma a operar separadamente as ordens de um número e ao apoderar-se da formação dos números, principalmente a composição e a decomposição, há um ganho quase incomensurável para o entendimento das operações básicas no ensino fundamental entre os números inteiros e principalmente entre os números decimais, implicando assim diretamente na compreensão dos números, do sistema e dos algoritmos utilizados nessas operações.

4 I CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ALGORITMOS DA ADIÇÃO E DA SUBTRAÇÃO

No algoritmo convencional da adição é muito comum usar da expressão “vai um” quando uma ordem excede nove unidades. Reiteramos que em nossa visão não há problemas nessa expressão, o problema é sua utilização desacompanhada de seu significado, induzindo à ideia de ser o processo operatório como “macetes”. Para Centurión (1994, p.157), usar a técnica do “vai um” é necessário que se conheça muito bem o nosso sistema de numeração que, como sabemos, é um sistema de base dez e utiliza a representação posicional. Nosso entendimento é que tais características devem ser bem exploradas para todas as notações que os números do sistema possuem.

Observemos um exemplo no qual deseja-se resolver o seguinte problema: *Em um certo dia em um aeroporto, trinta e cinco aviões aterrissaram e outros dezoitos aviões decolaram. Determine quantos aviões passaram por esse aeroporto nesse dia.*

É possível perceber que o problema acima se trata de uma adição, podendo-se utilizar como abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & {}^{1} & \\ + & 3 & 5 \\ & 1 & 8 \\ \hline & 5 & 3 \end{array}$$

Vejamos que esse processo de soma não destaca o que "está por trás" dos algoritmos e caso ele não seja compreendido de forma adequada pode-se pensar que a soma será 413, pois 5 + 8 = 13 e 3 + 1 = 4, deixando sem sentido o valor posicional dos algarismos como na montagem do algoritmo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} + & 3 & 5 \\ & 1 & 8 \\ \hline & 4 & 13 \end{array}$$

Observe que se na operação acima o entendimento for atrelado ao resultado "4" e "13" ou "40" e "13", temos um processo de soma incompleto e que não pode ser visto como errado, faltando apenas uma etapa de transformação de 10 unidades em uma dezena, o que se daria pela compreensão de valores posicionais do número.

Outro cuidado que precisamos ter ao utilizar o algoritmo convencional da adição é que, sem se preocupar com qual ordem se está trabalhando, podemos nos deparar com somas equivocadas porque não se sabe o que está sendo operado. Ao somar 6 com 18, é possível que encontre erroneamente 78 como resultado, veja:

$$\begin{array}{ccc} + & 6 & \\ & 1 & 8 \\ \hline & 7 & 8 \end{array}$$

Em seu artigo BATISTA (1995) verificou que:

> Os valores das centenas, dezenas e unidades não são colocados verticalmente um sobre o outro, ou seja, ao efetuar a soma ou subtração, o aluno em geral conta, juntos, os que estão superpostos na mesma coluna. (BATISTA, Ano 3 – Nº4/1995, p.65)

Dessa forma, devemos tomar bastante cuidado para que não se evidencie que no ensino do algoritmo convencional da adição, o processo utilizado se mune de argumentos que mais parecem um “macete” para chegar ao resultado correto do que um algoritmo que se justifique matematicamente.

No uso do algoritmo convencional da subtração predomina-se a expressão “pegar emprestado”, e quase sempre sem o seu significado. Também não vemos problema algum no uso desta expressão, porém é bom que ela esteja ancorada em uma justificativa matemática, mesmo que na forma intrínseca.

É possível que para algumas operações, a falta dos porquês que justifiquem os algoritmos pode contribuir para o insucesso do ensino. Vejamos o exemplo:

Um aparelho de TV custa R$ 3 005,00. No dia de hoje a loja oferece um desconto de R$ 1008,00 para pagamento à vista. Determine quantos Reais serão necessários para a aquisição dessa televisão se comprada hoje e à vista.

Após identificar que se trata de uma operação de subtração, o algoritmo convencional é armado e, ao efetuar a subtração, percebe-se que será preciso utilizar da expressão “pegar emprestado” mais de uma vez.

$$
\begin{array}{rr}
 & 3\,005 \\
- & 1\,008 \\
\hline
 & 1\,997
\end{array}
$$

Foi preciso “pegar emprestado” mais de uma vez?
Como “pegar emprestado” de onde não tem?
De onde surgiu o 9 nas ordens das dezenas e centenas?

A mecanização do algoritmo se torna sem sentido quando economizamos no entendimento de seus porquês. Utilizar somente de eventuais atalhos para facilitar a compreensão de uma operação, pode contribuir para um aprendizado confuso e tumultuado. É bastante relevante a verbalização da transformação das ordens, afim de minimizar a impressão de que pode-se retirar o que não se tem quando se tratar de números positivos.

5 I CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ALGORITMOS DA MULTIPLICAÇÃO E DA DIVISÃO

O algoritmo convencional da multiplicação possui alguns detalhes que, se não mencionados, podem contribuir com significativas lacunas em seu entendimento levando a uma sequência de fatos que funcionam sem que se saiba seus motivos, contribuindo para um processo mecanizado e sem sentido no que tange o ensino do pensamento matemático.

Vejamos dois detalhes significativos no algoritmo convencional da multiplicação de 33 por 12:

$$
\begin{array}{r}
33 \\
\times \quad 12 \\
\hline
66 \\
+ \quad 33 \\
\hline
396
\end{array}
$$

Multiplica-se a unidade (2) do segundo fator pelo primeiro fator e a dezena(1) do segundo fator pelo primeiro fator. Adicionam-se os dois produtos.

Observa-se que ao multiplicar a dezena (1) do segundo fator pela unidade (3) do primeiro fator, tem-se como resultado o (3) que é colocado na ordem das dezenas. Ocultar a informação do porquê desse processo pode otimizar o tempo, mas além de limitar o real entendimento da sistematização da lógica, demanda-se mais tempo para que se tenha um entendimento satisfatório da operação.

O segundo detalhe nesse mesmo algoritmo que requer bastante atenção é o porquê da soma dos resultados da multiplicação da unidade (2) do segundo fator pelo primeiro fator, com o resultado da multiplicação da dezena (1) do segundo fator com o primeiro fator. Por que é preciso fazer uso da operação da adição em um algoritmo de multiplicação? Tem-se que na multiplicação de 203 por 125, por exemplo, esses detalhes são potencializados.

Outra situação no mínimo curiosa no algoritmo convencional da multiplicação é quando precisamos multiplicar números decimais. Em livros didáticos encontramos a multiplicação entre números com vírgula estimulada tendo a seguinte ideia como base: “para multiplicar números decimais, basta sumir com a vírgula, fazer a multiplicação normalmente e depois voltar com a vírgula conforme o número de casas decimais”. Como justificar o “sumiço” e o “retorno” da vírgula ao fazer esta operação?

O algoritmo da divisão é apresentado como a divisão de cada ordem do dividendo sendo dividida pelo divisor e sem nomear essas ordens, sem citar seu posicionamento ou mencionar a decomposição do dividendo pode acarretar grande problema ou obter um quociente errado. Um exemplo é encontrar 1000,5 metros quadrados ao dividir um terreno de 60003 metros quadrados em 6 lotes de mesmo tamanho.

Outro desafio que há é a explicação do algoritmo da divisão com números decimais. Sendo o dividendo decimal (ou até mesmo o dividendo e o divisor decimais), por que se pode igualar as casas decimais, “sumir” com a vírgula e aí dividir normalmente? Outro agravante observado nas práticas de ensino nos algoritmos da divisão é o uso excessivos de regras como “ora vai zero”, “ora vai zero e vírgula no quociente” para justificar o processo do cálculo. Tais procedimentos decorados e sem o uso de seus porquês, muito das vezes, contribuem para um resultado errado de uma simples divisão. Vejamos o exemplo:

Quanto custa cada objeto, se três objetos iguais custam R$ 3,18?

Forma errada

$$\begin{array}{r|l} 3{,}18 & 3 \\ \hline -3 & 1{,}6 \\ 0\ 18 & \\ -\ 18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra forma errada

$$3{,}18 \div 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \div 3 = 1 \\ 18 \div 3 = 6 \end{cases} \Rightarrow 1{,}6$$

O resultado deverá ser 1,06.

O aluno deve acertar uma operação básica sabendo o que está fazendo, para que não corra o risco dele percorrer toda a escola básica e no final do ciclo, lá no final do ensino médio, apresentar dificuldade na utilização do SND.

Esperamos que este estudo possa contribuir para melhor compreensão dos educadores que ensinam Matemática, pois pensamos oferecer uma análise e até mesmo alguns meios para lidar com o ensino de operações básicas. Professores poderão se apoiar nestas ideias, seja nos anos iniciais ou finais do ensino fundamental (até mesmo do médio), quando os estudantes mostram dificuldades porque não entenderam os algoritmos ou por não apresentarem flexibilidade para utilizá-los em situações diversas.

REFERÊNCIAS

ALFONSO, Bernardo. **Numeración y Cálculo.** 3 ed. Madrid: Sintesis, 2000.

BATISTA, Célia Guarnieri. **Fracasso Escolar: análise de erros em operações matemáticas**. Zetetiké, V. 3, n. 4, p. 61 – 72, nov. 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação **Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / SEB. – Brasília: MEC/SEF,1997.

BRASIL. SEB. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**: Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber/Ministério da Educação– Brasília: MEC, SEB, 2014.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **Materiais didáticos para as quatro operações**. CAEM IME – USP, 2013.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e Metodologia da Matemática - Números e Operações**. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Ápis. Matemática**. Ed. Ática, 2017. V.4.

FIORENTINI, Dario; CRISTOVÃO, E.M. **Histórias e investigações de/em aulas de matemática**. 1.ed. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006. V. 1.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo; MILANI, Estela. **Presente Matemática Guia e Recursos Didáticos** – São Paulo: Editora Moderna, 2009. Vs. 2, 3 e 5.

ITZCOVICHI, Horacio. **La Matemática Escolar: las práticas de ensenanza en el aula**. Sique, 2008.

KAMII, Constance. **Desvendando a Aritmética**: Implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP. Papirus, 1995.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação do professor de matemática – Licenciatura e Prática Docente Escolar.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Números Naturais e Operações** – **Como Eu Ensino**. São Paulo. Editora Melhoramento, 2013.

PONTE, João Pedro; BROCADO, Joana; Oliveira, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte, MG: Editora Autêntica, 2007.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico.** Lisboa, 2009.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática**. Editora Moderna, 2015. Vs. 1, 2, 3, 4 e 5.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais**. Editora Penso, 2016.

SMOLE, Kátia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A Matemática em Sala de Aula**: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental – Porto Alegre, 2013.

TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana. **Além da Alfabetização**: A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. Editora Ática – 2007.

TOBIAS, Petrina R. Avelar. **Sala de aula invertida na educação matemática**: uma experiência com alunos do 9o. ano no ensino de proporcionalidade. Dissertação, PROMESTRE, Fae UFMG, 2018.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental** – Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Editora Artmed, 2009.

CAPÍTULO 2

PRÁTICA DOS PROFESSORES DA RESERVA EXTRATIVISTA CHICO MENDES, SOBRE O CONCEITO DE NÚMERO

Vânya Regina Rodrigues da Silva
Universidade Federal do Acre/UFAC
Rio Branco-Acre

Itamar Miranda da Silva
Universidade Federal do Acre /UFAC
Rio Branco-Acre

Joseane Gabriela Almeida Mezerhane Correia
Universidade Federal do Acre/UFAC
Rio Branco-Acre

Danise Regina Rodrigues da Silva
Universidade Estadual de Mato Grosso do Silva/ UEMS
Campo Grande-MS

RESUMO: Esse trabalho faz parte de uma pesquisa de mestrado, sobre ensino dos números com professores que ensinam matemática das escolas da Reserva Extrativista Chico Mendes, Xapuri/AC. Porém, nesse texto traçou-se por objetivo investigar como praticam o ensino dos conceitos básicos de número, mais especificamente identificar os conteúdos matemáticos que consideram mais difícil de ensinar. A base teórica de análise amparou-se nas ideias de Ifran (1989); Lerner e Sandovsk (1996); Nunes e Bryant (1997); Werner (2008); Sierra e Quintana (2012). Os dados foram obtidos por meio da aplicação de questionário com elaboração de atividades, entrevista semiestruturada, numa perspectiva qualitativa. O estudo nos permitiu constatar que os professores da Reserva possuem maior dificuldade no ensino das quatro operações e o conceito de fração. Não sabem relacionar as noções básicas de classificação, seriação, ordenação, correspondência termo a termo, inclusão hierárquica, comparação, sequenciação numérica e cardinalidade ao conceito de número e sua relação com sistema de numeração decimal; e, apresentam limitação conceitual sobre número.

PALAVRAS-CHAVE: Formação de Professores. Noções de números. Anos iniciais

ABSTRACT: This work is part of a masters research on teaching numbers with teachers who teach mathematics from the schools of the Extractivist Reserve Chico Mendes, Xapuri/AC. However, in this text the goal was to investigate how they practice the teaching of basic concepts of number, more specifically to identify the mathematical contents that they consider more difficult to teach. The theoretical basis of analysis was based on the ideas of Ifran (1989); Lerner and Sandovsk (1996); Nunes and Bryant (1997); Werner (2008); Sierra and Quintana (2012). The data were obtained through the application of a questionnaire with elaboration of activities, semi-structured interview, in a qualitative perspective. The study allowed us

to verify that the teachers of the Reserve have greater difficulty in teaching the four operations and the concept of fraction. They do not know how to relate the basic notions of classification, serialization, ordering, term-to-term correspondence, hierarchical inclusion, comparison, numerical sequencing and cardinality to the concept of number and its relation to decimal numbering system; and, present conceptual limitation on number.
KEYWORDS: Teacher training. Notions of numbers. Early years

1 I INTRODUÇÃO

A ideia de número se faz presente na vida do aluno muito antes de entrar na escola. Pois, ele já consegue classificar, enumerar, separar em conjuntos, dizer quem é maior ou menor, entre outros. Porém, a educação escolar vai partir desses conhecimentos para consolidar e ampliar novos conjuntos números de acordo com as situações em que não são possíveis encontrar resposta, com uso apenas dos números naturais.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) é de 1º ao 5º ano que ocorre a formalização dos números, começando pelos naturais. O ensino deve proporcionar ao aluno a construção de significado, confrontando-o com diferentes situações como contagem, enumeração, ordenação, codificação, a partir de atividades de agrupamentos etc.

Para isso, acredita-se que a resolução de problemas seja o ponto de partida para toda atividade matemática. O aluno ao sentir necessidade de resolvê-lo, irá conjecturar, pensar em diferentes soluções e técnicas, tornando a matemática escolar prazerosa. Entretanto, é sabido que os professores que ensinam matemática nos anos inicias, em sua maioria, possuem formação nos cursos de Pedagogia ou Normal Superior, em decorrência disso, conhecem os conteúdos básicos de matemática, porém com pouco aprofundamento, tanto no âmbito conceitual quanto didático. Cabe ainda, salientar que estes profissionais são os responsáveis pela formação escolar nos anos iniciais, em todas as áreas de atividades/saber. Cabendo-lhes o ensino das noções matemáticas (senso numérico, correspondência um a um/comparação; sequências numéricas, invariância, inclusão cardinalidade/ordinalidade) para a construção gradual, pelo aluno, do conceito de número.

Para Nacarato (2016) ao término do 1º ano do Ensino Fundamental o aluno já deve ter consolidado o conceito de número, conhecimento base para o desenvolvimento do pensamento numérico (sistemas de agrupamentos simples, sistema de agrupamento posicional). Porém isso requer que os professores dominem e mobilizem conhecimentos específicos para organizar situações de ensino envolvendo o objeto em estudo.

Acredita-se que o desconhecimento ou falta de domínio, capacidades, competências e habilidades sobre os números pelos Pedagogos, pode vir a causar lacunas no aprendizado dos alunos, e ainda descontinuidade no processo de ensino e aprendizagem, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental, no qual a docência é exercida por licenciados em Matemática.

Para Moreira e David (2010), as lacunas só serão superadas, se os licenciados em Matemática, tiverem conhecimento da forma de abordagem dos números naturais nos anos iniciais; como são tratados e quais conceitos são ou não abordados e seu desdobramento, para números inteiros, dentre outros (MOREIRA; DAVID, 2010); (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2015). As lacunas conceituais podem vir a limitar o fazer pedagógico e usos de estratégias de ensino com potencial para o desenvolvimento do pensamento aritmético do aluno.

Para os professores que ensinam matemática em salas multisseriadas das escolas da Reserva Extrativista Chico Mendes (RESEX) em Xapuri, Estado do Acre, esse desafio é bem maior, pois precisam dominar os conceitos matemáticos para contextualização do conhecimento em conformidade com a comunidade da floresta e descontextualizá-lo para aplicá-lo em outras situações fora dessa realidade. Sendo desta maneira, necessário a promoção de formação de professores direcionada aos conteúdos matemáticos e para a especificidade exigida ao ensino e aprendizagem diferenciada, em escolas situadas nos seringais do Acre que tem a floresta como ponto de partida para o ensino da Matemática, os conhecimentos tradicionais, o modo de vida e trabalho.

Grande parte dos professores das escolas da Resex Chico Mendes, receberam formação para atuar nos anos iniciais, pelo Projeto Seringueiro (PS). A experiência de educação desse Projeto é retratada na tese de Souza (2011) como um tema pertinente ao contexto dessa iniciativa educacional " Entre Lutas, Porongas e Letras: a escola vai ao seringal. O autor, apresenta um recorte dos anos 1981 a 1990, trazendo a discussão suas origens, fundamentos e propósitos, para atender populações da floresta, com saúde, cooperativismo e educação, o tripé do projeto e construção de seus objetivos, assim expressos, por Alegretti (2000):

> 1) possibilitar a independência econômica dos seringueiros libertando-os dos intermediários na comercialização da borracha e da castanha, através da organização de uma Cooperativa de Produção e Consumo.
>
> 2) possibilitar o acesso dos seringueiros às informações relativas à legislação trabalhista que definem os seus direitos enquanto trabalhadores rurais, assim como o controle dos termos em que se dá a comercialização da borracha e da castanha, através da organização de uma escola onde será desenvolvido um curso de alfabetização e de iniciação à matemática.
>
> 3) possibilitar melhores condições de saúde através da implantação de um pequeno posto de atendimento e do treinamento de agentes locais. Essas ações ficarão inicialmente na dependência de um diagnóstico das condições existentes na área (ALLEGRETTI, 2002, p. 358-359).

A educação como libertação constituiu-se no ideário do P.S com metodologia de ensino e aprendizagem guiada pelas premissas Freirianas de que nenhuma educação é neutra. Imbuindo-se da ideia de que todos ensinam e aprendem e, tendo a escola como espaço permanente de transformação (SILVA, 1998).

Na época, para desenvolver o segundo objetivo do P.S, escolas foram sendo construída no período de 1983 a 2004, concomitante a oferta de cursos de alfabetização e de iniciação à Matemática visando à formação de quadros para atuar nas escolas. Nesse contexto, os cursos tinham a finalidade de alfabetizar monitores que moravam no seringal para assumir a função de professor, uma vez que a grande parte dos candidatos não havia concluído nos anos iniciais. Souza (2011) coloca que:

> "[...]todos os monitores/professores são seringueiros alfabetizados pelo próprio Projeto. Ou foram alfabetizados anteriormente, e tiveram que participar de um **treinamento de formação** para poderem assumir tal responsabilidade [...] a escola passa a ser conduzida pelos próprios seringueiros, os já alfabetizados, mantendo suas rotinas diárias de trabalho no corte da seringa, na coleta da castanha, cuidando dos roçados, etc. O trabalho na escola seria uma cooperação com a comunidade, sem remuneração[...] o papel da equipe do Projeto Seringueiro, na condição de agentes externos, seria o **de treinar, assessorar e acompanhar os monitores/ professores durante todo o processo educacional**[...]" (SOUZA, 2011, p. 120-1. Grifo nosso)

Nota-se que o autor, coloca os cursos na modalidade de treinamento e ainda, que o acompanhamento aos monitores/professores deveria ter caráter permanente para retroalimentar os conhecimentos dos conteúdos de ensino e curriculares trabalhados nos cursos. Em muitos relatórios do Projeto tal atividade era nominada como formação continuada em serviço, referindo-se aos cursos de treinamento inicial.

Nessa perspectiva, o relatório do Projeto evidencia que o treinamento e a formação em serviço, cumpriam dupla finalidade: a de complementar a escolarização dos professores leigos e preparatórios para as práticas de sala de aula, a partir da retomada e aprofundamento de conhecimentos, intercâmbio de experiências e troca de informações que contribuíssem para a formação, além da competência didática, envolvia a ampliação do universo cultural do professor (Relatório CTA, 2008).

No campo da Educação Matemática orientava-se tomar como ponto de partida resgatar o conhecimento empírico para torná-lo científico, em tentativas de automodelar e não fragmentar o saber. Não havia preocupação com programas oficiais, considerados fechados, mas, sim, a construção dos conhecimentos numa perspectiva dinâmica e contextualizada.

Observou-se na leitura de diversos relatórios de formação algumas sugestões para trabalhar noções matemáticas, como as que seguem:

> a)No corte da seringa: a contagem das estradas, das madeiras, das tigelas, dos dias de corte, o cálculo do tempo gasto para o corte e a colha, a porcentagem de quilos de borracha por leite colhido e etc.
>
> b)No trabalho do roçado: a contagem das covas de roça, dos grãos de semente por cova, a medida da área plantada em tarefas, termo esse que no linguajar do seringueiro significa = 2.500m^2 ou ¼ de 1 hectare de terra, variando conforme Estado.
>
> c)Na construção da morada: a medida da casa, do madeirame, a altura do pé

direito, a quantidade de palha ou de cavaco.

d)Na criação de animais domésticos: a contagem das cabeças de criação, quando se aumenta com a procriação ou se diminui com o ataque dos predadores.

e)Na caça: a quantidade de chumbo por cartucho, a quantidade de caça morta em determinada comida.

f)Na relação tempo/ distância: o tempo gasto para se chegar na casa do vizinho ou na cidade (RELATÓRIO CTA, 1985, p.1).

Percebe-se que a noção de número e contagem são abordadas a partir do empírico, a exemplo, correspondência ou não entre quantidade de chumbo por cartucho e caça morta no local da comida, no linguajar caboclo, para indicar a árvore que determinado animal de alimenta de seus frutos, ideal para fazer espera, caçar. Caçar era e faz parte da cultura do seringueiro, para suprir sua necessidade de alimentação.

A partir de 1998 as escolas de melhor acesso foram repassadas ao poder público, finalizando o repasse em 2007. Nesse interim, os professores concluíram o ensino fundamental por meio do ensino supletivo e a partir de 1998; ensino médio em magistério no Proformação médio e concluíram o ensino superior pelo Programa de Formação Inicial Rural (PROFIR) em 2011, licenciaturas especificas (Geografia, Letras, Matemática, História, Biologia) pela Universidade Federal do Acre (UFAC).

Embora os professores tenham completado a escolarização formal ao longo dos anos, observou-se limitações quanto ao ensino dos conceitos matemáticos em decorrência do próprio contexto no qual se desenvolveu o Projeto e a formação Inicial dos professores.

Tais limitações foram constatadas em um encontro de planejamento de professores em Xapuri, no mês de julho de 2015, no qual a pesquisadora participou. Cabe ressaltar que esse encontro faz parte de uma ação da pesquisa de Mestrado no Ensino de Ciências e Matemática sobre a formação de professores que atuam nas escolas da Reserva Chico Mendes e o ensino as noções e ideias matemáticas para a construção do conceito de número (ordenação, seriação, classificação, comparação, inclusão, agrupamento); pois, para Vergnoud (1986) e Lerner e Sandovsk (1996); Nunes e Bryant (1997); Freitas e Bittar (2004); Werner (2008); Sierra e Quintana (2012) que consideram primordial os professores se apropriem das ideias básicas sobre números para que possam promover nos alunos um conhecimento significativo, como base para o desenvolvimento do pensamento aritmético e algébrico.

Ademais, considera-se que o trabalho com sistema de numeração decimal (SND) pode vir a possibilitar uma apreensão progressiva da consciência numérica, ou seja, do saber lidar livremente com os números, inclusive operando com eles, ciente das propriedades do SND que mobilizam em suas ações de agrupamentos e contagem.

Diante disso, buscou-se investiga que conteúdos matemáticos os professores que ensinam Matemática nas escolas da Resex Chico Mendes consideram difícil de ensinar e como praticam o ensino de número, o seu conhecimento sobre as noções matemáticas (Correspondência, inclusão hierárquica, sequência numérica, comparação, ordinalidade e cardinalidade) base para a construção do conceito de número pelo aluno.

2 I ENFOQUE TEÓRICO E METODOLÓGICO

O número, segundo Ifran (1989) não é “algo inventado e que tem que ser transmitido”, pois exige do sujeito determinada capacidade abstrata de contar, e que está não é algo nato ao indivíduo, igual a percepção direta dos números. O autor nos coloca ainda que a invenção dos números, não surgiu a partir de uma preocupação de ordem prática e utilitária. Mas, sim um conhecimento construído a partir de uma necessidade humana, e como tal dotado de significados (IFRAH, 1989, p. 9-25).

Para Freitas e Bittar (2004) desde antes de conhecer os números o ser humano sabe contar. Para eles, a noção de contagem é operação elementar tanto na vida individual quanto social e que a gênese dos números traz vestígios desde eras pré-históricas da civilização humana. Acrescentam que não tem como saber como surgiram os números,

> [...] é difícil afirmar se esse conceito nasceu da experiência ou se a experiência apenas auxiliou a tornar explicito o que está latente na mente do homem primitivo. É razoável imaginar que com o passar do tempo, a medida que as práticas de contagem foram-se intensificando, foram surgindo **símbolos para registrar quantidades e também comunicar quantidades** (...) A gênese do conceito de número, bem como outros conceitos matemáticos, parece estar ligado a experimentações do mundo físico. No entanto, como disse Platão (séc. IV a.C.), os conceitos matemáticos são de natureza abstrata, ou seja, são objetos que só existem no mundo das idéias (FREITAS e BITTAR, 2004, p. 44. Grifo. Nosso)

Se a gênese dos primeiros símbolos numéricos está ligada as necessidades práticas utilitárias do mundo físico para registrar e comunicar quantidades, ou seja, contar desde a era primitiva, aos dias atuais, conforme assinalam Freitas e Bittar (2004) desenvolvendo o pensamento aritmético.

Para Ifrah (1989) a construção do conceito de número ocorre a partir de três procedimentos aritméticos: correspondência um a um, ordem numérica e consciência da ordem (IFRAH, 1989, pp.25-45)

O primeiro procedimento é a correspondência um a um para comparação ou ainda, equiparação de duas coleções de seres ou objetos diferentes e/ou ainda para estabelecer correspondência biúnica ou bijeção que permite envolver vários números necessidade de contar, nomear ou conhecer as quantidades envolvidas em coleções reduzidas. Esse procedimento elementar dá lugar a primeira noção abstrata de número. O segundo procedimento a ordem numérica, ocorre através da percepção da sucessão simultânea, ou seja, enumerar para caracterizar certa quantidade de seres ou objetos, para realização de operações de contagem.

O último procedimento é consciência da ordem pela descoberta da capacidade de intervir para introduzir a unidade de todas as precedentes “em um sistema de unidades numéricas hierarquizadas que se encaixam consecutivamente umas às outras", obtidas sucessivamente por acréscimo suplementar de uma unidade, o chamado princípio da recorrência sob o ângulo da abstração por assimilação do inteiro natural precedente.

Por fim, a noção de número recobre dois aspectos complementares: o cardinal e o ordinal. O primeiro tem por base o princípio da equiparação e o segundo exige ao mesmo tempo processo de agrupamento quanto de sucessão. Dessa forma Ifrah, considera a noção de cardinalidade " base para a aritmética" (Idem, p.47-49). Os três procedimentos indicados por Ifrah, são capacidades que contribuem para compreensão do significado e sentido dos números pela observação de regularidades.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) o ensino da Matemática objetiva desenvolver habilidades que possibilite ao aluno construir o significado de números naturais e seu uso em diferentes contextos sociais, a partir de situações problemas, bem como, interpretar e produzir escritas numéricas e observar regularidades para compreensão do significado e sentido do número (BRASIL, 1997).

A percepção pelo aluno de regularidades do sistema numérico ocorre no entendimento que toda vez que um número termina com 9, o anterior termina em 8 e o posterior em 0. Vejamos um exemplo: 8, 9, 10; 119, 20; 138, 139, 140.... Essa compreensão é fundamental para o aprendizado do aspecto multiplicativo do nosso sistema de numeração pelo aluno.

Ensinar a construção do conceito de número é compreende-lo como um conceito abstrato e, no plano observável, como quantidade, "na relação entre os objetos, situações ou ações". O professor assume papel do professor fundamental, por ser o que cria "situações" de ensino "que permitem a construção do conceito de número" para que os alunos atribuam sentidos a representação dos objetos (WERNER, 2008, p. 23).

Para Lerner e Sandovsk (1996) a noção de número guarda relação de grandeza de acordo com a posição ocupada pelo número e sua quantidade, como critério de comparação. Nunes e Bryant (1997) e Vergnoud (1986) acrescentam, que a construção do conceito de número envolve relação entre medidas e ideias de transformação, composição, comparação para entendimento do sistema de numeração.

Alguns autores defendem que essas ideias matemáticas são bases para avaliar se os alunos "desenvolveram a aprendizagem funcional do número, sendo capazes de resolver problemas matemáticos da vida no cotidiano, donde é necessário utilizar o número em seus aspectos cardinal e ordinal (SIERRA; QUINTANA, 2012, p.27. Tradução nossa).

A partir desses referenciais, buscou-se durante a pesquisa, levantar dados e informações sobre os conhecimentos mobilizados pelos professores para ensinar o conceito de número. A metodologia assumida, pautou-se em uma abordagem qualitativa com contato entre pesquisador e participantes durante todo o processo investigativo, em conformidade com Ludke e André (1986); Borba e Araújo (2013) entre outros que atribuem grande responsabilidade do pesquisador quanto a interpretação dos dados descritivos.

Assim para alcançar o objetivo proposto desse artigo foi aplicado um questionário para 27 professores em exercício da docência nas escolas da Reserva Extrativista Chico, contendo as seguintes questões: que conteúdo matemático você considera difícil de ensinar nos anos iniciais do ensino fundamental? Você considera importante ensinar ao aluno as ideias matemáticas de inclusão, seriação/ordenação, comparação, conservação, correspondência e cardinalidade? Que relação você faz dessas ideias matemáticas com as quatro operações ou com o sistema de numeração decimal? Dê exemplos de como ensina esse (s) conceito (s).

3 I ANÁLISE DAS QUESTÕES

Na primeira questão buscamos identificar que conteúdo (s) matemático, os professores dos anos iniciais, tem dificuldades em ensinar. A análise das respostas nos permitiu constatar que 28% dos professores acreditam dominar plenamente os conceitos matemáticos ensinados nessa etapa de ensino, pois não apontaram nenhum conteúdo deficitário. Entretanto, a grande maioria respondeu ter dificuldade em ensinar as quatro operações seguindo do ensino de frações, conforme gráfico 1, a seguir:

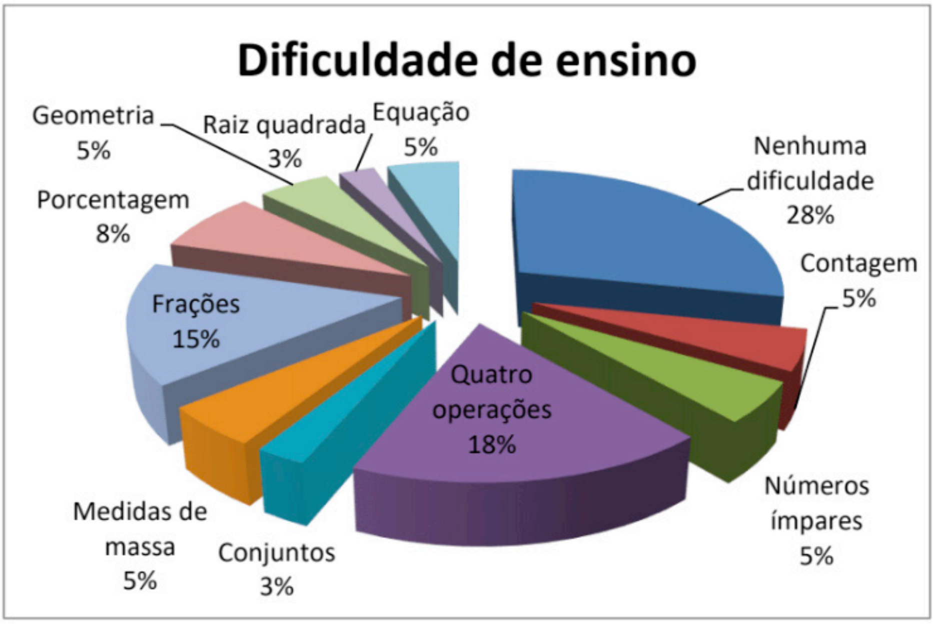


Gráfico 1 - Dificuldades para ensinar matemática em relação ao saber o conteúdo.

Fonte: extraído questionário aplicado, 2015.

A segunda questão tinha por finalidade verificar que conhecimentos os professores possuíam sobre as ideias matemáticas envolvendo números naturais como: inclusão, seriação/ordenação, comparação, conservação, correspondência e cardinalidade, bem como, a relação que eles fazem dessas ideias com as quatro operações e o sistema de numeração decimal.

Considerou-se que os professores não conseguem relacionar as ideias de seriação, ordenação, classificação, inclusão, com as quatro operações ou com o sistema de numeração decimal. Pois nesse item, todos foram unânimes em responder que desconhecem a relação conceitos com as quatro operações ou com sistema de numeração decimal.

Acredita-se que talvez não tenham compreendido a pergunta, pois pediram para que fosse dado exemplo do trabalho com as noções matemáticas que envolvem os números em relação ao sistema de numeração decimal. Para Ifran (1989) a compreensão dessas noções é essencial na formação base para aritmética do aluno, nos anos iniciais.

Essa questão solicitava ainda que o professor apresentasse um ou mais exemplos envolvendo as noções matemáticas que envolvem o conceito número (inclusão, seriação/ordenação. Foram apresentados vários exemplos, porém neste estudo ilustraremos apenas três situações.

O primeiro refere-se à noção matemática de inclusão. Cabe ressaltar que o professor poderia ter ilustrado mais de uma situação, porém se limitou a apresentar apenas uma. A atividade se refere a uma sequência do 1 ao 7, em que solicita como tarefa que o aluno encontre os números que estão faltando em uma sequência numérica maior que a observada.

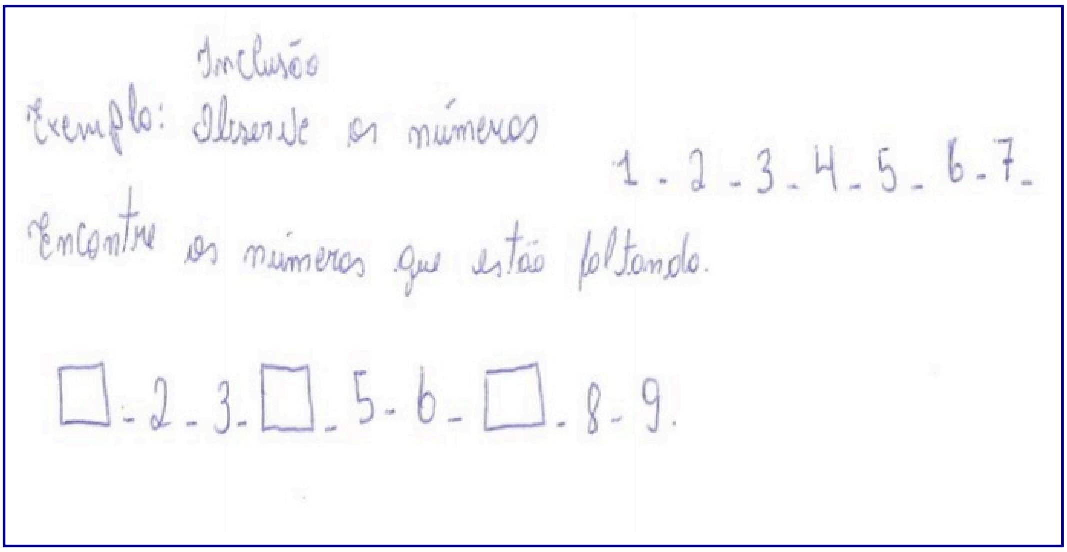


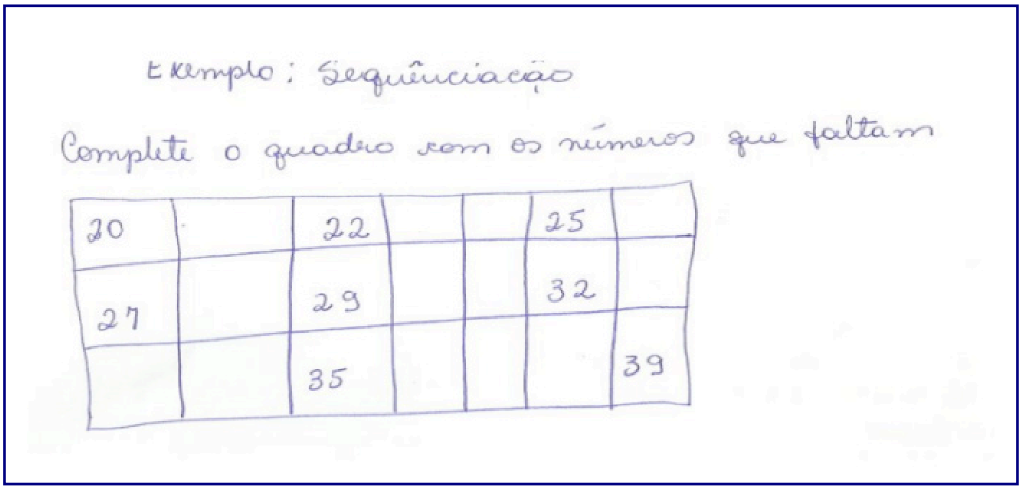
Figura 1 – Prática do conceito de *inclusão hierárquica*

Fonte: Extraído questionário aplicado ano 2015

Implicitamente tem-se a ideia de que o conjunto menor está contido no conjunto maior. O professor poderia ter encerrado a tarefa faltando o último algarismo, 7.

Sabe-se que a ideia de inclusão nesta etapa de ensino, corresponde ao processo mental do aluno para chegar ao resultado, de que um número contém os anteriores em uma sequência ordenada. Assim, o 1 está contido no 2; 1 e 2 no 3, e assim sucessivamente, numa sucessão hierárquica. Assim, consideramos que o professores em estudo, parecem não compreender o conceito de inclusão hierárquica.

Na figura 2, o destaque é para um exemplo envolvendo sequência conforme segue:


Exemplo: Sequênciação

Complete o quadro com os números que faltam

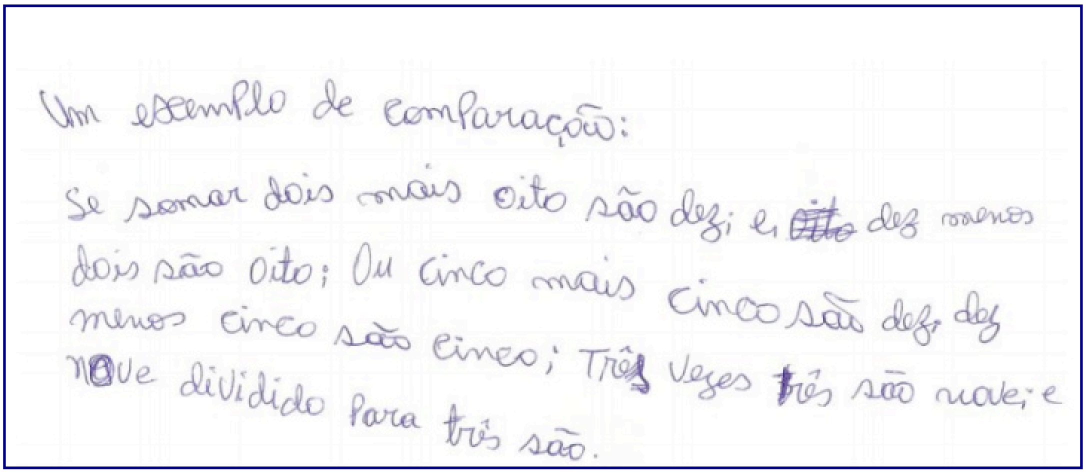
20		22			25	
27		29			32	
		35				39

Figura 2 – Prática do conceito de *sequência e seriação*

Fonte: Extraído questionário aplicado ano 2015

Nesta figura temos exemplo de uma atividade de sequenciação, em que o professor solicita como tarefa que o aluno complete a sequência numérica entre 20 e 39. Cabe salientar que o professor poderia dar mais de um exemplo para expressar sua maneira de ensinar. Porém, limitou-se apenas a uma atividade.

Analogamente a inclusão hierárquica, sequenciar e seriar também são uma ação mental que deve ser desenvolvida no aluno. Neste caso caberia ao professor apresentar outras situações envolvendo diferentes sequências numéricas necessárias a compreensão do conceito de posição ordenada, tal como: sequência dos números pares, dos números ímpares maior ou igual a 7 e menor ou igual a 15; uma sequência de números que começam com a letra D, dentre outros (WERNER, 2008). Por fim, a figura 3, a manifestação da ideia de comparação numérica.


Um exemplo de comparação:

Se somar dois mais oito são dez; e, ~~oito~~ dez menos dois são oito; Ou cinco mais cinco são dez, dez menos cinco são cinco; Três vezes três são nove; e nove dividido para três são.

Figura 2 – Prática do conceito de comparação

Fonte: Extraído questionário aplicado ano 2015

Nos anos iniciais a ideia de comparação está relacionada a observação de características físicas quanto numéricas. No caso da primeira, saber quem é maior, João ou Maria, quantos lápis de certo tamanhos cabem num estojo, dentre outros. Em relação às características numéricas correspondem desenvolver no aluno a percepção do número que vem antes e depois, a posição do algarismo, os critérios de comparação a partir de números formados por dois ou mais algarismos, bem como a escrita numérica. Tais atividades são fundamentais para entendimento pelo aluno da regularidade numérica, por meio da escrita. A compreensão da regularidade é um fator essencial para aprendizado do sistema de numeração decimal, pelos alunos (LERNER; SADOVSKY, 1996).

Nessa direção, consideramos que o professor não contemplou a ideia de comparação, ficando evidente a falta de compreensão do conceito. É importante ressaltar que nenhum dos participantes indicou dificuldades nas noções de ordenação, comparação, sequência, seriação, inclusão hierárquica. O que nos leva a supor que esses professores acreditam dominar o que estão ensinando sobre as noções básicas da construção de número (sequência numérica, seriação, comparação, inclusão cardinalidade/ordinalidade) e contagem; porém apresentaram, limitações conceituais.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo constatou que um número expressivo de professores da Reserva Extrativista Chico Mendes, acreditam dominar todos os conteúdos matemáticos que devem ser ensinados nos anos iniciais. Atribuem maior dificuldade para o ensino das quatro operações e ao conceito de fração. Não sabem relacionar as noções matemáticas que envolvem a construção da ideia de número ao sistema de numeração decimal e as quatro operações.

Apesar dos professores considerarem dominar as noções de classificação, seriação, ordenação, correspondência, cardinalidade. Nas atividades por eles elaboradas percebeu-se limitações conceituais.

Acredita-se que as limitações conceituais podem comprometer o desenvolvimento de estratégias de ensino que contribuam para o desenvolvimento do pensamento aritmético do aluno ao longo da etapa do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ALLEGRETTI, Mary H. **A construção social de políticas ambientais: Chico Mendes e o Movimento dos Seringueiros.** Tese (Doutorado em Desenvolvimento Sustentável). 2002. 827f Universidade de Brasília Brasília-DF, 18 de dezembro de 2002.

BORBA, M. de C; ARAÚJO. J. de L (Orgs). **Construindo pesquisas coletivamente em Educação matemátic**a. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

FREITAS, José Luiz M; BITTAR, Marilena. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. Campo Grande -MS: UFMS, 2004.

IFRAH, Georges. **Os números: história de uma grande invenção**/Georges Ifrah; trad. Stella Maria de Freitas Senra; revisão técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. Rio de janeiro: Globo, 1989.

LERNER, Delia; SADOVSKY, Patrícia. **O sistema de numeração: um problema didático**. In: PARRA. Cecília; SAIZ, Irmã (org.). Didática da matemática: Reflexões psicopedagógicas. Tradução: Juan Acuña Liorens Porto Alegre: Artmed, 1996.

LUDEKË, M.; E ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação. Abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, Plinio M; DAVID Maria Manuela M.S. **A formação matemática do professor. Licenciatura e prática docente**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

NACARATO. Adair M. **A construção do conceito de número na educação escolarizada**. (Dissertação Mestrado). Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 1995.Disponivel em: < http://www.bibliotecadigital.unicamp.br>. Acesso em 10 de ago. 2016.

NACARATO. Odair M; MENGALI. Brenda Leme da S; PASSOS. Cármen Lúcia B. **A Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autentica, 2015.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Criança fazendo matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.

SIERRA, Tomás. A. D.QUINTANA, Estér. R. **Una propuesta para la enseñanza del número en lá educación infantil**. NÚMEROS. Revista de Didácticas de las Matemáticas, v. 80, 2012.p 25 a 52. Disponível em: <http://www.sinewton.org/numeros/. Acesso em 17 de jan. 2016.

SOUZA, José Dourado de. **Entre lutas, porongas e letras: a escola vai ao seringal** - (re) colocações do Projeto Seringueiro (Xapuri/Acre - 1981/1990). Tese (Doutorado em Educação). 2011, 259fl. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte: UFMG/FAE, 2011.

WERNER Hilda Maria L. **Aprendizagem e o senso matemático-Como iniciar o trabalho.** Disponível em: <http: www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portal/pdf>. Acesso em 17 de jan. 2016.

VERGNAUD, Gerard. **A teoria dos campos conceptuais**. In: BRUN, Jean (direcção). Didáctica das matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1986.

FONTES DOCUMENTAIS

RELATÓRIO, **Cursos de formação**. Dezembro de 2007. Arquivos do CTA. Rio Branco - Acre.

RELATÓRIO, **Diagnóstico Escolar**. Dezembro de 2008. Arquivos do CTA. Rio Branco - Acre.

RELATÓRIO, do **Curso de Treinamento Monitores**. Abril de 1985. Arquivos do CTA. Rio Branco-Acre.

CAPÍTULO 3

NEGOCIANDO CONCEITOS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO NAS TAREFAS DE MATEMÁTICA DE ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Érika D'Ávila de Sá Rocha
Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Imperatriz - Maranhão

Jónata Ferreira de Moura
Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Imperatriz - Maranhão

RESUMO: Este artigo que é parte de um TCC, discute a natureza das tarefas de matemática e a negociação de conceitos sobre medidas de comprimento em uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental. Os objetivos principais desse trabalho são: 1. Identificar as potencialidades das discussões na sala de aula (conversação/argumentação) para a construção de significados matemáticos pelas crianças; 2. Analisar a prática pedagógica da professora-pesquisadora; 3. Perceber como crianças do 3º ano do Ensino Fundamental aprendem as medidas de comprimento a partir de tarefas de natureza exploratória. É uma pesquisa do tipo Pesquisa da Própria Prática, em que o professor alia investigação e ensino. Para produção de dados utilizamos videogravações. As análises evidenciam o quanto as tarefas de natureza exploratórias são importantes para o aprendizado das crianças em um movimento de socializações e argumentações. Também evidenciou aprendizagens da professora-pesquisadora, tanto na prática docente quanto em pesquisa na sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Tarefas Matemáticas de Natureza Exploratória; Prática Docente; Medidas de Comprimento; Significados Matemáticos.

ABSTRACT: This article, which is part of a CBT, discusses the nature of math tasks and the negotiation of concepts on length measures in a 3rd grade class of Elementary School. The main objectives of this work are: 1. To identify the potentialities of classroom discussions (conversation / argumentation) for the construction of mathematical meanings by children; 2. Analyze the pedagogical practice of the teacher-researcher; 3. To understand how children in the 3rd year of elementary school learn the length measures from tasks of an exploratory nature. It is a research of the type Research of the Own Practice, in which the professor combines research and teaching. For data production we use video recordings. The analyzes show how exploratory tasks are important for the children's learning in a socialization and argumentative movement. It also showed the teacher-researcher's learning, both in teaching practice and in research in the classroom.

KEYWORDS: Mathematical Tasks of Exploratory Nature; Teaching Practice; Measures of Length; Mathematical Meanings.

1 I INTRODUÇÃO

A prática do professor dos primeiros anos do Ensino Fundamental precisa estar voltada para as necessidades apresentadas diante da realidade dos alunos; o professor deve considerar os seus conhecimentos prévios, relacioná-los com a realidade e caminhar para o conhecimento científico. Um dos principais motivos para pesquisar sobre a natureza das tarefas e o ambiente de aprendizagem matemática, partiu das inquietações e dificuldades enfrentadas na disciplina de matemática durante a vida estudantil e acadêmica que a primeira autora da pesquisa experienciou. As expectativas sobre essa disciplina sempre foram de espanto e medo, por não conseguir aprender os conhecimentos dessa área e pela apreensão em reprovar.

Além de ser um desafio pessoal, as dificuldades em aprender e ensinar matemática têm se tornado cada vez mais um desafio profissional. Percebemos na sala de aula, de modo geral, distanciamento dos estudantes às tarefas matemáticas, tornando a afirmativa do senso comum que matemática é um bicho de sete cabeças, algo cada vez mais próximo da nossa realidade. Tentando, pelo menos, amenizar essa situação as tarefas de matemática devem ser pensadas, planejadas e elaboradas observando aspectos como realidade da sala de aula, idade dos alunos, o diálogo e o objetivo que se pretende alcançar.

O trabalho está organizado em quatro eixos. O primeiro apresenta com mais detalhes os caminhos metodológicos utilizados na pesquisa, o segundo discorre sobre a natureza das tarefas de matemática, no terceiro analisamos as tarefas sobre medidas de comprimento realizadas pelos alunos do 3º ano do ensino fundamental, além disso, apresentamos alguns des(encontros) da professora-pesquisadora com os alunos e finalmente, no quarto eixo apresentamos as reflexões acerca da aprendizagem dos estudantes e evidenciamos as aprendizagens da professora-pesquisadora, tanto na prática docente quanto em pesquisa em sala de aula.

2 I METODOLOGIA

A escolha por uma pesquisa do tipo Pesquisa da Própria Prática deve-se ao fato de que se busca não somente produzir dados, mas interpretá-los e compreendê-los levando em conta o contexto do universo da investigação. Lima e Nacarato (2009, p.243) defendem esse tipo de pesquisa como sendo significativo para, pelo menos, dois olhares sobre as práticas docentes.

> Defendemos que a pesquisa do(a)s professore(a)s da escola básica pode contribuir para que se venha a compreender quais conhecimentos são mobilizados na ação pedagógica e como eles são (re)significados; consequentemente, pode também contribuir para a pesquisa acadêmica e para a gestão de políticas públicas, bem como pode transformar esse(a)s professor(e/as) em consumidor(es) mais crítico(s) das pesquisas acadêmicas.

No campo das ciências humanas esse tipo de pesquisa é novo, mas vem sendo utilizada por muitos professores, pois beneficia tanto o professor-pesquisador como seus alunos, gerando conhecimento e cultura. Essa sensação foi sentida por outras pesquisadoras como Bagne (2012), Galvão (2014), Mengali (2011) e poderá ser o sentimento de muitos outros que ainda irão se aventurar nesse tipo de pesquisa.

A partir desse tipo de trabalho o professor sente a necessidade de refletir sobre sua prática, provocando mudanças no seu processo de ensino. Nessa perspectiva, a pesquisa da própria prática tem cada vez mais ganhado destaque, uma vez que é um importante impulsionador do desenvolvimento das práticas pedagógicas.

A pesquisa foi realizada numa escola privada de Imperatriz-MA durante o segundo semestre de 2015. A sala de aula pesquisada foi a de um 3º ano do Ensino Fundamental do turno vespertino. Ela é fisicamente pequena e estão matriculados nove alunos, dentre eles, apenas três são meninas. Os nove alunos participaram da pesquisa.

Os dados foram produzidos a partir de expressões orais e corporais registrados por videogravações. Para Powell, Francisco e Maher (2004), as gravações em vídeo têm se tronado um importantíssimo instrumento de capturar imagens em movimento, tornando-se de fundamental importância para as pesquisas em Educação Matemática. Outros instrumentos para a produção de dados foram os registros fotográficos e o diário de bordo da professora-pesquisadora, uma vez que ao final de cada aula, transcrevia as suas concepções e análises preliminares sobre a sua própria prática e sobre a aprendizagem de seus alunos.

As aulas vídeogravadas foram transcritas, seguindo as orientações de Powell, Francisco e Maher (2004, p. 98), usando-se os sete critérios que se relacionam, mas que não são lineares: “1) fazer uma observação atenta do vídeo; 2) descrever as cenas; 3) identificar os eventos críticos; 4) transcrever; 5) codificar; 6) construir um enredo; 7) compor a narrativa”. Nesse momento, foram considerados também as inquietações dos alunos, os gestos, as entonações, as emoções e outros aspectos importantes no momento da análise.

3 I A NATUREZA DAS TAREFAS DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Uma cultura de sala de aula que tem espaços para reflexões e discussões, são resultados da ação de um professor. Nesse sentido, cabe a ele a escolha de tarefas que potencializarão a aprendizagem de seus alunos e esse fato está diretamente relacionado com o ambiente de aprendizagem que foi construído pelo professor. Não adianta uma tarefa ser potencializadora se não for problematizada, discutida em sala de aula pelos alunos e professor. Sob este prisma, Ponte (2014, p.17) esclarece que:

> [...] as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na

> aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. Pelo seu lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação.

Cada aluno apresenta diferentes características, motivações, interesses e capacidades, o que resulta ritmos de aprendizagens diferentes e esses aspectos interferem em como os alunos se envolvem nas atividades da sala de aula. Nesse caso, atividade é o que o aluno consegue concretizar realizando uma dada tarefa ou mais. A tarefa na maioria das vezes estará subordinada à uma atividade, ou seja, se o professor propõe uma atividade, dentro desta podem existir diversas tarefas.

De certo, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática requer muito do professor, como problematizador, como responsável por propor tarefas que serão potencializadoras; não podemos esquecer que o aluno também é parte integrante desse momento. No que diz respeito às tarefas, o professor mais uma vez exerce uma função propulsora no momento de decisão: da tarefa que está sendo proposta e da situação didática que será criada por ele.

O Conselho Nacional de Professores de Matemática – NCTM (2008) dos Estados Unidos, indica que na elaboração de uma determinada tarefa é sempre bom ter em conta o nível de dificuldade, a complexidade, se tem ou não procedimentos rotineiros, o grau de abertura. Ponte (2003, p. 4-5), organizando as sugestões do NCTM, assevera:

> Uma tarefa tem quatro dimensões básicas: O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa, que podemos visualizar no esquema:

> Deste modo:
>
> Os exercícios são tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada (2º quadrante); Os problemas são tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade (3º quadrante); As investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta (4º quadrante); Finalmente, as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta (1º quadrante).

Cada tarefa é pensada de modo diferente, ou seja, depende do conteúdo e da forma como o professor trabalha esse conteúdo na sala de aula. Podemos afirmar que uma tarefa pode ser muito mais do que simplesmente uma folha de papel com questões objetivas ou subjetivas, a tarefa pode expressar os objetivos que o professor pretende alcançar naquela aula. Neste trabalho, defendemos também as tarefas orais, que seriam diversas atividades com desafios, de maneira exploratória.

A abordagem exploratória, no ensino da matemática, tem a finalidade de fazer com que os alunos enfrentem situações sem uma resolução imediata, ou seja, eles terão de construir por si só, mediados pelo professor, a compreensão de conceitos, representações e outros desafios matemáticos. O professor transmite a informação, conversa com os alunos e eles interpretam as questões propostas ao buscar estratégias para a resolução da mesma, apresentando e justificando as respostas, na medida em que são orientados pelo professor.

Abaixo analisamos uma tarefa do tipo exploratória com alunos do 3º ano do ensino fundamental.

4 I DIÁLOGOS, INTERAÇÕES E DISCUSSÕES DE CONCEITOS MATEMÁTICOS SOBRE MEDIDAS DE COMPRIMENTO COM OS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

No decorrer da análise, estarão presentes apenas trechos críticos, representados pela letra T. Esses trechos são os momentos que notamos que seriam mais relevantes para a discussão no decorrer das análises. Aparecerá, também, uma caixa de texto sempre que for necessário destacar algum ponto importante da descrição das videogravações:

> Nesta caixa estarão descritas algumas ações dos alunos ou anotações presentes no diário de campo da professora-pesquisadora.

A ideia de medir apresenta indícios desde as antigas civilizações, quando o ser humano tinha a necessidade de dividir terras, fazer receitas, entre outras coisas. Sabemos que tudo que conhecemos de tecnologia é fruto da necessidade do homem de facilitar a sua sobrevivência e também na resolução de problemas do dia a dia, principalmente os sistemas de medida que são aperfeiçoados cada vez mais. (LANNER DE MOURA, 1995)

Na sala de aula, ensinar medidas não é muito diferente, pois, de acordo com Lanner de Moura e Lorenzato (2001, p.12) fundamentados por Leontiev (1988), aconselham:

> [...] como tratar a medida de forma que medir fosse uma necessidade real para a criança, e não apenas uma tarefa. A atividade deveria possibilitar que as ações fossem construídas a partir dos conhecimentos culturais de medida já elaborados pela criança e, possivelmente, permitir o avanço para conhecimentos mais elaborados.

Entendemos que, para a criança, a atividade de medir deve surgir como uma necessidade das experiências diárias e não como uma tarefa mecânica. Além disso, devem estar corroboradas com questões ligadas ao contexto das crianças. Sendo assim, a tarefa proposta nesse episódio foi medir a distância da porta da sala de aula até a porta da escola, a fim de saber quantos metros os alunos caminhavam todas as vezes que faziam esse trajeto:

T01 - **Professora-pesquisadora:** Vamos lá, da porta da sala até a porta da escola, não pode entortar a fita métrica marquem aí 1 metro, tem que ser de metro, em metro.

Na sala expliquei a eles o que era o metro, o que era centímetro. Mostrei na fita métrica onde que era um metro, meio metro... Quando eles marcaram um metro, tiveram dificuldades para seguir em frente, ajudei dando dicas, mas como já tínhamos feito na sala, deixei eles pensarem como fazer. Apontei com o pé até aonde deveriam medir para que não ficasse torto.

T02 - **Professora-pesquisadora:** Vocês começam daqui até ao 100. Coloquem o dedinho para marcar.

Num intervalo de tempo, os alunos foram medindo. Eles se dividiram, uns iam medindo, outros iam anotando os metros em um caderno.

Figura 1 – Medindo com a fita métrica

Fonte: Arquivo da pesquisadora (2015)

Figura 2 – Ação mediadora da professora

Fonte: Arquivo da pesquisadora (2015)

Para eles não foi fácil, muito embora alguns já tivessem vivenciado esse momento em sala de aula. Tiveram dificuldades em demarcar os pontos para recomeçar a medir, mas aos poucos eles conseguiram concluir a tarefa. Os alunos ficaram à vontade para fazer as demarcações, sempre monitorados pela professora-pesquisadora. Nesse sentido, eles se sentiram autônomos e confiantes de que conseguiriam concluir a tarefa. Seguindo o mesmo pensamento, Alro e Skovsmose (2006, p.49) dizem que:

> Torna-se cada vez mais claro para nós como é importante estabelecer situações educacionais em que seja possível para os alunos buscarem uma aproximação e estabelecer uma "cultura" de sala de aula na qual os alunos realmente desejem realizar aproximações. Isso significa criar espaço para que os alunos se tornem condutores do próprio processo educacional. (Destaque do original).

Foi perceptível a motivação dos alunos para participar da tarefa, pois se sentiram parte do processo de ensino e aprendizagem. Sem o trabalho deles, não conseguiríamos chegar ao objetivo da tarefa, isso ficou marcado nas vídeogravações. Nelas pudemos perceber o cuidado que eles tinham para não realizar a tarefa com equívocos, para não voltar à estaca zero.

Um dos equívocos da professora-pesquisadora foi de não explicar melhor que a referência que temos na fita métrica, ou na régua, é a partir do número zero, mesmo que tenha sido uma explicação superficial, de somente mostrar *vocês começam daqui até ao 100*, T02. A professora deveria ter explicado melhor antes de iniciar a tarefa, afirmando que temos o zero como marco inicial embora ele não se faça presente na fita métrica, mas mantém sua posição de referência para iniciar o sistema de medidas. Talvez por esse motivo, os alunos tiveram dificuldade para realizar a atividade.

T03 - **Professora-pesquisadora:** Pronto, vamos calcular…Quantos metros a gente somou, daqui da porta até lá na entrada da escola. Quantos metros tem aí Ícaro? Soma, vamos contar!

T04 - **Ícaro**: Quarenta... olha no caderno.

T05 - **Professora-pesquisadora:** Ah, pera aí, um metro, mais quanto?

T06 - **Ícaro**: Mais um, mais 40.

T07 - **Professora-pesquisadora:** Mais 40, vamos somar esse aqui primeiro: um metro mais um metro: dois, mais 40: dois metros e quarenta né?

- Vamos somar agora quantos "um" metro foi daqui até lá. Vai lá Ícaro, conta daqui Ó. (Apontei até aonde a gente ainda não tinha contado)

T08 - **Ícaro**: Um, dois, três, quatro, cinco, seis....

(Contou até quarenta e quatro metros)

T09 - **Professora-pesquisadora:** (Anotando no quadro) quarenta e quatro metros, mais quantos centímetros aí Ícaro?

T10 - **Ícaro**: Dezessete.

T11 - **Professora-pesquisadora:** Como se escreve o dezessete aqui? Na casa das dezenas e unidades. Certo! Soma agora aqui Ícaro.

Nesse momento, o Ícaro faz as continhas no quadro.

T12 - **Professora-pesquisadora:** Deu quantos metros?

T13 - **Francisco:** 46 e 57 centímetros.

T14 - **Professora-pesquisadora:** Deu 46 metros e 57 centímetros. A gente anda todo dia, ou daqui pra lá ou de lá pra cá: 46,57 centímetros

Enquanto anoto no quadro, o Marcelo dá um grito: "Nãaaaaao, é muita coisa!"

T15 - **Professora-pesquisadora:** Todo dia quando a gente vem, a gente caminha 46 metros e 57 centímetros. Será se já chegou a um quilometro?

T16 - **Fabiano:** Nunca

T17 - **Professora-pesquisadora:** Não, por que gente?

T18 - **Francisco**: Por que o quilometro é uma rua!

T19 - **Professora-pesquisadora:** Um quilômetro é quantos metros?

T20 - **Fabiano**: Um quarteirão.

T21 - **Francisco:** Mil!

T22 - **Professora-pesquisadora:** Cem?

T23 - **Francisco:** Mil.

T24 - **Professora-pesquisadora:** Hãm?

T25 - **Fabiano:** É cem, é cem.

T26 - **Professora-pesquisadora:** Um quilômetro é mil metros. (Certificando-me no livro) Então, tá é longe de um quilômetro. A gente anda 46 metros e 57 centímetros quando a gente vem, e quando a gente vai é mais esse mesmo tanto ó : (escrevo novamente no quadro os centímetros e mostrando)

T27 - **Fabiano:** Vamos ver o resultado tia?

T28 - **Professora-pesquisadora:** Vamos lá.

Figura 3 – Contando os metros

Fonte: Arquivo da pesquisadora (2015)

Figura 4 – Somando os metros

Fonte: Arquivo da pesquisadora (2015)

Analisando os dados da pesquisa, percebemos maior aprendizado por parte da professora-pesquisadora do que dos alunos, pois durante a aula, revendo os vídeos, observamos muitos equívocos: palavras que foram ditas e que dificultaram a compreensão dos alunos e palavras que foram omitidas. Embora a professora-pesquisadora tenha apresentado alguns equívocos durante esses trechos, é notável o interesse dos alunos em saber quantos metros eles andam diariamente indo e voltando da porta da sala de aula para a porta da escola.

Ao citar os múltiplos e submúltiplos do metro: milímetro, centímetro e quilômetro, a professora está incluindo novas palavras aos conceitos matemáticos dos alunos, não com a intenção de explicá-los, mas como uma forma de introduzir esses conceitos para que eles possam ser melhor entendidos futuramente. Quando a professora questiona: *Será se já chegou a um quilômetro?* T15, observamos nos trechos 18 e 20 as compreensões dos alunos sobre a palavra quilômetro. Francisco relaciona-a com uma rua, pois para ele como um quilômetro é algo grande, bem distante, então seria assim como o comprimento de uma rua. Já Fabiano relaciona-a com um quarteirão na tentativa de dizer que é bem maior que uma rua.

Os alunos revelam uma compreensão bem próxima do conceito matemático sobre medidas de grandes extensões, os múltiplos do metro. No diálogo fica claro que o quilômetro, para eles, é bem maior do que o metro, visto que uma rua (representando o Km para um) e um quarteirão (representando o Km para outro) possuem maior distância do que o trajeto da porta da sala de aula para a porta da escola.

Reiteramos que a tarefa proposta nesse episódio é de caráter exploratório. Com a intenção de trabalhar com os alunos a unidade de medida de comprimento, a partir de uma situação diária dos alunos. Sobre isso, Lanner de Moura e Lorenzato (2001, p. 34), afirmam:

> Quando a criança é orientada pela atividade a discutir como se mede, o conceito cotidiano deixa de atuar somente como discurso cotidiano que tem forma habitual na expressão "tal coisa mede tanto" e passa a fazer parte do discurso escolar como objeto de estudo. Ao refletir sobre a questão de como se mede o comprimento de tal coisa, o conceito cotidiano cresce em direção ao conceito científico. Vai perdendo o significado restrito a um valor numérico, como o da expressão "peso 24 quilos", e assumindo o da escolha da unidade, da comparação desta com a grandeza que se quer medir, e por último, da expressão numérica desta comparação. (Destaque do original).

Nessa tarefa, os alunos puderam perceber o tamanho, o comprimento de um metro, quantos tamanhos referentes a um metro precisamos para chegar a 1km. Perceberam também, que os centímetros formam os metros, e entre outras descobertas que somente foram possíveis quando colocados em situação de confronto.

A situação construída parte das experiências cotidianas das crianças caminhando para o conceito científico, ou seja, o significado restrito a um valor numérico vai perdendo sentido e a escolha da unidade referência vai sendo essencial para o trabalho com medidas, para depois entender que a comparação da unidade com a grandeza que se quer medir é fundamental para o entendimento do uso das medidas, e por último, da expressão numérica desta comparação.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desta pesquisa foi possível perceber o quanto a educação matemática é importante e deve ser trabalhada de maneira com que os alunos também façam parte do processo. Infelizmente, muitos professores desconhecem essas práticas, assim como a professora-pesquisadora deste estudo desconhecia, mas buscou conhecimentos teóricos que fundamentassem sua prática. Foi um desafio que trouxe diversas experiências positivas, não só para os alunos.

A pesquisa possibilitou chegar a suposições sobre as noções de medida que as crianças traziam e aquelas que conseguiram elaborar em conjunto com a ação mediadora da professora-pesquisadora. Conseguimos observar que a aprendizagem é possível através das interações, pois vimos que o conhecimento passa pela mediação do outro, e o paradigma dos exercícios nas aulas de Matemática, aparentemente, foi sendo desconstruído, com a dinâmica das aulas a partir das tarefas exploratórias.

Durante a análise dos episódios, a professora descreve momentos em que acontecem (des)encontros, tanto pela pouca compreensão do conteúdo, como pela maneira com que ensina seus alunos. Desse modo, na comunicação oral, não podemos apagar palavras ditas, nem desfazer o que já foi feito. Sendo assim, devemos ter muito cuidado com o que dizemos diariamente aos nossos alunos. Com o passar dos anos, vamos adquirindo experiências profissionais em sala de aula, os conteúdos se tornam mais sólidos e bem mais compreendidos pelo professor. No caso da professora-pesquisadora, sua experiência em sala de aula não passa de dois anos. Essa turma de alunos foi sua primeira experiência.

Portanto, a pesquisa tornou-se um campo de estudo que modificou as práticas pedagógicas da professora-pesquisadora, uma vez que através das análises, a mesma constatou que é possível que os alunos aprendam quando envolvidos em um ambiente de aprendizagem matemática com tarefas exploratórias e que partam da curiosidade dos alunos, tentando chegar aos conceitos científicos; além disso, foi possível perceber que as interações dos alunos mostraram que já são capazes de produzir significados sozinhos e em grupo.

REFERÊNCIAS

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BAGNE, Juliana. **A elaboração conceitual em matemática por alunos do 2º ano do ensino fundamental:** movimento possibilitado por práticas interativas em sala de aula. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba/SP. 2012.

GALVÃO, Elizangela da Silva. **Interagir, comunicar, refletir:** ambiente de aprendizagem matemática numa perspectiva de resolução de problemas. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco. Bragança Paulista, 2014.

LANNER DE MOURA, Anna Regina. **A medida e a criança pré-escolar**. 210f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1995.

LANNER DE MOURA, Anna Regina. LORENZATO, Sergio. O Medir de Crianças Pré-Escolares.

Zetetiké. v. 9, n.º 15/16, Jan/Dez. de 2001.

LIMA, Claudia Neves do Monte Freitas de; NACARATO, Adair Mendes. A investigação da própria prática: mobilização e apropriação de saberes profissionais em Matemática. **Educação em Revista**, Belo Horizonte: v. 25, n. 02; p. 241-266, ago. 2009.

MENGALI, Brenda Leme da Silva. **A cultura da sala de aula numa perspectiva de resolução de problemas:** o desafio de ensinar matemática numa sala multisseriada. 218f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba/SP, 2011.

PONTE, João Pedro da. (Org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Lisboa: 2014.

____________. **Investigar, ensinar e aprender.** Actas do ProfMat 2003. (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM. Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e %20 aprender.pdf Acesso em: 19/ 02/ 2016

POWELL, Arthur B; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. (Trad.) Antonio Olimpio Junior. **Bolema**, Edição Especial. Ano 17, nº 21, 2004, pp. 81 a 140.

ROCHA, Érika D'Ávila de Sá. **Ambiente de aprendizagem matemática em uma turma de 3º ano do Ensino Fundamental:** Negociando conceitos sobre grandezas e medidas. 111f. Monografia (Graduação em Pedagogia) – Universidade Federal do Maranhão. Imperatriz/MA, 2016.

CAPÍTULO 4

UM ESTUDO PRELIMINAR DO MANUSCRITO MS. 189 DEDICADO À “ARITMÉTICA PRIMÁRIA” DE CHARLES SANDERS PEIRCE

Alexandre Souza de Oliveira
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP
São Paulo – SP.

Fumikazu Saito
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP
São Paulo – SP.

RESUMO: Neste artigo apresentamos um estudo preliminar do manuscrito MS. 189, parte do primeiro volume de *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*, editado em 1976 por Carolyn Eisele, em que Peirce trata do ensino de aritmética primária. O objetivo deste trabalho é buscar indícios de alguns aspectos que caracterizam a proposta peirceana sobre o processo de ensino e de aprendizagem de matemática, especialmente, da aritmética. Discorremos aqui sobre a sua proposta para introduzir a noção de número. Tal proposta aponta para questões relacionadas ao uso da nomenclatura, além de outros aspectos relacionados que apontam para os cuidados de estabelecer diálogos entre professor e aluno, entre outros elementos que deverão nortear nossas futuras investigações.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino e Aprendizagem. Aritmética. Número.

ABSTRACT: In this article we present a preliminary study of the MS manuscript. 189, part of the first volume of The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce, edited in 1976 by Carolyn Eisele, in which Peirce deals with the teaching of primary arithmetic. The objective of this work is to find indications of some aspects that characterize the Peircean proposal on the teaching and learning process of mathematics, especially arithmetic. We come here on your proposal to introduce the notion of number. This proposal points to questions related to the use of nomenclature, as well as other related aspects that point to the care of establishing dialogues between teacher and student, among other elements that should guide our future investigations.

KEYWORDS: Teaching and Learning. Arithmetic. Number.

1 I INTRODUÇÃO

Charles Sanders Peirce (1839–1914) nasceu na cidade de Cambridge, no estado de Massachutts, nos Estados Unidos da América. Proeminente estudioso de ciências, Peirce recebeu sua primeira instrução de seu pai, importante matemático naquela época, frequentou algumas escolas particulares nas cidades de Cambridge e Boston, ingressando posteriormente em Cambridge High School e em D. S. Dixwell´s School, onde se preparou para a universidade. Estudou na Universidade de Havard (1855-1859), onde graduou-se em física e em matemática, obtendo ali o título de mestre. Em 1863, cursou ainda o bacharelado em química na primeira turma que se graduou na Lawrence Scientific School, recebendo a menção *summa cum laude*. De sólida formação científica, Peirce foi ainda membro do The Coast and Geodetic Survey, primeira instituição criada pelo Governo dos Estados Unidos. Sua trajetória por essa instituição foi rápida, tornando-se em seguida membro da National Academy of Sciences e professor de lógica na John Hopkins University de 1879 até 1884. Peirce morreu em 1914 na cidade de Milford no estado de Pensilvânia, também nos Estados Unidos. (BRENT, 1998; GILLISPIE, 2007).

Peirce é muito reconhecido pela comunidade acadêmica em geral por seus estudos de semiótica. Pouca atenção, entretanto, foi dada aos seus estudos de matemática e, menos ainda, às suas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem de matemática. Assim, neste trabalho apresentamos alguns aspectos da proposta de Peirce para o ensino de aritmética com base num dos seus muitos manuscritos a esse respeito.

Os manuscritos referentes ao ensino de aritmética foram compilados por Carolyn Eisele e publicados em 1976 no primeiro volume da coleção *The New Elements of Mathematics by Charles Sanders Peirce*. Este volume traz um conjunto de sete manuscritos de Peirce que não foram publicados, nem mesmos concluídos pelo autor. O seu estudo revelou-nos interessantes aspectos referentes ao ensino de matemática naquela época. Esses manuscritos trazem diversas sugestões de Peirce para os professores de matemática, especificamente no que diz respeito ao ensino de aritmética. Apresentamos, desse modo, um estudo preliminar de um desses manuscritos, MS. 189, intitulado *Lydia Peirce's Primary Arithmetic*, com vistas a abordar o processo de ensino e de aprendizagem de aritmética primária.

Este trabalho faz parte de pesquisa de doutorado que busca exercitar o diálogo entre História da Matemática e Educação Matemática, seguindo de perto as orientações de Dias e Saito (2009), que propõem a construção de interfaces entre história e ensino por meio da articulação de dois eixos de investigação, o contexto do desenvolvimento dos conceitos matemáticos e o movimento do pensamento na formação desses mesmos conceitos, de modo a fazer emergir elementos potencialmente didáticos para o ensino de matemática.

No que diz respeito à análise do documento aqui contemplado, este trabalho tem por base as atuais tendências historiográficas da história da ciência (ALFONSO-GOLDFARB, 2008; SAITO, 2012, 2013a). Assim, este estudo contemplou as três esferas de análise: historiográfica, epistemológica e contextual (ALFONSO-GOLDFARB; WAISSE; FERRAZ, 2013a, 2013b). Por historiografia entende-se a "escrita da história". A esfera historiográfica propõe o estudo crítico das diferentes narrativas históricas relacionadas ao tema de estudo aqui considerado. A esfera epistemológica busca compreender o documento tendo como referência um conjunto de conhecimentos de uma determinada época de modo a "buscar alguns tópicos na história da matemática com vistas a compreender o processo e o movimento que conduz a construção do conhecimento matemático" (SAITO, 2013b). Pela esfera contextual, buscamos compreender o contexto no qual o documento é elaborado, tendo por base a análise de relações sociais e culturais que podem ser detectadas no próprio documento a ser analisado. Lembremos que este estudo não somente terá como princípio a observação pontual, mas também as variantes regionais e circunstanciais que os envolveram e particularizam dentro do contexto mais geral no qual pertenciam.

Com olhos críticos essas três esferas foram articuladas conjuntamente, mobilizando instrumentos específicos de análise quando requeridos. Especificamente, para este trabalho, primamos em apresentar alguns aspectos, que emergiram na esfera epistemológica, sobre a introdução da noção de número na proposta peirceana de ensino de aritmética primária.

2 I OS MANUSCRITOS DE PEIRCE SOBRE ARITMÉTICA

De acordo com Eisele (1976) os livros de matemática elementar utilizados nos Estados Unidos da América em meados do século XIX tinham fortes influências de obras francesas, tais como *Legendre´s Eleménts de géométrie* e *Traité de trigonométrie*. Contudo, o conteúdo e a proposta matemática neles apresentados refletiam muito pouco no pensamento revolucionário da matemática que estava emergindo naquele momento.

Vale a pena ressaltar que, segundo Karnal et al (2007), os Estados Unidos no final do século XIX e início do século XX passavam por constantes mudanças e desafios. O país passou, durante toda a vida de Pierce, por constantes expansões territoriais, inclusive casos de confrontos para decidir acerca de algumas competições territoriais. Assim, os Estados Unidos entraram no século XX com grande poder econômico do mundo, com uma produção industrial que superava as potencias europeias. No entanto a modernização do currículo das escolas (não somente dos Estados Unidos, como de outras nações) era de suma importância para satisfazer as novas exigências advindas do processo de modernização e urbanização naquela época. Foi nesse contexto que a educação elementar passou a ser discutida em conjunto com os temas desenvolvimento e progresso social, sendo vista como importante ao avanço da economia não só dos Estados Unidos como também de outros países.

A esse respeito, Eisele (1976) observa que Peirce teria antecipado a revisão curricular para o ensino de matemática que se tornara bastante aparente no final do século XIX e que fora muito discutida no Congresso Internacional de Matemáticos em Roma em 1908. Parte do descontentamento de Peirce frente às propostas de ensino de matemática pode ser encontrada em diferentes manuscritos. Neles notamos que Peirce procurava abranger a revisão curricular da matemática a partir do ensino primário (nos EUA, a educação primária é normalmente referida como educação elementar) com um olhar direcionado para as diferentes perspectivas.

De acordo com Eisele (1979), os manuscritos de matemática de Peirce nos apresentam não só uma estratégia educacional, mas também lançam luz sobre aspectos considerados importantes por ele para preparar os alunos no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio e ao exercício da cidadania. Para termos uma mínima compreensão das preocupações de Peirce sobre o processo de ensino e aprendizagem da matemática, realizamos um estudo preliminar do primeiro volume de *The New Elements of Mathematics*.

Este primeiro volume é composto de diferentes manuscritos que tratam de aritmética. Esses manuscritos podem ser organizados em quatro grandes conjuntos. O primeiro, referente a uma "Aritmética Primária" (*Primary Arithmetics*), o segundo à "Artimética Vulgar" (*Vulgar Arithmetics*), o terceiro, à "Aritmética Prática" (*Practical Arithmetics*) e, o quarto, à "Aritmética Avançada" (*Advanced Arithmetics*). Segundo Eisele (1976), fazem parte da "Aritmética Primária" os manuscritos MS. 189 (*Lydia Peirce's Primary Arithmetic*) e MS. 181 ((*Primary Arithmetic*), juntamente com MS. 182, que parece ser um rascunho do MS. 181, em que encontramos "Sugestões para professores" (*Suggestions to Teachers*). A "Aritmética Vulgar" para estudantes é tratada no manuscrito MS. 177 (*The Practice of Vulgar Arithmetics*) e no MS. 178 (*C. S. Peirce's Vulgar Arithmetics: its chief issues*), em que são dadas algumas orientações para professores. Os conteúdos de "Aritmética Prática" encontram-se organizados nos manuscritos MS. 167 e MS. 168. E a "Aritmética Avançada" é tratada no manuscrito MS. 186. Nele, segundo Eisele (1976), Peirce provavelmente procurou abranger a teoria dos números. Convém observar que os manuscritos MS. 178, 179 e 189 são apresentados nessa obra separadamente. Já os manuscritos MS. 167 e 168, em um único texto, assim como os manuscritos MS. 181 e 182.

É bem provável que esses manuscritos eram rascunhos de um livro sobre ensino de aritmética que, entretanto, nunca foi publicado. A esse respeito, Brent (1998) e Burch (2014) observam que esses escritos têm uma história de idas e vindas de um editor para outro, de um colaborador para o outro, e devido a questões financeiras não resolvidas, a versão completa da aritmética de Peirce nunca foi publicada. Assim, tomados em seu conjunto, esses manuscritos parecem apresentar um "esqueleto" de um livro que possivelmente poderia ser utilizado em escolas de ensino elementar daquela época.

Um dos indícios a esse respeito é encontrado numa correspondência enviada por Peirce a Edward Holden por volta de 1900. Nessa carta, Peirce escreve:

> Vou enviar-lhe os escritos Aritméticos que encontrei embora, ao olhá-los todos, eu veja que a principal parte aritmética ainda não tenha aparecido. Minha Aritmética era para ser composta de dois livros. Não adiantei muito do livro e muito provavelmente os papéis que eu lhe envio incluem tudo o que eu já fiz. Dediquei o meu trabalho

> principalmente ao primeiro livro. Eu tinha uma cópia final de uma grande parte dele, pelo menos 50 páginas de MS [...]. Todas elas em forma de diálogo entre a mãe Lydia e duas crianças, Benjamin e Eulalie. Empenhei um esforço muito grande sobre elas... Todos os escritos que lhe envio, que pertencem à Aritmética primária (*primary Arithmetics*), são assuntos que foram rejeitados. Entretanto, eles mostram o que eu estava tentando fazer e como eu propunha realizá-lo (SSMP, p. 191, 1979).

Além disso, como bem observa Hookway, os conteúdos de *The New Elements of Mathematics* dá uma amplitude sobre a matemática de Peirce pois "*Juntamente com estudos em lógica matemática e questões fundamentais, encontramos discussões sobre uma gama ampla de tópicos: esboços de livros didáticos que empregam novas ideias de como o assunto deve ser ensinado*, [...]" (HOOKWAY, 1985, p. 181).

Sobre estas novas ideias a serem ensinadas, isto é, as ideias referentes a "Aritmética Primária", não devemos perder de vista que, para Peirce, servia para preparar melhor o aluno para os ensinos posteriores, em especial começando pelo desenvolvimento de ideias básicas. Peirce considerava que esta importância era "*[...] necessária para um homem com uma boa educação escolar comum e, ao mesmo tempo, para dar aos pensamentos do estudante uma formação que pode prepará-lo para um estudo maior em matemática*". (SSMP, p.179, 1979).

Não discutiremos neste trabalho sobre a formação matemática, nem sobre a aritmética em geral. Queremos apenas apresentar alguns aspectos sobre como Peirce propunha introduzir o ensino de aritmética para as crianças. No manuscrito MS. 180, Peirce sugere um plano de trabalho para a escola em que apresenta esboço de um material destinado às escolas (aos quais cada aluno teria acesso) que servia também como um guia para os professores, que poderiam tomá-los como referência e orientação para organizar suas ações. Parte desse material é descrito no manuscrito MS.189, intitulado *Lydia Peirce's Primary Arithmetic* em *The New Elements of Mathematics.* Vale a pena ressaltar que há duas versões desse manuscrito citado. A primeira é bem menor em conteúdo em relação à segunda. Esta parece ser uma versão mais completa, uma vez que aborda as operações de multiplicação e divisão, além de introduzir às crianças ao estudo da média aritmética.

3 I O MANUSCRITO MS. 189 (*LYDIA PEIRCE´S PRIMARY ARITHMETIC*)

No manuscrito MS. 189 Peirce detecta um problema de aprendizagem das crianças no que diz respeito ao "número". A sua proposta para resolver este problema parece divergir das práticas escolares comumente adotadas naquela época. O conteúdo de seus manuscritos revela, como observa Eisele (1978, p. 178), que Peirce objetivava desenvolver a capacidade da mente, notoriamente a imaginação, a abstração e a generalização. Os métodos a serem utilizados com os alunos são lições que abordam novos elementos como: revisão do tratamento do conteúdo, articular novas ideias e método relacionando vida cotidiana do aluno. (EISELE, 1976, p. xxxiii).

No que diz respeito ao ensino de aritmética primária (MS. 189), Peirce cria uma história e situa as suas personagens - uma garotinha chamada Barbara (em uma clara referência ao silogismo clássico) e sua avó Lydia – que fala sobre números. Essa história é narrada em forma de diálogo, provavelmente para aproximar o professor de seus alunos. Peirce parece, por meio do diálogo entre Lydia e sua sobrinha Barbara, ter a intenção de ensinar contagem e as operações básicas da aritmética. Para tanto, serve-se de diferentes tipos de materiais, tais como cartões, desenhos, azulejos e feijão, para apoiar a situação de ensino-aprendizagem.

Na segunda lição (*Lesson II*), o manuscrito MS. 189 procura introduzir Barbara ao estudo da aritmética por meio da contagem através do seguinte diálogo:

> Agora, qual é o caminho certo para responder à pergunta: 'Quantas coisas há em qualquer lugar?' Você não pode me dizer, Barbara? "Para contá-los, eu acho", disse Barbara. "Correto; e é aritmética que nos ensina o caminho certo para contar. Às vezes nós temos que contar, de uma maneira e às vezes de outra maneira. Mas a primeira maneira que você deve aprender é a contagem simples, ou numerando por palavras um, dois, três, e assim por diante. Então, querida Barbara, "disse Lydia", o caminho certo para mim agora é começar por lhe ensinar o caminho certo para fazer a contagem simples e você deve ouvir atentamente e tentar aprender exatamente como numerar as coisas de modo a não cometer um erro. (MS. 189, 1976, p. 4, *tradução nossa*)

Então Lydia orienta Barbara a colocar quatro cartões, numerados de 1 a 4, sobre a mesa, todos eles voltados para baixo (Figura 1).

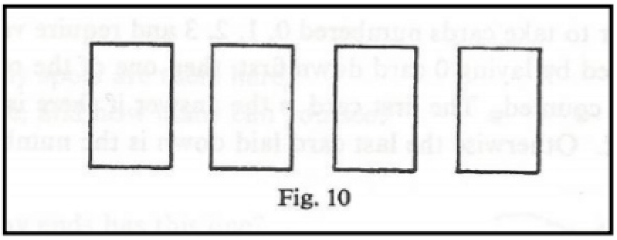


Figura 1

Cartões numerados que Lydia virou para baixo (MS 189, 1976, p. 4)

E a história continua: no momento que Lydia coloca quatro cartões alinhados e virados para baixo, entra o seu filho Charles Bem e seu sobrinho Benjie. Charles Bem pede a Lydia que ensine também Benjie. Lydia, no dia seguinte, continuou a lição e perguntou a todos: "quantos cartões estão virados para cima? ". "Certamente nenhum", responderam todos. Assim, Lydia foi virando cada cartão e fazendo sempre a mesma pergunta: "E agora, quantos cartões estão virados para cima? " (Figura 2).

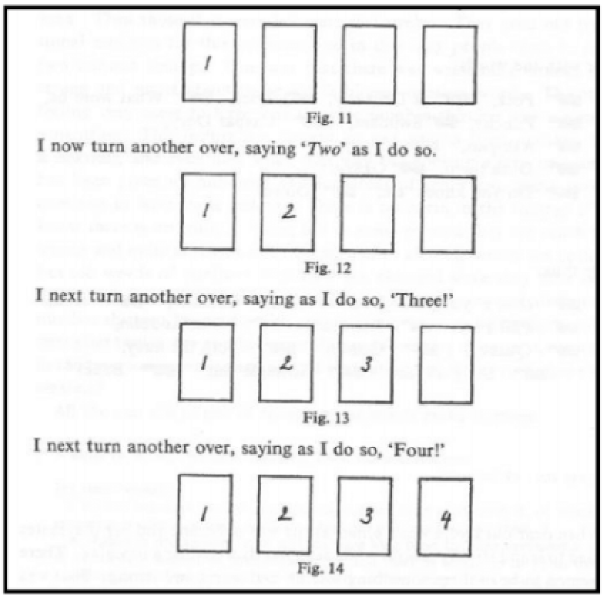


Figura 2

Contagem de cartões virados para cima (MS 189, 1976, p. 4)

Esse procedimento parece introduzir as crianças à ideia de número como uma ordem de sucessão numérica e não de quantidade numérica. Essa ideia de sucessão numérica parte do princípio que a partir do número "1" associado a primeira carta virada para cima, obtemos o sucessor por acréscimo de uma unidade ao antecessor, ou seja, a outra carta virada para cima. Esse é o que chamamos hoje de o princípio da recorrência.

Portanto, verificamos que a contagem está relacionada especificamente a cada objeto da coleção, ou seja, a um número que pertence à sucessão natural: 1,2,3.... Como por exemplo, podemos apontar para um objeto e dizer: *um*; apontar para outro e dizer: *dois*; e assim sucessivamente até esgotar os objetos da coleção; se o último número pronunciado for oito, dizemos que a coleção tem oito objetos.

Isso é reforçado no diálogo seguinte no qual Peirce utiliza um recurso conhecido por crianças em jogos de infâncias, como contagem-rima: "eeny-meeny, mony, meye" [...] a um tipo de relação biunívoca:"[...] Casa grande, casa pequena, pocilga, celeiro, ... " e assim por diante. (MS189, 1976, p. 5). Ao proceder dessa maneira Peirce buscava relacionar nomes aos números no processo de contagem, ou seja, os ordinais são meramente vocábulos anexados como nomes, um de cada vez. Assim, para estabelecer o princípio de contagem Peirce orienta colocar todas as crianças alinhadas e apontando e nomeando-as com as seguintes palavras (Figura 3):

point at them with the words:

☞ Eeny, ☞ Meeny, ☞ Mony, ☞ Méye,
☞ Tusca, ☞ Rora, ☞ Bonas, ☞ Try,
☞ Cabell, ☞ Broke a well,
☞ Wee, ☞ Woe, ☞ Whack!

Or with the words:

☞ Peek, ☞ a Doorway, ☞ Tries, ☞ What wore he,
☞ Punchy, ☞ Switches, ☞ Caspar Dory,
☞ Ash-pan, ☞ Navy,
☞ Dash them, ☞ Gravy,
☞ Do you knock 'em, ☞ Down!

Or thus:

☞ One o' you, ☞ You are a, ☞ Trickier, ☞ Ann,
☞ Phil I see, ☞ Fol I see, ☞ Nicholas John,
☞ Queevy, ☞ Quavy, ☞ Join the navy,
☞ Sting all 'em, ☞ Strangle 'em, ☞ Buck!"

Figura 3

Apontando e nomeando (MS 189, 1976, p.5)

Notemos que a intenção de Peirce é fazer as crianças aprenderem a contar coordenando e/ou associando os dedos das mãos a determinadas palavras que, mais tarde, serão traduzidas e compreendidas como números. Dessa forma, as crianças iam memorizando uma sequência de números numa série ordenada.

Essas palavras (ou vocábulos) que rimam são para Peirce "índices" que são tratados como se fossem números. O procedimento adotado aqui busca associar cada número a uma posição na ordem de contagem, como se este processo fosse natural, de modo a conduzir gradativamente as crianças para a noção abstrata de número.

De acordo com Moore (2010) quando um número é mencionado, ele é associado a ideia de sucessão, ou relação transitiva, no qual indiretamente atinge a mente da criança na medida em que o número é um vocábulo sem significado, tal como é o jargão infantil "Eeny, meeny, mony, mi". Esse movimento é feito utilizando a ideia de que o número é um "vocábulo sem sentido" (*meaningless vocable*) na contagem de coleções, ou seja,

> Um número é, em primeiro lugar, um vocábulo sem sentido utilizado na contagem de coleções. Numerais são exemplos comuns de números nesse primeiro sentido, assim como são algumas sílabas sem sentido em jogos infantis. Tais números, recitados em uma ordem padrão, são usados para arrolar uma coleção, um atributo objetivo da coleção, a que Peirce chama ***multitude***, ou quantidade coletiva (*collectional*). (PMSW, 2010, p. 113)

A respeito da sucessão de palavras utilizadas por Peirce no processo de contagem, Moore (2010) pondera ainda sobre a relação entre os vocábulos com os numerais cardinais que:

> [...] “eeny, meeny”, etc, são numerais ciganos. Eles certamente são empregados na contagem no sentido muito próximo que são empregados nos números cardinais. A única diferença essencial é que as crianças contam a rodada até o fim da série de vocábulos e volta para a rodada de objetos contados; ao passo que o processo de contagem de uma coleção põe um fim de forma exclusiva até o esgotamento da coleção, a que, posteriormente, a última palavra numeral usada é aplicada como um adjetivo. Este adjetivo exprime, portanto, nada mais do que a relação da coleção para a série de vocábulos. (PMSW, 2010, p.114, *tradução nossa*)

É bem possível que esse recurso, que podemos chamar mnemônico, utilizado por Peirce não era uma mera técnica para facilitar o cálculo, uma estratégia para dar à criança uma referência mais concreta do que viria a ser um número. Isso é reforçado e ainda pode ser visto quando Lydia, no diálogo, ensina a Barbara e a Benjie “como contar” usando seus dedos (*fingers*).

> Benjie, mostra-me a tua mão direita. Bárbara, mostra-me a tua mão direita. Bom, vocês sabem qual é a mão direita. Se vocês não o soubessem, essa seria a primeira coisa a aprender. Agora cada um de vocês segure a mão direita com a palma para cima. Essa é a palma da mão. Agora, coloque a ponta do dedo mínimo da mão esquerda para baixo em cima da palma da mão direita e dizer, ‘Um’. Bom! Agora, coloque a ponta do próximo dedo da mão esquerda para baixo em cima da palma da mão direita, juntamente com o dedo mindinho, e dizer, ‘Dois’. [...] fazê-lo, agora, mais uma vez! Agora novamente! Esta é a primeira lição de vocês. Faça isso muitas vezes hoje e amanhã, e quando tiver aprendido bem esta lição, vamos passar para os outros números. (MS 189, 1976, p. 12)

Como podemos notar nesta citação, Lydia utiliza a contagem até 5, devido a limitação dos dedos da mão [esquerda]. Assim, a intenção de Peirce, como o mesmo afirma em uma de suas cartas[1], era introduzir as crianças à aritmética por meio da “arte de usar os números arábicos” de modo a gerir os princípios da contagem. Ele sugere que a contagem deva ser executada por meio de palavras (rimas) e, gradativamente, aderindo ao processo, os numerais por meio de jogos de infância. Para Peirce, esse exercício em que encoraja as crianças a recitar rimas e fazê-las observar as sequências solidifica o processo de aprendizagem.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Notemos que nessa proposta para introduzir as crianças à aritmética, Peirce propõe um exercício que mobiliza a imaginação, a abstração e a generalização. Esse procedimento parece introduzir as crianças à ideia de número por meio da contagem. A sucessão numérica, entretanto, busca fazer com que as crianças compreendam que o número não é mera quantidade. Para tanto, ele busca relacionar nomes aos números no processo de contagem, os ordinais, são meramente vocábulos anexados como nomes, um de cada vez. Assim, para estabelecer o princípio de contagem Peirce

1 Ver a carta endereçada a Newell em 15/05/1976 em NEM1 (1976, p.7).

orienta colocar todas as crianças alinhadas, apontando e nomeando-as. Ao proceder dessa maneira, Peirce parece querer que as crianças aprendam a contar associando seus dedos a certas palavras, que mais tarde serão traduzidas e compreendidas como números. Dessa forma, a sequência de números está associada a ideia de sucessão, ou relação transitiva.

O breve estudo do manuscrito MS 189, referindo-se ao trabalho de Peirce em matemática elementar (aritmética primária) apresentado aqui, mostra criatividade no uso de nomenclatura e na abordagem além de inovação. A ênfase sobre a relação entre a estrutura da linguagem e do ensino da matemática e o cuidado de estabelecer diálogos entre professor e aluno (simbolizado por Lydia e Barbara), entre outros elementos, aguardam análise mais detalhada. Porém, todos esses detalhes parecem reforçar que, do material elaborado por Peirce, outros elementos didáticos podem ser explorados futuramente. No momento, estamos dirigindo nossas investigações nesse sentido.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. **Centenário Simão Mathias: Documentos, Métodos e Identidade da História da Ciência***. Circumscribere: International Journal for the Hitory of Science*, v. 4, p. 5-9, 2008.

ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; WAISSE, S.; FERRAZ, M. H. M. **Reflexões sobre a constituição de um corpo documental para a história da ciência”.** *Acervo*, v. 26, n. 1, p. 42-53, 2013a.

_____. **From shelves to cyberspace: organization of knowledge and the complex identity of history of science***. Isis*, Chicago, v. 104, n. 3, 2013b (no prelo).

BACHA, M. L; SAITO, F*.* **Peirce e Cantor: Um estudo preliminar sobre Continuidade e Infinitesimais”.** *Revista Brasileira de História da Matemática,* v. 14, n. 28, p. 1-23, 2014.

BELTRAN, M. H. R. & F. Saito. **“História da Ciência, Epistemologia e Ensino: Uma proposta para atualizar esse diálogo”**, *in Atas do VIII ENPEC: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências / I CIEC: Congreso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciéncias.* Campinas: ABRAPEC, 2012, pp. 1-8.

BURCH, R. Charles Sanders Peirce. In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford:* Center for the Study of Language and Information (CSLI), Stanford University. URL: < http://plato.stanford.edu/entries/peirce/>. Acesso em 01 de agosto de 2016.

BRENT, J. **Charles Sanders Peirce, A Life.** Bloomington: Indiana University Press, 1998.

DIAS, M. S; SAITO, F. **Interface entre História da Matemática e Ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica.** In*: Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Brasília: SBEM, 2009.

EISELE, C. Peirce´s Philosophy of Mathematical Education*.* In: MOORE, E. C.; ROBIN, R. (eds.). Studies in the Philosophy of Charles Sanders Peirce, Second Series. Amberst: University of Massachusetts Press, 1979. p. 51-75.

EISELE, C. Studies in the scientific and mathematical philosophy of Charles S. Peirce. The Hague: Mouton, 1979, p.177-200.

GILLISPIE, C. C. Dicionário de biografias científicas. Trad. Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007. 3v.

HOOKWAY, C. (1985). **Peirce.** London: Routledge.

KARNAL, L. et al. História dos Estados Unidos: das origens ao século XXI. São Paulo: Editora Contexto, 2007.

PEIRCE, C. S. The New Elements of Mathematics. Vol. I. Edited by C. Eisele. The Hague: Mouton Publishers, 1976.

SAITO. **History of Mathematics and History of Science: Some remarks concerning contextual framework.** Educação Matemática Pesquisa, v.14, n. 3, p. 363-385, 2012.

___. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas (resenha crítica).** Revista brasileira de história da matemática, v. 13, n. 26, p. 85-94, 2013a.

___. **'Continuidade´ e `descontinuidade´: o processo da construção do conhecimento científico na História da Ciência.** *Educação e Contemporaneidade. Revista da FAEEBA*, v. 22, n. 39, p. 183-194, 2013b.

WEISS, P. **Biography of Charles S. Peirce.** In: Dictionary of American Biography, v. 14, p. 398-403, 1934.

CAPÍTULO 5

A TABUADA NAS ESCOLAS PAROQUIAIS LUTERANAS DO SÉCULO XX NO RIO GRANDE DO SUL

Malcus Cassiano Kuhn
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense
Lajeado – Rio Grande do Sul

RESUMO: Este capítulo discute a prática da tabuada nas escolas paroquiais luteranas do século XX no Rio Grande do Sul, por meio do estudo das aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia, editadas pela Igreja Evangélica Luterana para suas escolas, na primeira metade do século passado. Em 1900, o Sínodo de Missouri, hoje Igreja Evangélica Luterana do Brasil, iniciou missão nas colônias alemãs gaúchas, fundando congregações religiosas e escolas paroquiais. Estas escolas estavam inseridas num projeto comunitário e missionário que buscava ensinar a língua materna, Matemática, valores culturais, sociais e, principalmente, religiosos. Fundamentando-se na história cultural, verificou-se a presença da pequena tabuada nas edições da Primeira Aritmética, com a apresentação de regras práticas para decorar a mesma, exercícios com elementos concretos e o desenvolvimento da multiplicação como uma soma de parcelas iguais. Nas demais edições, a pequena tabuada é retomada, observando-se exercícios que avançam até a tabuada de 19, além da tabuada com números romanos e frações. Mesmo que essas aritméticas tenham sido editadas num período marcado pelo movimento da Escola Nova no Brasil e, que algumas atividades para o estudo da tabuada estejam alicerçadas no método intuitivo, as mesmas ainda refletem a tradição pedagógica de memorização da tabuada.

PALAVRAS-CHAVE: História da Educação Matemática. Tabuada. Pedagogia de Memorização. Livros de Aritmética. Escolas Parquiais Luteranas.

ABSTRACT: This chapter discusses the practice of operations tables in the Lutheran parochial schools of the 20th century in Rio Grande do Sul, through the study of the arithmetic of the Order and Progress series and of the Concordia series, edited by the Lutheran Church for their parochial schools in the first half of the past century. In 1900, the Missouri Synod, today Evangelical Lutheran Church of Brazil, began mission in gaucho German colonies, founding religious congregations and parochial schools. These schools were included in a missionary and community project that sought to teach the mother tongue, mathematics, cultural, social and especially religious values. Basing on the cultural history, it verified the presence of small operations tables on the editions of the First Arithmetic, with the presentation of practical rules to decorate the same, exercises

with concretes elements and the development of the multiplication as a sum of equal installments. In the other editions, the small operations tables is resumed, observing exercises that advance until the multiplication table of 19, beyond of operations tables with Roman numerals and fractions. Even that these arithmetic have been edited in a period marked by the movement of the New School in Brazil and, that some activities to study the operations tables are grounded in intuitive method, they still reflect the pedagogical tradition of memorizing the operations tables.
KEYWORDS: History of the Mathematics Education. Operations Tables. Memorizing Pedagogy. Arithmetic Books. Lutheran Parochial Schools.

1 I INTRODUÇÃO

Este capítulo se propõe a discutir propostas de ensino relacionadas com a prática da tabuada nas escolas paroquiais luteranas do século XX no Rio Grande do Sul – RS, por meio do estudo das aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia, editadas pela Igreja Evangélica Luterana do Brasil – IELB – para suas escolas. Aborda-se essa temática porque a tabuada era ensinada como uma parte essencial da aritmética elementar naquela época, sendo associada à memorização de operações aritméticas e, em especial, da multiplicação.

Conforme Prost (2008), os fatos históricos são constituídos a partir de traços deixados no presente pelo passado. Assim, a tarefa do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para constituir os fatos. Como a temática investigada se insere na História da Educação Matemática no RS, busca-se na história cultural o suporte para discussão. Certeau (1982) define o fazer história, no sentido de pensar a história como uma produção. Para o autor, a história, como uma produção escrita, tem a tripla tarefa de convocar o passado que já não está em um discurso presente, mostrar as competências do historiador (dono das fontes) e convencer o leitor. O trabalho do historiador, de acordo com Certeau (1982), é fazer um diálogo constante do presente com o passado, e o produto desse diálogo consiste na transformação de objetos naturais em cultura.

Julia (2001) define a cultura escolar como um conjunto de normas que estabelecem conhecimentos a ensinar e condutas a inspirar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos. Então, o estudo da cultura escolar instiga a busca pelas normas e finalidades que regem a escola, a avaliação do papel desempenhado pelo professor e a análise dos conteúdos ensinados e das práticas escolares. Chervel (1990) considera importante o estudo da cultura escolar para a compreensão dos elementos que participam da produção/elaboração/constituição dos saberes escolares e, em particular, da matemática escolar e sua história.

De acordo com Valente (2007), pensar os saberes escolares como elementos da cultura escolar, realizar o estudo histórico da matemática escolar, exige que se devam considerar os produtos dessa cultura do ensino de Matemática, que deixaram traços que permitem o seu estudo, como as aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia, principais fontes documentais desta investigação.

Precedendo a discussão da prática da tabuada nas escolas paroquiais luteranas do século XX no RS, apresenta-se uma breve caracterização dessas escolas paroquiais.

2 I AS ESCOLAS PAROQUIAIS LUTERANAS DO SÉCULO XX NO RS

No Brasil, os princípios cristãos de Lutero, se fizeram presentes, a partir de 1824, com a vinda das ideias luteranas através dos primeiros imigrantes alemães. Lutero traçou princípios gerais sobre a educação, os quais se fundamentaram na Bíblia. “A premissa fundamental é de que a Bíblia ensina que Deus criou o universo e mantém, governa e sustenta toda a criação, sendo o homem a obra máxima da criação” (LEMKE, 2001, p. 34).

Nesta perspectiva luterana, o Sínodo Evangélico Luterano Alemão de Missouri, atualmente IELB, iniciou missão nas colônias alemãs do RS, em 1900, fundando congregações religiosas e escolas paroquiais. De acordo com estudos realizados por Kuhn (2015), os missourianos não somente cuidaram da formação de pastores como também de professores que atuassem de acordo com a filosofia educacional missouriana, para que as escolas paroquiais atingissem seus objetivos como agência missionária e de educação geral.

Os egressos das escolas paroquiais luteranas gaúchas tinham amplo conhecimento da Bíblia e uma formação consistente de crenças e valores cristãos tradicionais que enfatizavam a importância do relacionamento com Deus e com outras pessoas. Tinha-se a preocupação pedagógica para que a espiritualidade fosse vivida no dia a dia e não se reduzisse a ritos religiosos.

> Numa escola paroquial, o professor, além das matérias seculares, exigidas pelas leis do Estado, antes de tudo, ensinava a religião. O ensino diário de todas as matérias e de toda a educação deveria estar sob a influência da Palavra de Deus. Numa escola cristã reinava um espírito cristão, e os alunos não estavam em perigo de aprender coisas que não condiziam com a Palavra de Deus e a disciplina cristã (WARTH, 1979, p. 195).

Portanto, as escolas paroquiais luteranas estavam inseridas num projeto missionário e comunitário que buscava ensinar a língua materna, Matemática, valores culturais, sociais e, principalmente, religiosos (KUHN, 2015). Tinham uma responsabilidade para com a comunidade no sentido de, junto e com ela, promover o crescimento e o desenvolvimento pessoal de todos que a compõe, focando a cidadania. Se a escola formasse o ser humano com postura ética e moral exemplar, este poderia promover transformações sólidas em seu contexto social e seria um verdadeiro colaborador na seara de Deus e para o governo do mundo. As escolas paroquiais luteranas gaúchas foram assim caracterizadas por Weiduschadt (2007):

> As escolas eram organizadas de forma multisseriada. As turmas eram compostas de 20 a 40 alunos. Na maioria das vezes, o pastor da comunidade era, ao mesmo tempo, professor. A comunidade sustentava a estrutura física e mantinham o professor da escola. O prédio era muitas vezes o mesmo local do templo. No início da formação das comunidades o ensino doutrinário e pedagógico era ressaltado e sua suplementação implicava questões econômicas e culturais para a implementação. O projeto escolar dentro da comunidade religiosa era marcante, a orientação e a obrigação de os pais enviarem os filhos à escola eram quase obrigatórias, com sanções econômicas e morais, caso não concordassem (WEIDUSCHADT, 2007, p. 166-168).

O Sínodo de Missouri também tinha uma preocupação acentuada em relação aos recursos didáticos usados nas escolas paroquiais, pois este material era escasso e a dificuldade era grande em manter um ensino planificado e organizado. De acordo com Weiduschadt (2007, p. 41), "os livros usados nas escolas paroquiais e utilizados pelos alunos foram produzidos pelas instituições religiosas com objetivo de formar e moldar as condutas e as práticas ao fazer a escolarização das comunidades". Assim, por meio dos livros didáticos, como as aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia, as escolas paroquiais luteranas gaúchas conseguiram desenvolver uma educação integral cristã em todas as disciplinas. Nestas escolas, conforme Lemke (2001, p. 80), "o ensino da Palavra de Deus, através da Bíblia, ficava em primeiro lugar, e as demais disciplinas complementavam a educação para servir no mundo".

3 I A TABUADA NAS ESCOLAS PAROQUIAIS LUTERANAS GAÚCHAS DO SÉCULO XX

De acordo com Kreutz (1994), o currículo das escolas paroquiais estava organizado de forma que as crianças aprendessem o essencial para o bom entrosamento na vida das comunidades rurais, tanto sob o aspecto religioso e social quanto do trabalho. Com relação ao ensino da Matemática nas escolas paroquiais missourianas, Lindemann (1888) afirma que:

> Nas classes iniciais, não importa muito a aritmética escrita, mas que as crianças entendam intuitivamente a ideia dos números e do sistema decimal. Nos primeiros anos de escola será suficiente que as crianças compreendam os números de 1 a 1000 corretamente, saibam ler e escrever os números e executar os cálculos básicos envolvendo as quatro operações. Nos anos seguintes, devem aprender as quatro operações com todos os números e também os números decimais. Mais adiante, aprendem as frações comuns, unidades de medida, cálculos com preços e percentagem e a solução de tarefas geométricas simples. O treino e memorização de tabelas com unidades de medida, de pesos e moedas devem ser realizadas mais no final da escolarização (LINDEMANN, 1888, p. 51, tradução nossa).

As ideias de Lindemann refletem o uso do método intuitivo de Pestalozzi – a educação deveria começar com a percepção de objetos concretos – para o ensino da Matemática, o qual também foi empregado nas escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX pelos pastores/professores vindos dos Estados Unidos e por aqueles formados, posteriormente, no Seminário Concórdia – instituto pedagógico-teológico que atuou na formação de pastores e de professores paroquiais para IELB – de Porto Alegre/RS.

Logo, das escolas paroquiais saíram gerações e mais gerações de agricultores e de outros profissionais equipados com uma admirável habilidade no cálculo escrito e, principalmente, no cálculo mental. Essas habilidades também são destacadas nas considerações de Schüler (2014, *apud* KUHN, 2015), sobre as aulas de Matemática na escola paroquial luterana, conforme descrito a seguir:

> Todos tinham que recitar a tabuada em conjunto durante 5 minutos diariamente. Ou ainda, o professor indicava com o dedo o aluno que tinha que recitá-la em voz alta. Quem não acompanhava recebia o castigo de se ajoelhar em grãos de milho. [...] Para multiplicar e dividir era preciso saber as regras de cor, as quais eram cobradas naqueles 5 minutos diários. Com a simplificação de frações (simplificar = simples ficar) aprendia-se a dividir. Faziam-se brincadeiras com a tabuada do 9 (ordem crescente e ordem decrescente, comparando os resultados):

1 x 9 = 09	10 x 9 = 90
2 x 9 = 18	9 x 9 = 81
3 x 9 = 27	8 x 9 = 72
4 x 9 = 36	7 x 9 = 63
5 x 9 = 45	6 x 9 = 54
6 x 9 = 54	5 x 9 = 45
7 x 9 = 63	4 x 9 = 36
8 x 9 = 72	3 x 9 = 27
9 x 9 = 81	2 x 9 = 18
10 x 9 = 90	1 x 9 = 09

> Aprendia-se até a tabuada do 12. [...] (SCHÜLER, 2014, *apud* KUHN, 2015, p. 255-256).

De acordo com Weiduschadt (2007), o ensino da Matemática nas escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX era muito valorizado:

> Pela necessidade de trabalho e para ser usada na vida cotidiana a matemática era muito valorizada. O ensino da matemática era difundido, pois, a criança necessitava ter domínio desse conhecimento para poder usar no dia a dia. Aprendiam os conceitos elementares e práticos da matemática. Em relação à economia eles precisavam aprender fundamentos básicos de matemática para que fosse permitido negociar seus produtos agrícolas (WEIDUSCHADT, 2007, p. 195).

No ensino da Matemática, segundo Kreutz (1994), a prioridade eram as operações básicas que pudessem ser feitas mentalmente, nas circunstâncias concretas da vida agrária, seja na forma, como no conteúdo. Por isso, dava-se ênfase aos *Kopfrechnungen* (cálculos feitos mentalmente), já que na vida agrícola a pessoa teria que calcular, com frequência, sem ter o papel e lápis à mão. O próprio título de um dos manuais usados nesta disciplina, o *Praktische Rechenschule* (o ensino prático da matemática), de Otto Büchler, reflete este entendimento.

Ressalta-se que até mais ou menos 1932, predominava o ensino tradicional no Brasil. De 1932 até 1960, os alunos sofreram as influências do evolucionismo e do pragmatismo, período denominado de Escola Nova. É importante considerar que, neste período, outros métodos de ensino, além do intuitivo, circulam e apresentam abordagens diferentes para aritmética, em especial para a tabuada. Neste sentido, destacam-se os estudos de Almeida e Leme da Silva (2014) e Rodrigues (2015).

De acordo com Rodrigues (2015), enquanto no ensino ativo o manuseio de coisas era o método apresentado ao aluno para interiorização e concretude da tabuada, na renovação educacional, a escola ativa se estrutura no formato da escola, na aquisição de materiais e manuais específicos, nos testes psicológicos/pedagógicos para aquisição e na avaliação da eficiência do ensino. O discurso da escola ativa traz de volta a memorização, mas agora precedida da interiorização dos conceitos numéricos que passam pelo manuseio dos materiais concretos (tabuinhas, tornos, contador mecânico, etc.), na abstração e raciocínio matemático. O memorizar da tabuada é entendido como necessário para a criança resolver questões cotidianas, problemas do dia a dia, dando agilidade para o cálculo aritmético, sem menosprezar a necessidade do entendimento significativo, referindo-se, àquela época, à multiplicação como uma soma de parcelas iguais.

Conforme Almeida e Leme da Silva (2014), entre as décadas de 1930 e 1940, a educadora Alfredina de Paiva Souza reafirmou a necessidade de decorar a tabuada, mas diferentemente do método tradicional, em que a tabuada era decorada pela ordem crescente dos números, indicou o estudo das tabuadas por combinações divididas em ordem de dificuldade, referenciando ainda a necessidade de exatidão nos resultados e organização de testes de velocidade. Seria o estudo das tabuadas das quatro operações elementares por meio das combinações de cada operação, agrupando-as em fileiras verticais, de modo que as combinações, consideradas mais difíceis, ficassem na região central da cruz formada pela disposição horizontal e vertical das mesmas. A proposta desenvolvida por Alfredina resultou de pesquisas baseadas em testes e conhecimentos científicos desenvolvidos por psicólogos como Thorndike e Clapp.

Os primeiros trinta anos de existência das escolas paroquiais luteranas no estado gaúcho foram marcados pela carência de materiais didáticos e pela progressiva adoção dos quatro manuais de Büchler, tanto em alemão, quanto em português, para as aulas de Matemática. No periódico *Unsere Schule* - Nossa Escola - (ago. 1933, p. 6, tradução nossa), afirma-se que “os livros de aritmética de Büchler (editora Rotermund) são usados na maioria das nossas escolas e que a mesma editora lançou recentemente um novo manual: meu livro de contas, por W. Nast e L. Tochtrop”. Porém, na mesma edição, este manual é analisado criticamente, apontando-se a necessidade de uma edição moralmente e educacionalmente correta, com uso de princípios pedagógicos modernos e adaptada às condições nacionais.

Por isso, o Sínodo de Missouri começou a produzir seus próprios livros de aritmética na década de 1930. A Casa Publicadora Concórdia de Porto Alegre/RS editou e publicou o material didático específico para as escolas paroquiais luteranas. Para as aulas de Matemática, foram publicadas duas séries: a série Ordem e Progresso, lançada na década de 1930, pela divulgação feita no periódico *Unsere Schule*, e a série Concórdia, lançada na década de 1940, conforme os exemplares encontrados no Instituto Histórico da IELB em Porto Alegre.

A série Ordem e Progresso e a série Concórdia são compostas por três aritméticas voltadas para o ensino da Matemática nos primeiros anos de escolarização. Da série Ordem e Progresso, localizaram-se, também no Instituto Histórico da IELB, a Primeira Aritmética e a Terceira Arithmetica. Enquanto que, da série Concórdia, localizaram-se uma edição da Primeira Aritmética, duas da Segunda Aritmética e uma da Terceira Aritmética. Não foi localizada a Segunda Aritmética da série Ordem e Progresso. No Quadro 1 se apresentam as seis aritméticas analisadas neste estudo, a partir dos fundamentos teórico-metodológicos da história cultural.

Obra	Série	Data	Autor	Páginas
Primeira Aritmética	Ordem e Progresso	[193-]	Prof. Frederico Strelow	64
Terceira Arithmetica	Ordem e Progresso	[193-]	Sem autoria declarada	143
Primeira Aritmética	Concórdia	[194-]	Otto A. Goerl	68
Segunda Aritmética	Concórdia	[194-]	Otto A. Goerl	84
Segunda Aritmética	Concórdia	1948	Sem autoria declarada	96
Terceira Aritmética	Concórdia	1949	Sem autoria declarada	143

Quadro 1 – Aritméticas analisadas

Fonte: Série Ordem e Progresso e série Concórdia.

Observa-se que três aritméticas possuem autoria declarada (professor paroquial e pastor/professor paroquial, respectivamente), porém, há indícios de que os autores das demais obras também tenham sido professores das escolas paroquiais luteranas, devido ao registro encontrado no periódico *Unsere Schule*: “o Sínodo decidiu que será editado um trabalho completo de aritmética. Os professores Frederico Strelow, Albert Brückmann e Max Öhlwein foram contratados para realizar o trabalho” (UNSERE SCHULE, mar./abr. 1934, p. 14, tradução nossa). Verifica-se ainda que o número de páginas de cada livro aumenta conforme o nível de escolarização primária e que as duas edições da Terceira Aritmética têm o mesmo número de páginas (143), abordam as mesmas unidades de estudo e exercícios, com a mesma distribuição de páginas para cada conteúdo no livro, havendo apenas variações na ortografia de palavras e na representação de unidades de medida e do sistema monetário. Esta é a principal alteração observada nas duas edições, pois até 31 de outubro de 1942, a moeda brasileira era denominada réis, e a partir de 1º de novembro de 1942 entrou em vigor o cruzeiro (Cr$). Não se pode informar a quantidade de exemplares publicados de cada edição, pois esta informação não foi encontrada. Ressalta-se que as aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia foram editadas com base em princípios morais e educacionais idealizados pela IELB.

4 I A TABUADA NAS ARITMÉTICAS EDITADAS PARA AS ESCOLAS PAROQUIAIS LUTERANAS GAÚCHAS DO SÉCULO XX

Considerando-se as aritméticas editadas pela IELB para suas escolas no RS e investigadas nesta pesquisa histórica, verificou-se que o estudo da pequena tabuada acontece, principalmente, nas duas edições da Primeira Aritmética.

A Primeira Aritmética da série Ordem e Progresso enfatiza o estudo da numeração até 100. O estudo dos números de 0 a 100 inicia com a numeração de 0 a 10, explorando o significado de quantidades até 10 e as operações de adição e subtração, evidenciando-se o emprego do método intuitivo no ensino do significado de número. Depois, amplia-se o estudo com os números até 100, envolvendo a escrita em ordem crescente e decrescente dos números e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. A existência de inúmeras propostas de cálculos orais e por escrito com o algoritmo na horizontal, envolvendo as quatro operações com números naturais até 100, refletem uma tradição pedagógica de memorização (VALENTE; PINHEIRO, 2015).

A proposta de estudo inicial é praticar as multiplicações usando o contador mecânico (ábaco), mostrado na Figura 1.

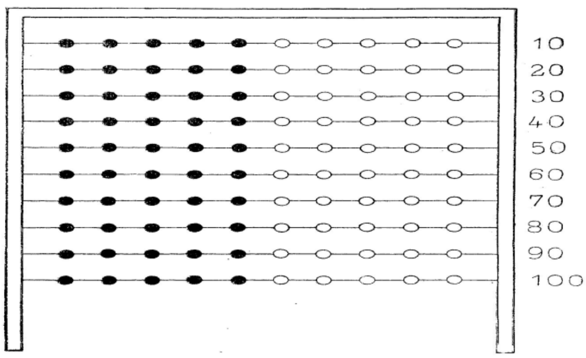


Figura 1 - O contador mecânico

Fonte: STRELOW, [193-], p. 38.

A Figura 1 apresenta o ábaco como um recurso a ser utilizado para estudo das tabuadas de multiplicar, sendo a proposta desenvolver as tabuadas de 2 até 10 usando este recurso material. O uso do ábaco nas aulas de Matemática das escolas paroquiais é enfatizado nas palavras de Rambo (1994, p. 157): “devido a sua importância na alfabetização dos números e dos cálculos, o ábaco fazia parte obrigatória dos móveis e utensílios de qualquer escola, mesmo as mais pobres e mais afastadas”.

Em seguida, o autor da Primeira Aritmética traz uma proposta de estudo para decorar as tabuadas de multiplicar, conforme mostrado no Quadro 2.

Exemplo: A tabuada de 2.				
1) Pela ordem crescente	2) Pela ordem decrescente	3) Salteando crescente	4) Salteando decrescente	5) Salteando misto
1 x 2 =	10 x 2 =	1 x 2 =	10 x 2 =	1 x 2 =
2 x 2 =	9 x 2 =	3 x 2 =	8 x 2 =	10 x 2 =
3 x 2 =	8 x 2 =	5 x 2 =	6 x 2 =	2 x 2 =
4 x 2 =	7 x 2 =	7 x 2 =	4 x 2 =	9 x 2 =
5 x 2 =	6 x 2 =	9 x 2 =	2 x 2 =	3 x 2 =
6 x 2 =	5 x 2 =	2 x 2 =	9 x 2 =	8 x 2 =
7 x 2 =	4 x 2 =	4 x 2 =	7 x 2 =	4 x 2 =
8 x 2 =	3 x 2 =	6 x 2 =	5 x 2 =	7 x 2 =
9 x 2 =	2 x 2 =	8 x 2 =	3 x 2 =	5 x 2 =
10 x 2 =	1 x 2 =	10 x 2 =	1 x 2 =	6 x 2 =

Quadro 2 – Como se decora as tabuadas de multiplicar

Fonte: STRELOW, [193-], p. 50.

O Quadro 2 ilustra a proposta do livro para se memorizar as tabuadas de multiplicar, exemplificando com a tabuada de 2 e indicando os seguintes passos: 1º pela ordem crescente, 2º pela ordem decrescente, 3º salteando crescente (primeiro os fatores ímpares e depois os fatores pares, em ordem crescente), 4º salteando decrescente (primeiro os fatores pares e depois os fatores ímpares, em ordem decrescente) e 5º salteando misto (intercalando ordem crescente e ordem decrescente). Depois, propõe-se a aplicação deste procedimento com as tabuadas de multiplicar de 3 até 10, oralmente e por escrito. O exercício da pequena tabuada é indicado no programa de cálculo para o primeiro ano de escolarização e mostra a preocupação de instrumentalizar os alunos no cálculo mental, conforme afirmado por Lindemann (1888).

No Quadro 3 se apresenta uma proposta de estudo com as tabuadas denominadas, encontrada na Primeira Aritmética da série Ordem e Progresso:

1 x 2 crianças são 2 crianças	**1)** Pelo modelo dado com 3 facas.
10 x 2 crianças são 20 crianças	**2)** Pelo modelo com 4 colheres.
2 x 2 crianças são 4 crianças	**3)** Pelo modelo com 5 pratos.
9 x 2 crianças são 18 crianças	**4)** Pelo modelo com 6 cadernos.
3 x 2 crianças são 6 crianças	**5)** Pelo modelo com 7 bolinhas de jogar.
8 x 2 crianças são 16 crianças	**6)** Pelo modelo com 8 tijolos.
4 x 2 crianças são 8 crianças	**7)** Pelo modelo com 9 flores num canteiro.
7 x 2 crianças são 14 crianças	**8)** Pelo modelo com 10 caixas de fósforos num maço.
5 x 2 crianças são 10 crianças	
6 x 2 crianças são 12 crianças	

Quadro 3 – Tabuadas denominadas

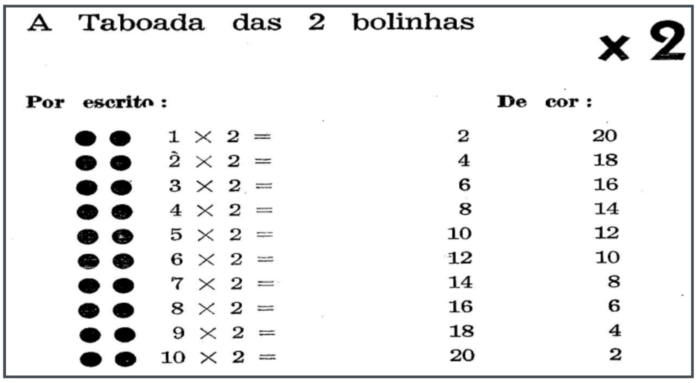
Fonte: STRELOW, [193-], p. 51.

No propósito de associar a tabuada com o cotidiano dos alunos, cada tabuada de multiplicar é exercitada com elementos ou objetos do dia a dia das crianças, conforme descrito no Quadro 3. Este procedimento está de acordo com as orientações didáticas apresentadas por Lindemann (1888) e também expostas no periódico *Unsere Schule*, na década de 1930.

Esta aritmética também apresenta uma proposta de estudo para decorar as tabuadas de dividir de 2 até 10, de forma semelhante à proposta para decorar as tabuadas de multiplicar. Ficando subentendida a ideia de que a multiplicação e a divisão são operações inversas. Os procedimentos e os exercícios propostos nesta aritmética evidenciam a preocupação em desenvolver habilidades para o cálculo mental e escrito nos alunos das escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX. Nesse sentido, concorda-se com a afirmação de Rambo (1994) de que os alunos eram submetidos a um tirocínio de cálculos na escola, tanto escritos, quanto mentais. Mesmo que sejam identificados traços do uso do método intuitivo no estudo da tabuada nesta edição da Primeira Aritmética, como a utilização do ábaco e a tabuada denominada, evidencia-se a tradição pedagógica da memorização.

A Primeira Aritmética da série Concórdia está dividida em quatro secções: I – Números de 1 a 5, com foco em contar e desenhar, escrever os números, somar e diminuir; II – Números de 1 a 10, com atenção para o significado dos números até 10 e as operações de adição e de subtração; III – Números de 1 a 20, ênfase nas operações de adição e de subtração; IV – Números de 1 a 100, explorando as dezenas, dezenas e unidades, as operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão, e a pequena tabuada. O autor desta aritmética dá maior ênfase para o método intuitivo de Pestalozzi em suas propostas de ensino.

Nesta aritmética, a pequena tabuada começa a ser desenvolvida com uma proposta de ensino que associa a operação de multiplicação por 2 com bolinhas, conforme fragmento apresentado na Figura 2:



A Taboada das 2 bolinhas **× 2**

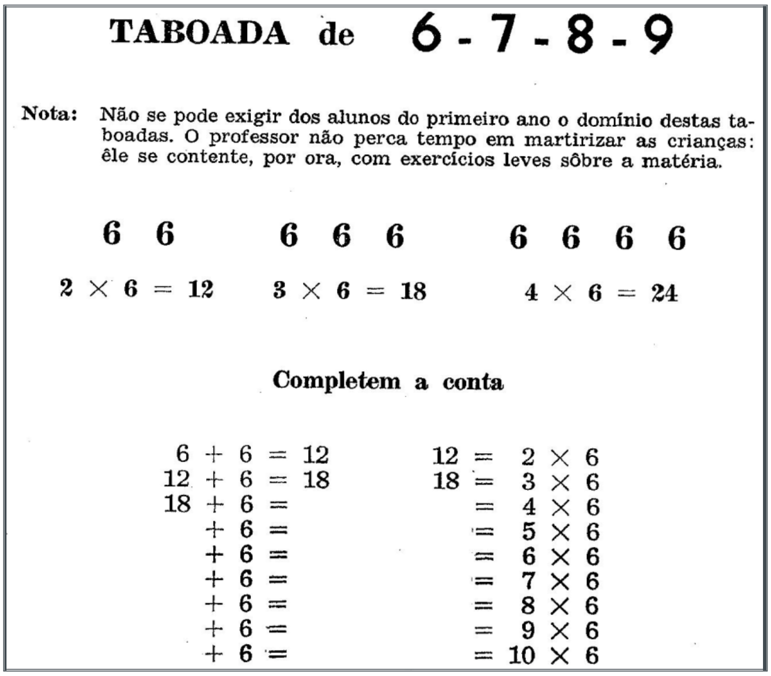
Por escrito:		De cor:	
● ●	1 × 2 =	2	20
● ●	2 × 2 =	4	18
● ●	3 × 2 =	6	16
● ●	4 × 2 =	8	14
● ●	5 × 2 =	10	12
● ●	6 × 2 =	12	10
● ●	7 × 2 =	14	8
● ●	8 × 2 =	16	6
● ●	9 × 2 =	18	4
● ●	10 × 2 =	20	2

Figura 2 – A tabuada das 2 bolinhas

Fonte: GOERL, [194-a], p. 54.

A tabuada de 2 é denominada pelo autor como *a taboada das 2 bolinhas*, associando a multiplicação por 2 com a representação de 2 bolinhas na prática da tabuada por escrito, conforme observado na Figura 2. O autor ainda propõe a repetição dos múltiplos de 2, de cor, em ordem crescente e decrescente. No estudo realizado se verificou que o autor apresenta propostas de ensino semelhantes para as tabuadas de 3, 4 e 5. Dessa forma, a Primeira Aritmética da série Concórdia propõe a prática das tabuadas de 2, 3, 4 e 5 associada com bolinhas.

Antes de explorar a tabuada de 6, o autor desta aritmética apresenta uma nota (Figura 3) que orienta os professores paroquiais para não exigirem dos alunos do 1º ano, o domínio das tabuadas de 6, 7, 8 e 9. Sugere que apenas proponham exercícios leves sobre este conteúdo:



TABOADA de 6 - 7 - 8 - 9

Nota: Não se pode exigir dos alunos do primeiro ano o domínio destas taboadas. O professor não perca tempo em martirizar as crianças: êle se contente, por ora, com exercícios leves sôbre a matéria.

6 6	**6 6 6**	**6 6 6 6**
2 × 6 = 12	3 × 6 = 18	4 × 6 = 24

Completem a conta

6 + 6 = 12	12 = 2 × 6
12 + 6 = 18	18 = 3 × 6
18 + 6 =	= 4 × 6
+ 6 =	= 5 × 6
+ 6 =	= 6 × 6
+ 6 =	= 7 × 6
+ 6 =	= 8 × 6
+ 6 =	= 9 × 6
+ 6 =	= 10 × 6

Figura 3 – A tabuada de 6

Fonte: GOERL, [194-a], p. 59.

No estudo da tabuada de 6, apresentada na Figura 3, verifica-se que o autor desenvolve a ideia de multiplicação como uma soma de parcelas iguais (TOLEDO, 1997), ou seja:

6 + 6 = 2 x 6 = 12   6 + 6 + 6 = 3 x 6 = 18   6 + 6 + 6 + 6 = 4 x 6 = 24

No estudo das tabuadas de 7, 8 e 9, o autor também desenvolve a ideia de multiplicação como uma soma de parcelas iguais. Nesta aritmética, a prática da tabuada é complementada com um exercício de escrita das tabuadas de 2 até 10.

Comparando-se as duas edições da Primeira Aritmética, aponta-se que a edição da série Ordem e Progresso, editada na década de 1930, dá maior ênfase para a prática da pequena tabuada com foco em procedimentos para os alunos decorarem a mesma (memorização). Por sua vez, a edição da série Concórdia, editada na década de 1940, procura desenvolver a compreensão da operação de multiplicação através da tabuada. Mesmo que num segundo plano o autor desta aritmética espera que os alunos memorizem a tabuada. Na sua construção, fica evidente o emprego do método intuitivo.

A Segunda Aritmética da série Concórdia de Otto A. Goerl está dividida em três secções: I – Números de 1 a 100 (recapitulação), com as operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão; II – Números de 1 a 1000, relacionando unidades, dezenas e centenas, bem como as operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão; III – Números até 10000, explorando as classes de milhares, centenas, dezenas e unidades, números pares e números ímpares, operações de adição, de subtração, de multiplicação e de divisão.

Esta edição da Segunda Aritmética associa as multiplicações e as divisões por 2, 3 até 10 com elementos concretos (método intuitivo). Em seguida, propõe a recapitulação da tabuada de multiplicação de 2 até 10, variando as ordens das multiplicações nos exercícios de forma semelhante ao apresentado no Quadro 1. Neste livro também se encontrou um exercício com a tabuada de 2 envolvendo a numeração romana: “Escrevam a tabuada de 2 em algarismos romanos. Por exemplo: I x II = II” (GOERL, [194-b], p. 37). No Quadro 4 se apresenta a resolução deste exercício proposto:

I · II = II	VI · II = XII
II · II = IV	VII · II = XIV
III · II = VI	VIII · II = XVI
IV · II = VIII	IX · II = XVIII
V · II = X	X · II = XX

Quadro 4 – Tabuada de 2 com a numeração romana

Fonte: Os autores do capítulo.

Observa-se que, para o aluno realizar este exercício, precisa saber a tabuada de 2 e conhecer os números romanos até 20.

Além de retomar a pequena tabuada, a Segunda Aritmética de Otto Goerl amplia o estudo da tabuada, conforme exemplificado no Quadro 5:

Multiplicação com dezenas e unidades: 8 x 15 = 8 x 10 + 8 x 5 = 80 + 40 = 120			
1 x 11 =	1 x 13 =	2 x 16 =	2 x 19 =
2 x 11 =	2 x 13 =	5 x 16 =	5 x 19 =
3 x 11 =	3 x 13 =	3 x 16 =	3 x 19 =
4 x 11 =	4 x 13 =	4 x 16 =	4 x 19 =
5 x 11 =	5 x 13 =	6 x 16 =	6 x 19 =
6 x 11 =	6 x 13 =	8 x 16 =	8 x 19 =
7 x 11 =	7 x 13 =	7 x 16 =	7 x 19 =
8 x 11 =	8 x 13 =	9 x 16 =	9 x 19 =
9 x 11 =	9 x 13 =	10 x 16 =	10 x 19 =
10 x 11 =	10 x 13 =		

Quadro 5 – Tabuada de 11 a 19

Fonte: GOERL, [194-b], p. 59.

Observa-se no Quadro 5 que, para fazer as multiplicações com dezenas mistas, propõe-se a decomposição da dezena mista (15) em dezena e unidades (10 + 5), fazendo-se as multiplicações separadamente (8 x 10 + 8 x 5) e somando-se os produtos parciais (80 + 40) para obter o produto final (120). Ressalta-se que o autor faz uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta ideia é aplicada no cálculo da tabuada de 11 a 19, conforme exercícios descritos no Quadro 5. Registra-se que a proposta de cálculo da tabuada de 11 a 15 é pela ordem crescente e de 16 a 19 é salteando misto e sem a multiplicação por 1. Portanto, esta Segunda Aritmética retoma a pequena tabuada e amplia o seu estudo até a tabuada de 19, reforçando-se a ideia de instrumentalização dos alunos para a realização de cálculos mentais e escritos. Apesar do uso do método intuitivo no estudo da tabuada, esta edição da Segunda Aritmética ainda traz a tradição pedagógica da memorização.

A Segunda Aritmética da série Concórdia, editada em 1948, traz como principais unidades de estudo: numeração 1 - 1000; os números até 10000; números além de 10000. Para o estudo dos números até 1000, propõe três seções: I – contar, escrever e ler os números: centenas; centenas e dezenas; centenas, dezenas, unidades; II – somar e diminuir: somar e diminuir as unidades; somar e diminuir números de dois algarismos; somar e diminuir números de três algarismos; III – multiplicar e dividir. No estudo dos números até 10000, o livro propõe um roteiro semelhante ao anterior: I – contar, escrever e ler os números; II – somar e diminuir; III – multiplicar e dividir. Para o estudo dos números além de 10000, a proposta do livro começa com a leitura e escrita de números, seguida das operações de multiplicação e divisão.

Esta edição retoma a pequena tabuada, propõe um exercício para formar a tabuada de multiplicar por 12 e 15 e outros exercícios envolvendo multiplicações por 12 e 15 salteando misto. Esses exercícios são complementados com atividades que associam uma dúzia a 12 coisas, um ano a 12 meses e uma arroba a 15 kg, como se pode observar no Quadro 6:

1) Quantos kg são: 3 arrobas? 5 arrobas?	2) Quantas coisas são: 6 dúzias, 3 dúzias + 4 coisas? 9 dúzias, 5 dúzias + 8 coisas?
3) Transformar em arrobas: 60 kg 45 kg	4) Transformar em anos: 24 meses 108 meses
5) Transformar em arrobas e kg: 70 kg 48 kg	6) Transformar em dúzias e coisas: 38 coisas 77 coisas

Quadro 6 – Multiplicar e dividir por 12 e 15

Fonte: SÉRIE CONCÓRDIA, 1948, p. 48.

Pelos exercícios apresentados no Quadro 6, acredita-se que a proposta de associar as multiplicações e divisões, por 12 e 15, com unidades do sistema de medidas tenha contribuído para os alunos desenvolverem suas habilidades de cálculo das tabuadas de 12 e 15. A dúzia era uma quantidade muito presente na vida do colono, bem como a arroba. Por isso se justifica a presença e a importância dada. Observa-se ainda que estes exercícios reforçam a multiplicação e a divisão como operações inversas. Ressalta-se que nesta aritmética somente se verificaram registros para cálculo da pequena tabuada e das tabuadas de 12 e 15. Mesmo que algumas atividades para o estudo da tabuada estejam baseadas no método intuitivo, esta edição da Segunda Aritmética também reflete a tradição pedagógica da memorização.

As principais unidades de estudo das edições da Terceira Aritmética são: frações decimais e sistema métrico; frações ordinárias; regra de três; porcentagem; porcentagem comercial; juros; razão e proporção; geometria prática. Neste livro se encontram registros relacionados à tabuada com frações, conforme mostrado no Quadro 7.

1) $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ até $10 \times \frac{2}{3} =$	2) $1 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ $2 \times \frac{5}{6} =$ até $10 \times \frac{5}{6} =$	3) $1 \times 2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ $2 \times 2\frac{1}{4} =$ até $10 \times 2\frac{1}{4} =$

Quadro 7 – Tabuada com frações

Fonte: SÉRIE CONCÓRDIA, 1949, p. 51.

O Quadro 7 apresenta uma proposta com três exercícios de tabuada com as frações ordinárias $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ e $2\frac{1}{4}$. Ressalta-se que as atividades também envolvem números mistos com a representação de frações impróprias como números mistos e vice versa. Este tipo de exercício reforça a ideia de que no ensino da Matemática nas escolas paroquiais luteranas havia uma forte preocupação com o desenvolvimento de habilidades para o cálculo mental e escrito.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

As escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX estavam inseridas num projeto missionário e comunitário que buscava ensinar a língua materna, Matemática, valores culturais, sociais e, principalmente, religiosos. Para alcançar estes objetivos, a IELB se preocupou em produzir materiais pedagógicos para suas escolas. A Casa Publicadora Concórdia, editora da IELB, publicou livros didáticos, editados com base em princípios morais e educacionais idealizados pela Igreja Luterana, os quais contribuíram para os processos de ensino e de aprendizagem nas diversas áreas do conhecimento.

A partir do referencial da história cultural, investigaram-se propostas de ensino relacionadas com a prática da tabuada nas escolas paroquiais luteranas gaúchas, analisando-se a Primeira Aritmética e a Terceira Arithmetica da série Ordem e Progresso e as edições da Primeira, Segunda e Terceira Aritmética da série Concórdia, editadas pela IELB para suas escolas, na primeira metade do século passado.

Verificaram-se propostas de estudo da pequena tabuada, principalmente, nas edições da Primeira Aritmética, com a apresentação de regras práticas para memorizar a mesma, exercícios com elementos concretos (tabuadas denominadas) e o desenvolvimento da multiplicação como uma soma de parcelas iguais. Comparando-se as duas edições da Primeira Aritmética, aponta-se que a edição da série Ordem e Progresso, editada na década de 1930, dá maior ênfase aos procedimentos para os alunos decorarem a pequena tabuada, enquanto que a edição da série Concórdia, editada na década de 1940, procura desenvolver a compreensão da multiplicação através da tabuada.

Nas edições da Segunda Aritmética, a prática da pequena tabuada é retomada, observando-se ainda exercícios que ampliam o seu estudo para a tabuada de 19. Numa edição da Segunda Aritmética se verificou um exercício de tabuada do 2 com números romanos e nas edições da Terceira Aritmética se encontrou um exercício de tabuada com frações. O desenvolvimento da tabuada também foi associado com unidades do sistema de medidas e com operações comerciais, explorando a multiplicação e a divisão como operações inversas.

Com a cultura da prática da tabuada se desenvolveram habilidades para o cálculo mental e escrito nas escolas paroquiais luteranas gaúchas do século XX. Mesmo que as aritméticas da série Ordem e Progresso e da série Concórdia tenham sido editadas num período marcado pelo movimento da Escola Nova no Brasil e, que algumas atividades para o estudo da tabuada estejam alicerçadas no método intuitivo e na escola ativa, as mesmas ainda refletem a tradição pedagógica de memorização da tabuada.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Denis Herbert de; LEME DA SILVA, Maria Célia. Alfredina de Paiva e Souza e o Instituto de Educação do Rio de Janeiro: a vanguarda da tabuada na era dos testes. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 1, p. 48-70, 2014.

CERTEAU, Michel de. **A escrita da História**. Tradução Maria de Lourdes Menezes. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares - reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

GOERL, Otto A.. **Série Concórdia**: Primeira Aritmética. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, [194-a].

GOERL, Otto A.. **Série Concórdia**: Segunda Aritmética. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, [194-b].

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, n. 1, p. 9-43, jan./jun. 2001.

KREUTZ, Lúcio. **Material didático e currículo na escola teuto-brasileira**. São Leopoldo: Ed. UNISINOS, 1994.

KUHN, Malcus Cassiano. **O ensino da matemática nas escolas evangélicas luteranas do Rio Grande do Sul durante a primeira metade do século XX**. 2015. 466 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, ULBRA, Canoas, 2015.

LEMKE, Marli Dockhorn. **Os princípios da educação cristã luterana e a gestão de escolas confessionárias no contexto das ideias pedagógicas no sul do Brasil (1824 – 1997)**. Canoas: Ed. ULBRA, 2001.

LINDEMANN, Johann Christoph Wilhelm. **Amerikanisch-Lutherische Schul-Praxis**. 2. ed. Sant Louis: Lutherischer Concordia - Verlag, 1888.

PROST, Antoine. **Doze lições sobre a História.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

RAMBO, Arthur Blásio. **A Escola comunitária teuto-brasileira católica**. São Leopoldo: Ed. UNISINOS, 1994.

RODRIGUES, Dirce Lurdes Pires. **A tabuada em diferentes tempos pedagógicos: do ensino ativo para a escola ativa.** 2015. 83 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Saúde na Infância e Adolescência) – Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2015.

SÉRIE CONCÓRDIA: Segunda Aritmética. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, 1948.

SÉRIE CONCÓRDIA: Terceira Aritmética. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, 1949.

SÉRIE ORDEM E PROGRESSO: Terceira Arithmetica. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, [193-].

STRELOW, Prof. Frederico. **Série Ordem e Progresso**: Primeira Aritmética. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, [193-].

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática de matemática:** como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo, FTD, 1997.

UNSERE SCHULE. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, ago. 1933.

UNSERE SCHULE. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia, mar./abr. 1934.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2.2, p. 28-49, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues; PINHEIRO, Nara Vilma Lima. Chega de decorar a tabuada! – As cartas de Parker e a árvore do cálculo na ruptura de uma tradição. **Educação Matemática em Revista - RS**, Canoas, v. 1, n. 16, p. 22-37, 2015.

WARTH, Carlos Henrique. **Crônicas da Igreja**: Fatos Históricos da Igreja Evangélica Luterana do Brasil (1900 a 1974). Porto Alegre: Concórdia, 1979.

WEIDUSCHADT, Patrícia. **O Sínodo de Missouri e a educação pomerana em Pelotas e São Lourenço do Sul nas primeiras décadas do século XX**: **identidade e cultura escolar**. 2007. 255 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2007.

CAPÍTULO 6

CAMPO MULTIPLICATIVO: DIAGNÓSTICO COM ESTUDANTES DO SEXTO ANO

Janine Oliveira Mello
UERJ – Rio de Janeiro – RJ

Gabriela dos Santos Barbosa
UERJ – Rio de Janeiro – RJ

RESUMO: Este artigo tem como objetivo apresentar um estudo advindo de uma dissertação de mestrado. Nesta dissertação, obtemos ferramentas que tornaram possível responder a seguinte questão: *Como os estudantes dos anos iniciais aplicam os conceitos matemáticos pertencentes ao campo multiplicativo?* O estudo teve como foco o desempenho dos estudantes em situações problema pertencentes ao campo multiplicativo. Aplicamos um teste com 14 questões numa turma de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da periferia de Duque de Caxias, Rio de Janeiro e priorizamos para análise as questões de configuração retangular e combinatória. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Por meio da observação, foi possível constatar junto aos estudantes a dificuldade para lidar com conceitos matemáticos e resolver situações problema, muitas vezes, do seu dia a dia.

PALAVRAS–CHAVE: teoria dos campos conceituais, campo multiplicativo, ensino fundamental.

ABSTRACT: This article aims to present a study coming from a master's thesis. In this dissertation, we obtain tools that made it possible to answer the following question: How do the students of the initial years apply the mathematical concepts belonging to the multiplicative field? The study focused on the performance of students in problem situations belonging to the multiplicative field. We applied a test with 14 questions in a 6th grade elementary school class of a municipal school in the outskirts of Duque de Caxias, Rio de Janeiro, and prioritized for analysis the questions of rectangular and combinatorial configuration. This is a qualitative research, based on the Theory of Conceptual Fields by Gérard Vergnaud. Through observation, it was possible to observe with the students the difficulty to deal with mathematical concepts and to solve problem situations, often, from their day to day.

KEYWORDS: conceptual field theory, multiplicative field, elementary school.

1 I INTRODUÇÃO

Este artigo tem como objetivo discutir os resultados que fizeram parte de uma pesquisa de mestrado, já concluída, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Comunicação em Periferias Urbanas da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Ao propor esta pesquisa, tivemos como objetivo investigar que conhecimentos do campo multiplicativo as crianças expressam ao final dos anos iniciais, quando ingressam no sexto ano. Com base no acompanhamento das estratégias utilizadas por elas na resolução de situações problema do campo multiplicativo, o foco principal desta pesquisa foi analisar o desempenho dos estudantes de sexto ano em situações de configuração retangular e combinatória. Para tanto, aplicamos um teste diagnóstico numa turma de 6º ano de escolaridade de uma escola pública situada no município de Duque de Caxias, no estado do Rio de Janeiro.

Diversos autores nos alertam para a necessidade de um trabalho efetivo desde os anos iniciais que leve os alunos à compreensão das características do sistema de numeração decimal, antes da apresentação dos algoritmos propriamente dita (LERNER,1996; MANDARINO & BELFORT, 2005). A centralidade dada aos algoritmos é algo que deve merecer nossa atenção, pois o (des)uso destes vem comprometendo a construção dos conceitos pertencentes ao campo numérico por nossos alunos, permitindo-os chegar aos anos finais do Ensino Fundamental, sem terem aprimorado sua capacidade de raciocínio lógico, sem estabelecer relações pertencentes à cada ação expressa pelo sistema de numeração decimal, entre outras relações numéricas. Além disso, como afirmam Nunes ET AL (2005), os estudantes não desenvolvem a habilidade de resolver problemas e reconhecer as ideias subjacentes às operações. Com relação ao campo multiplicativo, por exemplo, isso pode ser percebido na dificuldade dos estudantes de resolver problemas que envolvam outras ações além da soma de parcelas repetidas (MAGINA, SANTOS & MERLINI, 2012).

Nesta mesma direção, Os Parâmetros Curriculares Nacionais já vinham nos alertando para a necessidade de um trabalho com os estudantes, desde os anos iniciais, que enfatize a resolução de problemas. Tal documento nos chama a atenção para o uso inapropriado de exercícios desprovidos de significados, onde o treino se torna o centro do ensino da matemática. O documento adverte ainda que:

> “O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema; o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório; aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros; o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemática” (1997, p.43).

Tendo como referência este documento, e adotando como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990,1994, 2009), que, como veremos na próxima seção, vai ao seu encontro, procuramos identificar os conhecimentos dos estudantes do sexto ano sobre o campo multiplicativo. Diagnósticos como este podem orientar o planejamento e as práticas pedagógicas dos professores no sentido de criar condições para uma aprendizagem mais significativa pelos estudantes.

2 I A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida na década de 1970, pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud. Para ele, um campo conceitual é “um conjunto de situações cujo tratamento implica esquemas, conceitos e teoremas em estreita relação, assim como representações linguísticas e simbólicas que podem ser utilizadas para simbolizá-los” (VERGNAUD, 1986, p. 75). O domínio de um campo conceitual não ocorre em dois meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos para que o aluno o domine em sua totalidade. Nessa perspectiva, um conceito não pode ser reduzido a uma definição, sobretudo se estivermos interessados em seu ensino e em sua aprendizagem. É por meio das situações a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Segundo Vergnaud (1986), um conceito está associado a terna *Situações (S), Invariantes (I) e Representações (R)*, em que S, I e R são conjuntos definidos da seguinte maneira:

> S – Conjunto das situações que tornam os conceitos significativos (combinação de tarefas).
>
> I – Conjunto dos invariantes (objetos, propriedades e os conhecimentos contidos nos esquemas).
>
> R – Conjunto das representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes e, portanto, representar as situações e os procedimentos. (ARAÚJO, 2015, p. 46)

Na sequência da terna de sustentação dos conceitos, temos os invariantes operatórios, que Vergnaud toma de Piaget, como o que sustenta a ação. Tais invariantes são elementos que compõem os esquemas, e são modelos preciosos para se descrever a conduta do sujeito, e os diferencia em duas categorias: conceitos em ação e teoremas em ação. “Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação” (VERGNAUD, 2009, p.23).

Os conceitos em ação não são verdadeiros ou falsos, eles são apenas pertinentes ou não para a situação, enquanto que os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos. Sendo assim, um dos momentos de aprendizagem dos alunos se dá a partir da desestabilização de invariantes operatórios falsos, pois vivenciando momentos de desequilíbrio e conflitos, entendemos que os alunos passam para um nível de conhecimento mais elaborado.

Dessa maneira, sendo os invariantes um dos componentes do esquema, a sua desestabilização e posterior reorganização proporcionam a ampliação dos esquemas do sujeito.

> O esquema é uma totalidade dinâmica funcional, uma organização invariante de conduta, quanto a uma certa classe de situações. Essa organização comporta objetivos e esperas, regras de ação, tomada de informação e de controle e é estruturada por invariantes operatórios, isto é, conhecimentos adequados para selecionar a informação e processá-la (conceitos-em-ato e teoremas-em-ato) (VERGNAUD, 2003b, p.66).

Por fim, dando sequência a terna SIR, falamos da representação simbólica, onde Vergnaud (1981) nos diz que tal representação nem reflete toda a realidade, assim como não é semelhante à mesma. Mas tal representação simbólica não seria compreendida se não nos fosse apresentada uma imagem da realidade que nos fizesse determinar ações para provocá-las ou evitá-las.

Para Vergnaud, a representação não é única e sua imagem da realidade também não, como diz no trecho a seguir:

> 1) Não existe apenas uma representação, mas múltiplas representações, de formas diferentes e de níveis diferentes; 2) Existem homomorfismos não somente entre a realidade por um lado e as representações por outro, mas também entre as diferentes formas de representação (entre representação por imagem e linguagem, entre representação geométrica e representação algébrica, etc.) (VERGNAUD, 1981, p.201).

Assim, em nossas observações e análises sobre as resoluções dos estudantes nas situações problema propostas no teste diagnóstico, procuramos valorizar todo tipo de representação, desde aquelas mais semelhantes à empregada pela matemática formal, até aquelas que envolvem desenhos, tabelas, sistemas de setas, entre outros.

3 I CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

O campo conceitual multiplicativo, ou simplesmente, as estruturas multiplicativas, é um conjunto de situações ou problemas que envolvem os conceitos de multiplicação e/ou divisão com teoremas que respaldam tais situações. Entre tais conceitos, podemos destacar: proporção simples e proporção múltipla, relação escalar direta e inversa, quociente e produção de dimensões, combinação linear, fração, número racional, múltiplo e divisor etc.

Vergnaud (2009) classifica as situações das estruturas multiplicativas como sendo*: relações ternárias* e *relações quaternárias*. As *relações ternárias* são as que comportam três elementos de mesma natureza, enquanto que as *relações quaternárias* são as que comportam quatro elementos de naturezas distintas, duas a duas. Magina, Santos e Merlini (SANTOS, 2015) após pesquisas realizadas, elaboraram o esquema a seguir, fazendo uma releitura sobre a classificação de problemas multiplicativos propostas por Vergnaud (1983, 1988, 1994, 2009), sintetizando as ideias centrais deste campo.

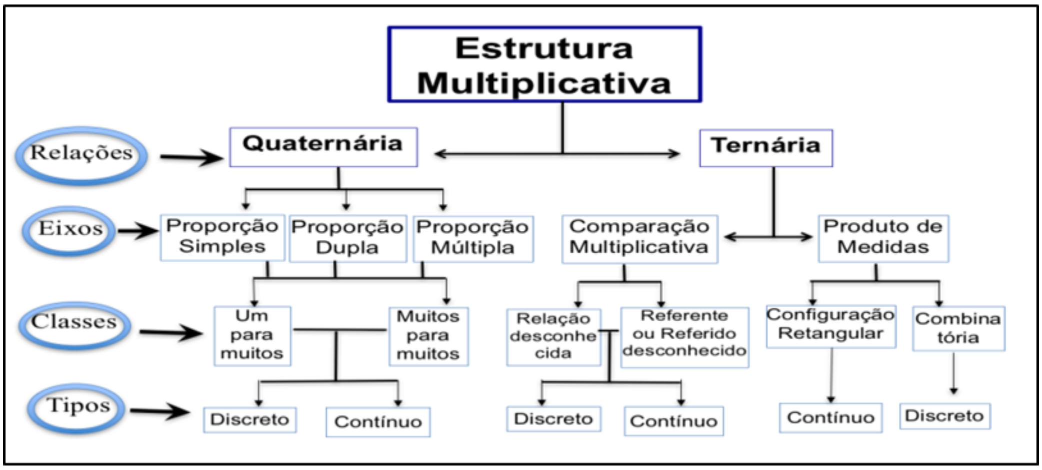


Figura 1: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo

Fonte – Magina, *Santos e Merlini*, publicado em SANTOS, 2015, p.105

Neste artigo, iremos enfatizar a configuração retangular e combinatória, que, como pode ser observado no quadro, são classes do eixo produto de medidas, que, por sua vez, corresponde a um tipo de relação ternária. As relações ternárias, são relações que envolvem três grandezas entre si e que podem ser de naturezas diversas. No eixo produto de medidas, uma grandeza é o produto de outras duas, no mesmo plano numérico e dimensional. Na classe, configuração retangular, temos uma relação que consiste de uma composição Cartesiana de duas medidas espaciais dentro de uma terceira, onde são apresentadas duas grandezas com medidas contínuas para formar o plano cartesiano, enquanto que na classe combinatória temos o produto cartesiano que parte de dois conjuntos disjuntos, de grandezas discretas, formando as possíveis combinações que podem ser contadas.

Como exemplo de configuração retangular, podemos vivenciar situações em que são dadas as dimensões de um retângulo e se solicita sua área. Supondo-se que as dimensões estejam em centímetros, a dimensão da área será o centímetro quadrado e o número correspondente a ela será obtido pelo produto das dimensões. Na combinatória, tais situações podem ser vivenciadas a partir de uma combinação dos elementos de dois conjuntos, formando pares, tais pares podem ser observados a partir da equivalência entre os elementos de tais conjuntos, podendo ser uma relação entre tipos de blusas e calças que podemos combinar.

A construção do conhecimento pelo aluno não é um processo linear, ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado, com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas. Muitas vezes, é necessário desestabilizar cognitivamente o aluno para que se possa dar prosseguimento a aprendizagem. É pensando assim, que Vergnaud (1996) nos diz que a aquisição do conhecimento é moldada pelas situações e problemas previamente dominados e que tal conhecimento tem muitas características contextuais.

Para Vergnaud, o desenvolvimento cognitivo depende de situações e conceitualizações específicas. São as situações que dão sentido aos conceitos, elas é que são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito (Barais & Vergnaud, 1990, p.78); um conceito torna-se significativo através de uma variedade de situações (1994, p.46), mas o sentido não está nas situações em si mesmas, assim como não está nas palavras nem nos símbolos (1990, p.158).

Vergnaud chama de "ilusão pedagógica" (1983 b, p.173) a atitude dos professores que creem que o ensino consiste na apresentação organizada, clara, rigorosa das teorias formais e que quando isso é bem feito os alunos aprendem. Ele trata como uma ilusão, pois segundo a Teoria dos Campos Conceituais, é através de situações problema que os conceitos se desenvolvem no aluno e as situações de resolução de problemas que tornam os conceitos significativos pelo aluno podem estar muito distantes do formalismo apresentado pelo professor.

Isso nos mostra a importância da resolução de problemas ou as situações de resolução de problemas como essenciais para a conceitualização, mas como chama atenção Vergnaud (1994, p.42), "um problema não é um ´problema para um indivíduo a menos que ele ou ela tenha conceitos que o/a tornem capaz de considera-lo como um problema para si mesmo".

4 I OS SUJEITOS E O AMBIENTE DA PESQUISA

Observando meus alunos, tenho constatado que, principalmente, aqueles que se encontram em distorção idade/ano de escolaridade, estão apresentando dificuldades em resolver problemas matemáticos. Parece-me que os conceitos básicos pertencentes ao campo aditivo (juntar ou separar, comparar, transformar) e multiplicativo (aditiva, comparativa, organização retangular, combinatória, proporcionalidade) não têm sido construídos ao final das séries iniciais por meio de sequências didáticas apropriadas para a construção destes conceitos. Chegando ao 6º ano, ao serem apresentados a problemas que envolvem conceitos do campo aditivo e multiplicativo, os alunos demonstram não possuir o embasamento necessário para a resolução dos problemas. As autoras citadas confirmam:

> Dos conceitos básicos destas operações dependem outras aprendizagens, tais como: a conceituação da multiplicação como adição de parcelas iguais; a conceituação da divisão como subtrações sucessivas; o algoritmo da multiplicação, quando adicionamos os produtos parciais para obtermos o produto total; o algoritmo da divisão, quando usamos a adição para verificarmos a exatidão da subtração e vice-versa. (MANDARINO E BELFORT, 2005, p.55)

Pensando nestes sujeitos, a pesquisa foi aplicada em um grupo de alunos do 6º ano de escolaridade de uma escola estadual situada na periferia de Duque de Caxias, no Rio de Janeiro, onde estes estudantes já vem com uma bagagem cultural e alguns conhecimentos interiorizados.

5 I O MÉTODO

Como o objetivo da pesquisa era de identificar as estratégias mobilizadas por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental para resolver problemas relacionados à configuração retangular e combinatória, aplicamos durante aproximadamente 2 horas na turma do referido ano (que totalizam 37 estudantes) da escola da baixada fluminense do Rio de Janeiro, um teste diagnóstico elaborado por Magina *et al.* (2014). O teste, que está em anexo neste artigo, é composto por 14 situações problema pertencentes ao campo conceitual multiplicativo. Destas, focamos nas situações que envolvem os conceitos de configuração retangular e combinatória, sendo duas de cada classe, uma em que são dados os fatores e a incógnita é o produto (fator-fator) e outra em que são dados um fator e o produto, e a incógnita é o outro fator (fator-produto), que pode ser obtido por meio de uma divisão. Apresentamos as situações no Quadro 1 a seguir:

Situação	Enunciado	Classe	Operação
Q5	Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3 m de largura e 6 m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?	Configuração retangular (fator-fator)	Multiplicação
Q7	A área do jardim de Vera é retangular e tem 24 m². A largura é 4 m. Qual é o comprimento em metros desse jardim?	Configuração retangular (fator-produto)	Divisão
Q9	A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíche?	Combinação (fator-produto)	Divisão
Q11	Na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?	Combinação (fator-fator)	Multiplicação

Quadro 1 - Situações do instrumento diagnóstico que envolve as classes configuração retangular e combinatória

Fonte: dados da pesquisa

Iniciamos corrigindo os testes e, para estas questões, quantificamos erros, acertos e tipos de estratégias empregadas pelos estudantes. Assim, começamos fazendo uma análise quantitativa dos dados. Num segundo momento, focamos nas estratégias empregadas pelos estudantes em Q5 e Q7, procurando estabelecer uma classificação para estas estratégias tendo como referência a classificação estabelecida em Magina, Santos e Merlini (2014) e para as questões Q9 e Q11, adotamos a classificação adotada por Pessoa e Borba (2009). Nesta etapa, nossa análise foi qualitativa. Segundo Goldenberg (1999), nesse tipo de pesquisa o investigador não se preocupa em estabelecer quantificações do grupo investigado, mas sim com o entendimento aprofundado da realidade de cada indivíduo, grupo, organização ou instituição, suas trajetórias e subjetividades. Segundo ela, “os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos” (GOLDENBERG, 1999, p. 53). Corroborando com estas ideias, Lüdke e André (2014) trazem uma caracterização de pesquisa qualitativa em educação:

> (...) envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (LÜDKE; ANDRÉ, 2014, p.14)

Além dessas características, Lüdke e André (2014) bem como Araújo e Borba (2013), também apontam que, na pesquisa qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural sob investigação e que o pesquisador considera importante a apreensão do significado atribuído pelos participantes à sua realidade e suas ações. Na nossa investigação, por meio dos registros deixados pelos estudantes no teste, procuramos apreender o significado que cada um atribui às situações que priorizamos. Assim, concordamos com D’Ambrósio (2013) quando afirma que a pesquisa qualitativa “lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos” (D’AMBRÓSIO, 2013, p. 21).

6 I ANÁLISE DOS DADOS

Após a coletada dos dados, estruturamos a análise em duas partes: uma quantitativa e outra qualitativa. A análise quantitativa refere-se ao desempenho dos estudantes e perfazendo um total de setenta e quatro itens de análise (cada estudante, de um total de 37 estudantes, fez 4 questões, logo temos 37 x 4 = 148 itens). Seguimos três vieses de análise: (a) análise global do desempenho; (b) comparação de desempenho em questões da classe configuração retangular (Q5 e Q7) com o desempenho em questões da classe combinatória (Q9 e Q11); e (c) comparação do desempenho em questões em que é fornecido o produto (Q7 e Q9) com o desempenho em questões em que este é solicitado (Q5 e Q11). Nessa etapa procuramos categorizar as estratégias e identificar os níveis de raciocínio empregados nelas.

Os percentuais de acertos, erros e respostas em branco por questão estão apresentados no gráfico da Figura 2.

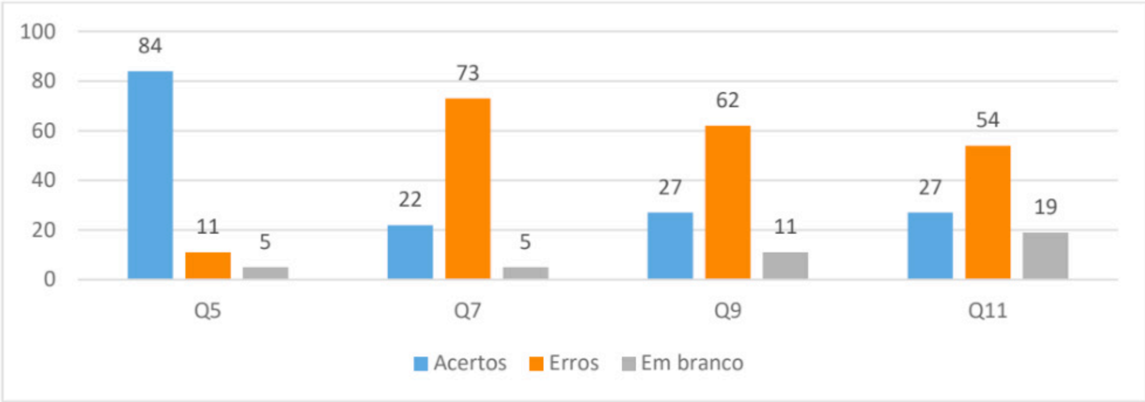


Figura 2: Desempenho dos estudantes do 6º ano por questão

Fonte: Dados da pesquisa

O gráfico da Figura 2 mostra que os índices de acerto da Questão 5, foi muito superior ao índice de acerto das outras questões, o que se configurou de modo inverso nos índices de erro de tais questões. Além disso, o gráfico nos mostra que a maioria dos alunos teve a intenção de responder os problemas, uma porcentagem muito pequena deixou as questões em branco. Isso pode ser lido ou como um não entendimento da questão, ou apenas como uma resposta para não fazer mesmo tais questões. Este gráfico ainda nos mostra que nossa terceira hipótese, a que se refere ao tipo de solicitação da questão, o desempenho dos alunos foi muito superior na questão em que o produto é solicitado do que a questão em que este é dado. Para resolver o primeiro tipo, onde o produto é solicitado, os estudantes usam a multiplicação e, para resolver o segundo tipo, onde o produto é dado, precisam de uma divisão.

Analisando o gráfico 1 mais profundamente, levantamos duas hipóteses, a primeira é se a dificuldade dos alunos aumenta em razão da classe a que as situações pertencem, ou seja, se uma das classes em questão (configuração retangular e combinatória) é mais fácil que a outra para os alunos. Sendo assim, agrupamos as questões por classe e apresentamos no gráfico da Figura 3:

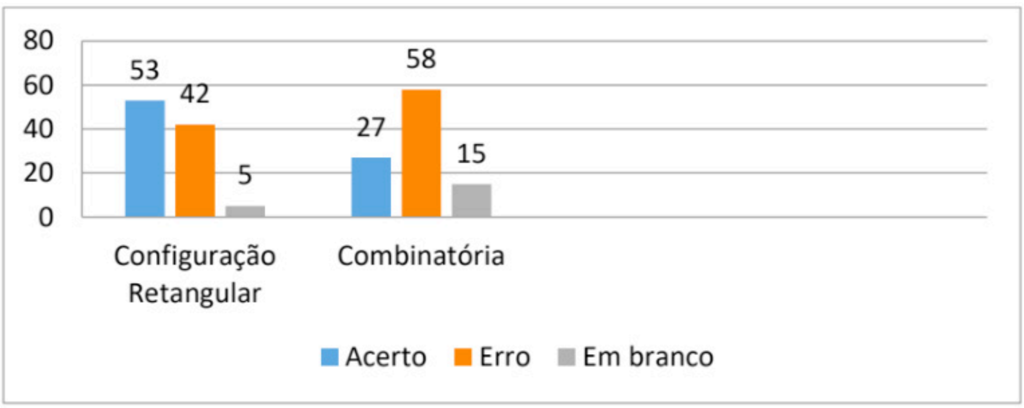


Figura 3: Desempenho dos estudantes do 6º ano em relação à classe

Fonte: Dados da pesquisa

Segundo o gráfico da Figura 3, os alunos tiveram um melhor desempenho no grupo de questões de configuração retangular em relação ao grupo de questões de combinatória. Em uma análise geral, podemos observar que os conhecimentos relativos à classe configuração retangular são mais exploradas pelos professores durante as aulas do que os conhecimentos relativos à classe combinatória, o que poderia tornar tais questões mais fáceis de entenderem e resolverem que as de combinatória.

Analisando o gráfico da Figura 4, pelo viés da comparação do desempenho em questões em que é fornecido o produto (Q7 e Q9) com o desempenho em questões em que o produto é solicitado (Q5 e Q11), onde para se resolver o primeiro tipo, em geral, o aluno utiliza uma multiplicação e, para resolver o segundo tipo, uma divisão, verificamos que a diferença entre os grupos constante no gráfico é estatisticamente significativa, e obtivemos uma resposta a nossa pergunta, ou seja, os alunos apresentaram mais facilidade em resolver as situações em que a multiplicação é mais evidente, aquelas em que o produto é solicitado, do que as que precisam utilizar a divisão, as que o produto é fornecido, como mostra o gráfico da Figura 4 abaixo.

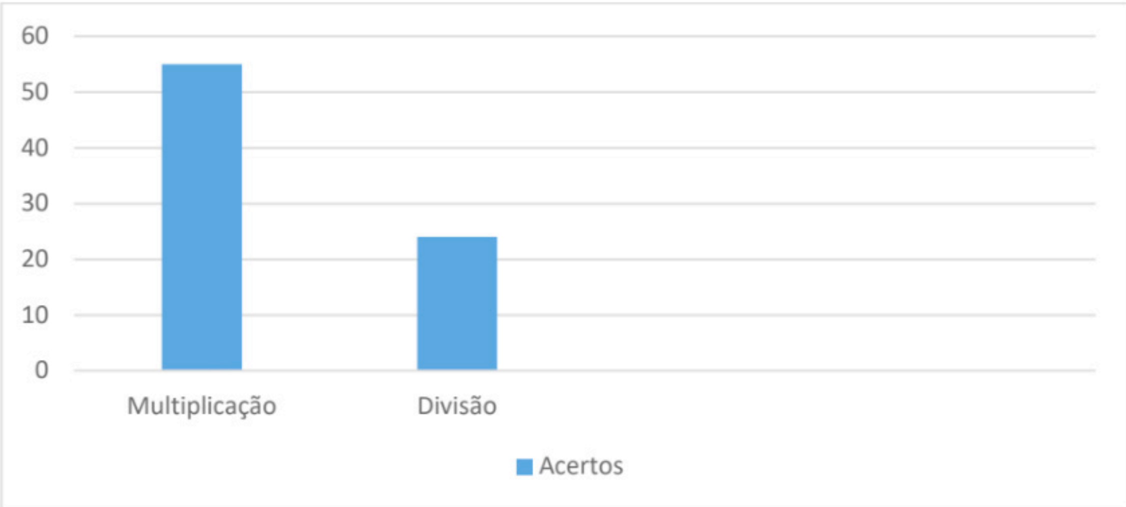


Figura 3: Desempenho dos estudantes do 6º ano em relação às operações

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, verificamos a importância de o professor trabalhar junto aos alunos vários tipos de situações problema envolvendo todos os conceitos do campo multiplicativo, não só priorizando as situações onde a multiplicação passa a ser mais evidente.

Numa análise qualitativa, procuramos analisar todas as estratégias utilizadas pelos estudantes tanto nos casos de erros, como no de acertos. Embora o estudo de Magina, Merlini e Santos (2014) se volte para as estratégias empregadas por estudantes mais jovens em problemas multiplicativos de outras classes, a categorização ali apresentada orientou nossa análise e nossos dados conduziram a três níveis de complexidade, a saber: incompreensível (nível 1), pensamento aditivo (nível 2) e multiplicativo (nível 3). A seguir, apresentamos cada um deles, descrevendo-os e observando seu número de incidência.

No nível 1 ou nível incompreensível estão “as respostas em que o estudante não explicitou, no papel, a operação utilizada para resolver o problema ou, quando o fez, não conseguimos identificar o raciocínio utilizado” (MAGINA, MERLINI, SANTOS, 2014, p. 9). Assim, fizeram parte desse nível as estratégias em que o estudante fez um desenho sem significado para a sua resolução, repetiu um dos números constantes no enunciado do problema, ou, ainda, pode ter escolhido outras ferramentas matemáticas diferentes das quatro operações fundamentais, como frações e simplificação de frações, sem que conseguíssemos entender a razão para tal. Neste nível, as respostas dos estudantes estão invariavelmente erradas. No Quadro 2, apresentamos a quantidade de estratégias classificadas no nível 1 por questão.

Nível 1 – Incompreensível	
Questão	Incidência
Q5	0
Q7	1

Quadro2 – Quantitativo de estratégias classificadas no nível 1 por questão

Fonte: Elaborado pelos autores

Das 70 respostas não nulas dadas às questões Q5 e Q7, apenas 1 pertenceu a este nível, justamente na questão 7, pois como já mencionamos anteriormente, o grau de dificuldade da questão 7 é maior que o da questão 5.

O nível 2 ou nível do pensamento aditivo abarca as estratégias que envolveram uma adição, uma subtração ou qualquer combinação destas operações. No Quadro 3, apresentamos as incidências destas questões, lembrando que assim como no nível 1, as respostas dadas pelos estudantes deste nível também estão invariavelmente erradas.

Nível 2 Aditivo	
Questões	Incidência
Q5	4
Q7	4

Quadro 3 – Quantitativo de estratégias classificadas no nível 2 por questão

Fonte: Elaborado pelos autores

O nível 3 ou nível do pensamento multiplicativo, os estudantes utilizam as operações de multiplicação e divisão para solucionar os problemas apresentados. No quadro 4 temos a incidência de cada questão, deixando bem claro que neste nível, invariavelmente as respostas dadas pelos estudantes estão corretas, mas podemos observar na questão 7, algumas destas respostas erradas, mesmo o aluno utilizando o pensamento multiplicativo, mas como já citado anteriormente, esta questão se refere a questões onde o produto é dado, logo o estudante deverá utilizar uma divisão. Nos chama a atenção, um grupo de 4 estudantes que utiliza o conceito de perímetro da figura, na questão 7, mas utilizando um pensamento multiplicativo, encontrando um número como resposta muito absurdo.

Nível 3 - Multiplicativo	
Questões	Incidência
Q5	31 (corretas)
Q7	8 (corretas)
	18 (erradas – multiplicação)
	4 (erradas – perímetro)

Quadro 4 - Quantitativo de estratégias classificadas no nível 3 por questão

Fonte: Elaborado pelos autores

Ainda levando em conta os procedimentos de cálculo, é importante observar que em Q5 não houve erros de cálculo. Sobre este fato, inferimos que ele se deve aos números envolvidos na questão. 3 e 5 são números pequenos cujo produto consta nas tabuadas que boa parte dos estudantes brasileiros são levados a memorizar desde cedo. É possível que, nas situações em que os números sejam maiores e não constem nas tabuadas usuais, a quantidade de erros para este tipo de questão aumente consideravelmente.

Para a análise das situações de combinatória, buscamos no artigo de Pessoa e Borba (2009), a categorização apontada por Moro e Soares (2006) no qual as respostas assemelham-se aos níveis hierárquicos de elaboração de raciocínio combinatório, que vão desde respostas alheias aos problemas até soluções combinatórias.

No nível 1, os alunos apresentaram uma adição ou uma subtração utilizando os números do enunciado, sendo essas operações sem relação direta com a situação proposta, o que nos leva a crer que não houve uma compreensão da proposta do problema. Neste nível, observamos que os alunos ainda utilizam o pensamento aditivo, utilizando as informações do enunciado para operar, mesmo que a resposta da operação não esteja correta. Podemos concluir que tais alunos não possuem vivência de relação com situações problemas de combinatória, pois os mesmos simplesmente utilizaram o conceito aditivo para solucionar as questões, nem mesmo se valendo de desenhos para representar a situação proposta. No quadro abaixo, apresentamos a quantidade de estratégias classificadas no nível 1 por questão.

Nível 1	
Questão	Incidência
Q9	1
Q11	5

Quadro 5 - Quantitativo de estratégias classificadas no nível 1 por questão

Fonte: Elaborado pelo autor

No nível 2, observamos que as estratégias utilizadas pelos alunos atendem ao campo multiplicativo, na medida em que os alunos utilizam multiplicações ou divisões para solucionar as questões apresentadas, mesmo que tais soluções não pareçam estar corretas ou coerentes com o que é solicitado no problema apresentado. São os alunos que já passaram para o pensamento multiplicativo, mas ainda apresentam dificuldades em estabelecer relações combinatórias nos problemas apresentados, apenas efetuando os algoritmos conhecidos com os valores apresentados no enunciado das situações apresentadas. Neste nível, observamos que os alunos associaram a quantidade de sanduíches à uma multiplicação, já a formação de casais à uma divisão, o que nos demonstra o quanto pouco é explorado o conceito de combinatória durante a realização de situações problemas envolvendo o campo multiplicativo. No quadro abaixo, apresentamos a quantidade de estratégias classificadas no nível 2.

Nível 2	
Questões	Incidência
Q9	11
Q11	10

Quadro 6 - Quantitativo de estratégias classificadas no nível 2 por questão

Fonte: Elaborado pela autora

No nível 3, os alunos utilizaram o desenho como estratégia de resolução, sem o esgotamento de todas as possibilidades, e a resposta é incorreta, sem relação com o problema. Alguns alunos dão evidências de que, embora a resposta apresentada não seja correta, compreenderam as relações implícitas nos problemas e propuseram estratégias que evidenciam essa compreensão, mesmo apresentando um pensamento aditivo durante a solução apresentada, o que levou o aluno na questão 9 a informar de forma incorreta a resposta do problema, mesmo utilizando o desenho como uma estratégia de solução. Semelhante a este pensamento, observamos nas questões 11 apresentadas, estratégias de desenho, mas com um esgotamento de possibilidades, o que fez com que os alunos não atingissem a resposta adequada, mas com a ideia de que ambos compreenderam o que foi solicitado pelo problema. Podemos observar que, mesmo sem o esgotamento de todas as possibilidades, é importante salientar que desde cedo os alunos podem compreender problemas que envolvam combinatórias e, assim, devem ser estimuladas a resolver esses tipos de problemas desde as séries iniciais. No quadro a seguir, apresentamos o quantitativo de estratégias classificadas no nível 3.

Nível 3	
Questões	Incidência
Q9	12
Q11	5

Quadro 7 - Quantitativo de estratégias classificadas no nível 3 por questão

Fonte: Elaborado pela autora

Para o nível 4, os alunos apresentaram como estratégia para a resolução o desenho, demonstrando que perceberam a lógica dos problemas, mesmo sem esgotar todas as possibilidades, apresentaram a resposta correta. É importante ressaltar que um dos alunos utiliza um produto para chegar a resposta correta, mesmo utilizando-se do desenho e sendo a divisão, a operação mais lógica para se resolver o problema, enquanto que outro aluno utiliza do pensamento aditivo, somando as parcelas iguais, para se chegar a solução, no qual a multiplicação seria a operação mais aceitável para solucionar o problema, mesmo utilizando o desenho como base para se resolver a situação apresentada. Apresentamos, no quadro a seguir, a quantidade de estratégias classificadas no nível 4.

Nível 4	
Questões	Incidência
Q9	5
Q11	2

Quadro 8 - Quantitativo de estratégias classificadas no nível 4 por questão

Fonte: Elaborado pela autora

O nível 5, mostra que os alunos conseguiram perceber a lógica dos problemas, acertando as respostas, sem utilizar o desenho como uma estratégia de resolução, apenas utilizando os algoritmos da divisão e da multiplicação para resolver as situações apresentadas. É interessante observar a estratégia utilizada por um único aluno, na qual o mesmo, para responder à questão 11 que, invariavelmente, utilizaríamos uma multiplicação para solucionar o problema, utilizou uma adição de parcelas iguais, isso pode nos remeter a possibilidade do referido aluno, ainda não ter passado do pensamento aditivo para o pensamento multiplicativo, como também, que o aluno utilizou uma combinação de seis parcelas, o que se referia ao número de rapazes, com o numeral 4, que estaria se referindo a quantidade de moças. Esses alunos não só compreenderam as relações implícitas como corretamente associaram suas resoluções a produtos. No quadro abaixo, apresentamos a quantidade de estratégias classificadas no nível 5 por questão.

Nível 5	
Questões	Incidência
Q9	5
Q11	7

Quadro 9 - Quantitativo de estratégias classificadas no nível 5 por questão

Fonte: elaborado pela autora

Ao finalizarmos a análise, observamos que os alunos desenvolvem compreensões sobre problemas do campo multiplicativo, tanto de raciocínio combinatório, quanto de configuração retangular, desenvolvendo estratégias interessantes que precisam ser melhor aproveitadas pela escola para ajudá-los a avançar no desenvolvimento dos conceitos utilizados. Tais estratégias serão melhor aproveitadas à medida que seus professores tenham conhecimento sobre os diferentes tipos de problemas do eixo produto de medidas, bem como os saberes já possuídos por seus alunos e dos erros que estes cometem.

7 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste artigo foi o de analisar o desempenho de estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental na resolução de situações do campo conceitual multiplicativo pertencentes à classe configuração retangular e combinatória do eixo produto de medidas e, ainda, discutir e classificar os níveis de raciocínio empregados por eles nestas situações. A análise dos resultados nos permite fazer duas considerações: uma do ponto de vista quantitativo e outra do ponto de vista qualitativo.

No que diz respeito ao ponto de vista quantitativo, destacamos o alto índice de acertos na questão em que o produto é pedido (multiplicação) e o alto índice de erro na questão em que o produto é dado e solicita-se um dos fatores (divisão). Estes dados nos levaram a destacar a importância do professor que ensina matemática no Ensino Fundamental diversificar as situações problema do campo conceitual multiplicativo que propõe aos estudantes numa mesma classe, abordar as várias possibilidades de situar a incógnita e os dados necessários às resoluções das situações.

Com relação à análise qualitativa, a partir das estratégias de ação utilizadas pelos estudantes ao resolverem as duas questões pertencentes à classe configuração retangular e à classe combinatória, identificamos alguns níveis de raciocínio. Em todas as questões, observamos o privilégio das representações numéricas em detrimento das representações pictóricas e inferimos que este fato se deva a um ensino pautado na reprodução de algoritmos. Acreditamos que tal fenômeno pode implicar, por sua vez, na reduzida capacidade dos estudantes de avaliarem as repostas, muitas vezes absurdas, que fornecem para as situações problema.

Desta forma, assim como os autores que mencionamos ao longo deste artigo, propomos a revisão do ensino do campo conceitual multiplicativo. Propomos também que o estudo das classes de situações do campo multiplicativo bem como das produções dos estudantes em situações problema deste campo estejam presentes nas formações inicial e continuada de professores que ensinam matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, C. G. **Vamos jogar?** As contribuições do jogo rouba monte na aprendizagem dos problemas aditivos. 2015. 160f. Dissertação (Mestrado em Educação, Cultura e Comunicação em Periferias Urbanas) – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Duque de Caxias, 2015.

BORBA, M.; ARAÚJO, J. **Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática**. In: BORBA, M.; ARAÚJO, J. (Orgs.), Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática 5ª. Ed - Belo Horizonte: Autêntica, 2013, p. 31 - 51.

D'AMBROSIO, U. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Prefácio. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.), Belo Horizonte: Autêntica, pp. 9-21, 2010. (PESQUISEI NO GOOGLE ACADÊMICO E ESSA REFERENCIA CONTEMPLA A CITAÇÃO)

ESTEVES, I; MAGINA, S. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos–8ª série do ensino fundamental. **Encontro Nacional de Educação Matemática**, v. 7, 2001.

GOLDENBERG, E.P. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (org.) **Investigações Matemáticas na aula e no currículo**. 1999, p. 35-49.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.** 2ªed. – Rio de Janeiro, RJ: E. P. U., 2014.

LUNA, J. M. O. **As concepções e as crenças do professor sobre a multiplicação e a divisão para ensinar crianças de anos iniciais**. 2017. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação, Cultura e Comunicação em Periferias Urbanas) – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Duque de Caxias, 2017.

MAGINA, S. et al. **Repensando adição e subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais.** São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S; SANTOS, A.; MERLINI, V. A estrutura Multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. **3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará**, v. 1, p. 1-12, 2012.

MAGINA, S; SANTOS, A; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 20, n. 2, 2014.

MIGUEL, M I; MAGINA, S. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Santos**, 2003.

MILAGRE, P. H. **Proporção simples: análises de situações elaboradas por professores em um processo formativo**. 2017. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

NUNES, T; BRYANT, P; COSTA, S. **Crianças fazendo matemática**. 1997.

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação matemática**: **números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

OTERO, J et al. (Ed.). **The psychology of science text comprehension**. Routledge, 2014.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série Who dances with whom: the development of elementary school chidren's combinatorial reasoning p. 105-150. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 17, n. 31, 2009.

SOUZA, E. I. R. **Estruturas multiplicativas: concepção de professor do ensino fundamental.**107f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**, Ed. 3. Curitiba: UFPR, 2009.

VERGNAUD, G Multiplicative structures.IEm R. Lesh 8 M. Landau (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures.** New York: Academic Press, 1983.p.127-174.

VERGNAUD, G Multiplicative structures. In. HIEBERT, H. and BEHR, M. (Ed.). **Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum,1988. p. 141-161.

VERGNAUD, G Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.** Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41 – 59.

VERGNAUD, G La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical behavior**. 17 (2), p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba: Editora UFPR. N Especial 1/2011, p. 15-27.

VERGNAUD, G Formulário de processo e do conhecimento predicativo FORM (Formas operativas e predicativas de conhecimento). **Investigações em ensino de Ciências.** Paris, França. V.17 (2), pp. 287-304, 2012.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Revista Análise Psicológica**, Lisboa, [S.l.], v. 1, n. 5, p.75-90, 1986.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, 280 p., cap. 3, 155-191.

CAPÍTULO 7

ESTRUTURA MULTIPLICATIVA: O TIPO DE SITUAÇÃO-PROBLEMA QUE O PROFESSOR DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL ELABORA

Emília Isabel Rabelo de Souza
Secretaria da Educação do Estado da Bahia
Ilhéus – Bahia

Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC
Ilhéus – Bahia

RESUMO: Esse artigo tem como objetivo discutir o tipo de situação-problema que o professor dos anos finais do Ensino Fundamental elabora envolvendo o campo conceitual multiplicativo. É um estudo descritivo que tem como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Foram sujeitos de pesquisa 14 professores de duas Escolas Públicas de duas cidades do sul da Bahia. Os dados analisados foram coletados a partir da elaboração de oito problemas distintos envolvendo multiplicação e ou divisão. O presente estudo é parte de uma de dissertação de mestrado, para o qual foram selecionados os protocolos dos professores que atuam nos anos finais. Os resultados apontam uma predominância, por parte desses professores, em elaborar situações cujo nível de dificuldade é elementar. Esperamos que esse trabalho possa contribuir para o debate sobre a formação do professor que ensina Matemática no Ensino Fundamental.

PALAVRAS-CHAVE: campo conceitual multiplicativo, situação-problema, professores dos anos finais do Ensino Fundamental.

ABSTRACT This article aims to discuss the type of problem situation that the teacher of the final years of Elementary Education elaborates involving the Multiplicative Conceptual Field. It is a descriptive study that has as theoretical contribution the Theory of Conceptual Fields of Gérard Vergnaud. The analyzed data were collected from the elaboration of eight distinct problems involving multiplication and or division, elaborated by 14 teachers from two public schools of two cities of the south of Bahia. The present study is part of a master's dissertation, for which the protocols of the teachers who worked in the final years were selected. The results show a predominance, on the part of these teachers, in elaborating situations whose level of difficulty is elementary. We hope that this work can contribute to the debate about the formation of the teacher who teaches Mathematics in Elementary School.

KEYWORDS: multiplicative conceptual field, word problem, teachers of the final years of Elementary School.

1 I INTRODUÇÃO

Entendemos que o conhecimento matemático é fruto de um processo de evolução do homem. Sua origem constitui-se a partir de uma coleção de regras isoladas, decorrentes da experiência e diretamente conectadas com a vida diária. Nessa perspectiva, é inegável a presença das operações elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão no nosso dia a dia. E o significado dessas operações resulta das conexões que o estudante pode estabelecer entre elas e o seu cotidiano, entre elas e os diferentes temas matemáticos, ou ainda, entre elas e as demais disciplinas.

Assim, a Matemática faz parte da vida estudantil desde os primeiros anos de escolarização e perpassa quase todos os níveis de ensino. Mas, apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento humano, ela ainda é tida como disciplina que produz exclusão.

De acordo com orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), o conceito de multiplicação deve ser inserido ainda no primeiro ciclo. No entanto ressalta, nesse ciclo, devem ser priorizadas as situações de adição e subtração. Porém, pesquisas (NUNES et al., 2009, MAGINA et al., 2012) têm apontado que crianças de 5 anos, em idade pré-escolar, já são capazes de resolver problemas pictóricos que envolvem uma multiplicação explorando a relação de um para muitos com o significado de coleção.

Apesar de os estudos apontarem essa capacidade das crianças, os resultados das macroavaliações brasileiras, desde sua implementação, têm apresentado baixo desempenho dos estudantes do Ensino Básico no que diz respeito à disciplina de Matemática. Quando fechamos o foco, detendo-nos especificamente ao estado da Bahia, tal resultado se mostra ainda menos animador. O resultado da Prova Brasil 2011 mostrou que estudantes do 9º ano da escola pública da Bahia encontram-se no nível 5 (média de proficiência: 228,74), de uma escala de 0 a 12. Mostrou, ainda, que 63,59% dos estudantes não alcançam 50% da nota média da prova. De acordo com as matrizes de referências da Prova Brasil, isso significa que os estudantes não conseguem resolver satisfatoriamente problema envolvendo diferentes significados da adição e subtração, competência estabelecida para o nível 6 (BRASIL, 2008).

Entendemos que são vários os fatores que interferem nesses resultados, questões de ordem social e cultural, o currículo adotado nas escolas, a formação do professor, dentre outros. Não é pretensão deste estudo discutir todos esses fatores. Nosso interesse é investigar apenas alguns aspectos cognitivos relacionados à elaboração de situação-problema envolvendo o campo conceitual multiplicativo, no que tange ao professor dos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, faremos uso das ideias de Vergnaud (1983, 1994, 1996, 2009) no que se refere às Estruturas Multiplicativas ou Campo Conceitual Multiplicativo e os estudos de Magina e cols. (2010).

2 I CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

Na perspectiva de um trabalho envolvendo campos conceituais, os PCN (BRASIL,

1997) orientam que é necessário oferecer aos estudantes uma ampla experiência com situações-problema que os levem a desenvolver raciocínios mais complexos por meio de tentativas, explorações e reflexões. No Campo Multiplicativo, destaca a importância de um trabalho conjunto de situações-problema que explorem a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que os envolvem e a necessidade de trabalhar essas operações com base em um campo mais amplo de significados do que tem sido usualmente realizado.

O Campo Conceitual Multiplicativo consiste em todas aquelas situações que podem ser analisadas seja como problemas de proporção simples, ou de proporção múltipla, ou ainda aqueles que precisam normalmente multiplicar ou dividir. Vários tipos de conceitos matemáticos estão vinculados a essas situações e ao pensamento necessário para dominá-las. Entre esses conceitos estão as funções linear e n-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, razão, proporção, número racional e a multiplicação e divisão.

A partir das ideias de Vergnaud (1983, 1994, 1996) sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, Magina, Merlini e Santos (2010) elaboraram um esquema com o objetivo de sintetizar as ideias centrais desse campo. Esse Esquema passou por alguns ajustes em 2011 e 2012 até ser apresentado em 2014 na sua versão definitiva, o qual apresentamos a seguir.

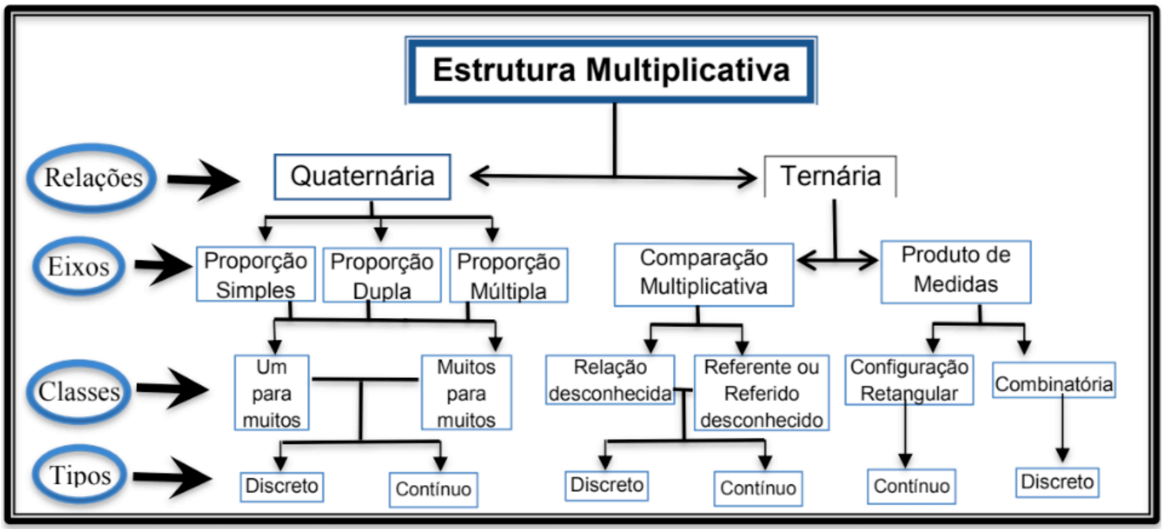


Figura 1: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo

Fonte: Magina et al. (primeira elaboração em 2010 e ajustado em 2016).

O esquema apresentado na figura 1 divide as situações do Campo Conceitual Multiplicativo em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias.

A relação quaternária é aquela que envolve quatro quantidades de duas grandezas distintas, tomadas duas a duas. Nesta relação, são considerados os eixos: o da proporção simples (PS), o da proporção dupla (PD) e o da proporção múltipla (PM), cada eixo divide-se em duas classes: um para muitos (1pM) e muitos para muitos (MpM). Em cada classe podem ser apresentadas situações que envolvem tipos de quantidades continuas e discretas.

A relação ternária é aquela que envolve três quantidades “das quais, uma é o produto das outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional” (VERGNAUD, 2009, p.253). Essa relação é constituída por dois eixos: comparação multiplicativa (CM) e produto de medida (PrMe), cada um deles composto por duas classes de situações. No eixo da comparação multiplicativa a primeira classe é chamada de relação desconhecida (Rel.D) e a segunda de referente ou referido desconhecido (Ref.D) e, também, envolvem quantidades continuas e discretas. As classes configuração retangular (CR) e combinatória (COM) pertencem ao eixo produto de medida. Esse difere dos demais com relação ao tipo de quantidade que podemos usar. Na classe configuração retangular usamos quantidade contínua e na classe combinatória usamos quantidade discreta.

Para fazer uma breve distinção entre a relação quaternária e a relação ternária, discutiremos a seguinte situação: *um pacote de biscoito custa R$ 3,00. Quanto pagarei se comprar cinco pacotes deste biscoito?*

Podemos interpretar a situação da seguinte maneira: somar repetidas vezes o valor a pagar pelo pacote de biscoito. Nesse caso teríamos a seguinte solução para a situação: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15. Essa solução se apoia na ideia de adição repetida e na relação a x b = c (5 x 3 = 15). Contudo, o que está implícito nessa situação é uma relação quaternária entre duas quantidades de naturezas distintas que, esquematicamente, pode ser representada da seguinte forma:

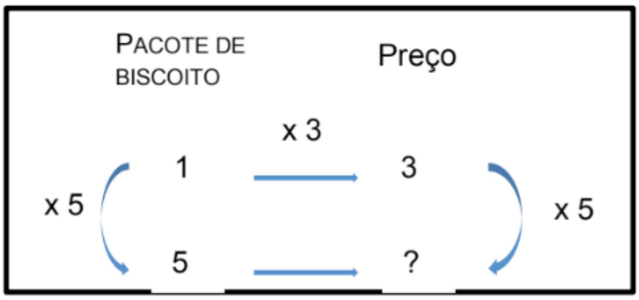


Figura 2: Esquema de Relação Quaternária

O esquema apresentado na figura 2 representa uma proporção simples na classe um para muitos. Numa proporção simples existe uma relação constante de correspondência entre as duas grandezas envolvidas.

A relação entre a quantidade de biscoito *x5* é um operador escalar (não tem dimensão), 5 biscoitos é 5 vezes mais que 1 biscoito, e *?* preço é 5 vezes mais o preço da quantidade de 1 pacote de biscoito. O operador escalar (no nosso exemplo: *x5*), não se refere a quantidade de pacote de biscoito ou preço, ele se refere ao número de replicações.

Outra interpretação possível para essa situação baseia-se no conceito de operador (ou fator) funcional, representada na figura 2 pelo fator *x3*. Esse operador não representa nem a quantidade de pacotes de biscoito nem o preço a ser pago, mas uma relação entre as duas grandezas, isto é, para cada pacote de biscoito pagamos 3 reais. Tal consiste no coeficiente: preço/quantidade de pacote de biscoito.

Dificuldades de naturezas diferentes são encontradas quando variamos a posição da incógnita. Outro nível de complexidade pode ser encontrado em situações que envolvem a combinação de duas proporções simples. Neste caso, as situações podem ser classificadas: no eixo proporção dupla, ou proporção múltipla. Os exemplos a seguir distinguem essas duas classes de situações.

Exemplo 1: Um grupo de 5 pessoas consomem, em média, 20 litros de água em 2 dias. Considerando a mesma média, qual o consumo de 15 pessoas em 4 dias?

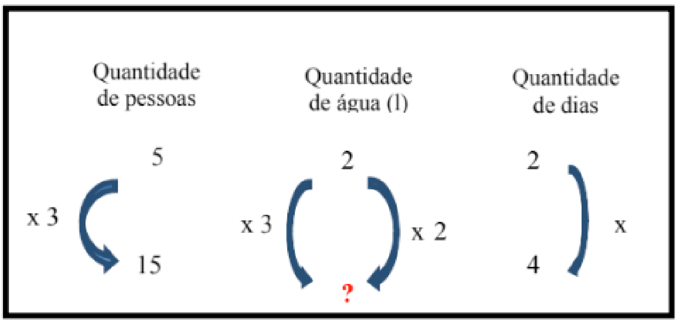


Figura 3: Esquema de Proporção Dupla

No *exemplo 1* representado no esquema da figura 3, por se tratar de uma situação de proporção dupla, podemos resolver parcialmente como duas situações de proporção simples.

Primeiro, descobrimos a relação existente entre as quantidades da grandeza pessoas (5 e 15), ou seja o operador escalar *x3*. Em seguida aplicamos este operador escalar na grandeza quantidade de água. Contudo, como se trata de uma proporção dupla, há outra grandeza envolvida, que é a quantidade de dias. Usando raciocínio semelhante, descobrimos a relação entre as quantidades da grandeza dias (2 e 4), que é o operador escalar *x2*. Igualmente aplicamos este operador escalar na grandeza quantidade de água, pois essa última varia de acordo coma as duas outras grandezas, quantidade de pessoas e a quantidade de dias.

Exemplo 2: Para fazer certo tipo de biscoito D. Elza usa a seguinte receita: para cada ovo ela usa 2 xícaras de farinha, e para cada xícara de farinha, 3 colheres de açúcar. Para fazer a massa usando 2 ovos, quantas colheres de açúcar ela vai precisar?

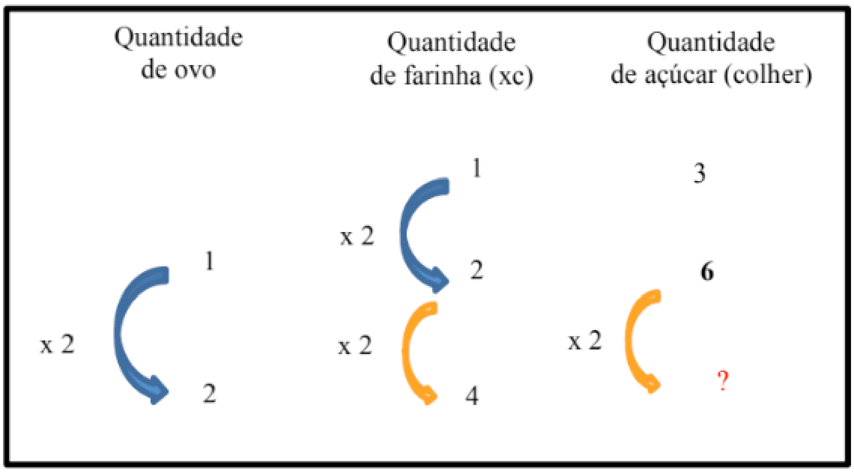


Figura 4: Esquema de Proporção Múltipla

Na figura 4 observamos que a situação envolve três grandezas (quantidade de ovos, de farinha e de açúcar) e é mais complexo que o *exemplo 1*. Percebemos que para chegar à quantidade de açúcar pedida precisamos resolver a proporção simples envolve ovo e farinha. Assim, quando alteramos a quantidade de ovo alteramos a quantidade de farinha e alterando a quantidade de farinha, altera-se a quantidade de açúcar. Isso porque na proporção múltipla há uma concatenação de proporções, ou seja, “x é proporcional a y e y é proporcional a z” (VERGNAUD, 1996, p.175).

Quanto à relação ternária, aquela que envolve “três quantidades, das quais uma é o produto das outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional” (VERGNAUD, 2009, p.253), as situações-problema classificadas no eixo comparação multiplicativa são aquelas nas quais somente dois valores de mesma grandeza são comparados de forma multiplicativa por um escalar (razão da relação) – sendo um o referente e o outro o referido.

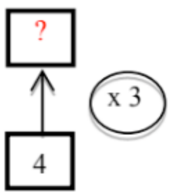
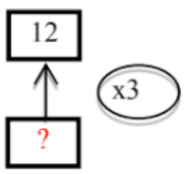
Classe	Diagrama	Exemplo
Relação desconhecida		Exemplo 3: João tem 4 anos. seu primo Paulo tem 12 anos. Quantas vezes a idade de Paulo é maior que a de João ?
Referido desconhecido		Exemplo 4: João tem 4 anos. A idade de seu primo Paulo é 3 vezes maior que a sua. Quantos anos tem Paulo?
Referente desconhecido		Exemplo 5: João e Paulo são primos. A idade de Paulo é 3 vezes mais que a idade de João. Sabendo que Paulo tem 12 Anos quantos anos tem João?

Figura 5: Tipos de situações de Comparação Multiplicativa

Fonte: Adaptado de Souza e Magina (2015).

No exemplo 3, apresentado na figura 5, é conhecido o referente (idade de João) e o referido (idade de Paulo) e pede-se para calcular a relação entre elas. No exemplo 4, conhece-se o referente (idade de João), a relação entre o referente e o referido (3 vezes mais) e pede-se para calcular o valor do referido (idade de Paulo). Por fim, no exemplo 5, é conhecido o referido (idade de Paulo), o valor da relação entre a idade do referente e do referido (3 vezes mais) e pede-se para calcular o valor do referente (Idade de João). Note que este último exemplo apresenta uma situação que exige do estudante maior complexidade cognitiva para sua solução.

No que se refere ao produto de medida, Vergnaud (1983) explica que é uma estrutura que consiste de uma composição Cartesiana de duas medidas espaciais dentro de uma terceira. Duas classes de situações compõem esse eixo: configuração retangular (**CR**) e combinatória (**COM**).

Na classe configuração retangular são apresentadas duas grandezas com medidas contínuas para formar o produto cartesiano, como é o caso da área de um retângulo (GITIRANA et al., 2014, p.73). Vejamos um exemplo: um terreno tem 20 metros de comprimento por 12 metros de largura. Qual a sua área?

Nas situações pertencentes à classe combinatória o produto cartesiano parte de dois conjuntos disjuntos, de grandezas discretas, formando as possíveis combinações que podem ser contadas. Por exemplo: Para ir à escola Clara usa uniforme completo composto de uma calça e uma blusa. Ela dispõe de duas calças: uma azul e outra preta e 3 blusas nas cores: branca, azul e vermelha. Sabendo que para ir à escola, ela sempre usa uma dessas calças e uma das blusas do uniforme, de quantas maneiras diferentes Clara pode se vestir?

Após termos discutido amiúde as ideias teóricas, de cunho psicológico, que dão suporte ao nosso estudo, discutiremos na próxima seção seu percurso metodológico.

3 I PERCURSO METODOLÓGICO

Os dados dessa pesquisa é uma parte daqueles que foram coletados por um estudo de mestrado, o qual, por sua vez, foi desenvolvido no seio de dois projetos que se complementam, sendo um com financiamento CAPES/INEP (Nº 15727) e outro financiado pela FAPESB (Nº: PES 0019/2013).

Para efeito de entendimento explicamos que o estudo de mestrado investigou 59 professores do Ensino fundamental 14 dos quais atuando nos anos finais. Foi pedido que cada professor elaborasse oito (08) situações-problema no campo das estruturas multiplicativas (que envolvesse uma multiplicação e ou divisão). Foi esclarecido aos professores que eles tinham total liberdade para a criação dessas situações.

Neste artigo, foram considerados apenas os 14 professores que ensinam Matemática, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Esses trabalhavam em duas escolas públicas (*A* e *B*), localizadas em duas cidades do interior da Bahia.

A *Escola A* pertence à Rede Municipal está localizada em uma cidade de aproximadamente 20 mil habitantes. A *Escola B* pertence à Rede Estadual e localizada num município de aproximadamente 200 mil habitantes.

Esses 14 professores elaboraram ao todo 111 problemas (era esperado 112 problemas (14 X 8), porém houve 1 branco). Para classificar esses problemas, foram chamados oito especialistas em Educação Matemática (três doutores, um doutorando, um mestre e três mestrandos) que individualmente, e sem nossa interferência, avaliou cada um dos problemas. Esses especialistas foram denominados de juízes.

Dentre as 111 situações elaboradas, eles consideram 27 como problemas inadequados. Para esse artigo consideraremos, apenas, os 84 considerados adequados.

4 I RESULTADOS

Consideramos um resultado importante o fato de 24% dos problemas elaborados ser classificados como inadequados. Isso porque: sua resolução não envolvia multiplicação ou divisão, ou ainda, por falta de dados no enunciado sugeria várias soluções. Entretanto, neste artigo trataremos apenas dos problemas classificados como adequados.

Apresentamos a seguir a distribuição das situações-problema elaboradas pelos professores sujeitos de nossa pesquisa.

Relação	Quaternária						Ternária			
Eixo	PS		PD		PM		CM		PrMe	
Classe	1pM	MpM	1pM	MpM	1pM	MpM	Rel.D	Ref.D	CR	COM
Sujeitos (N = 14)	78,57% 66 de 84	4,76% 4 de 84	1,19% 1 de 84	0	0	0	0	7,14% 6 de 84	5,95% 5 de 84	2,38% 2 de 84

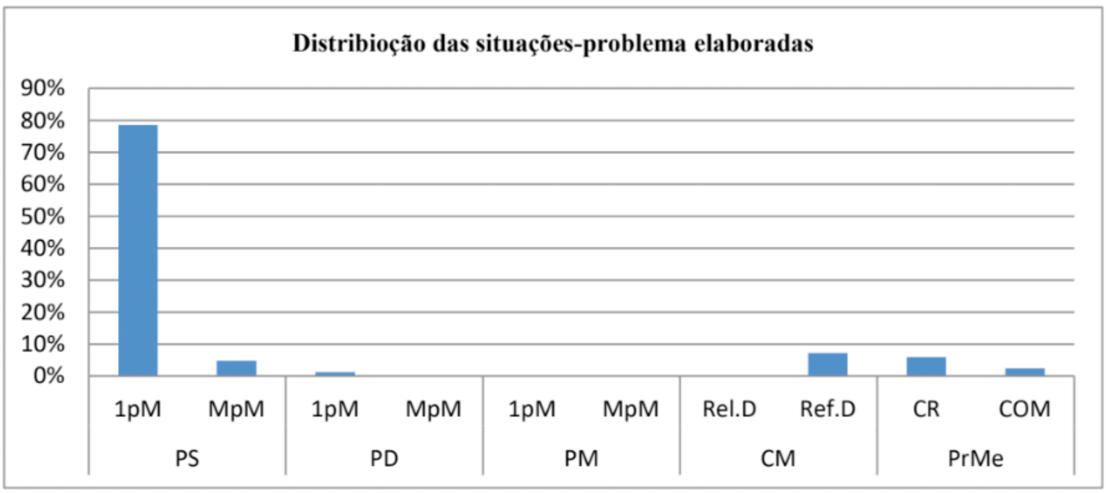


Figura 6: Distribuição das situações-problema elaboradas

Os dados da figura 6 mostram uma concentração de situações-problema elaboradas por esse grupo de professores envolvendo um único conceito de estrutura multiplicativa, qual seja, o de proporção simples na classe um-para-muitos.

Isso aponta que, ao preencher nosso instrumento de coleta de dados, os professores lembraram ou consideraram, com maior ênfase, aquelas cujo conceito envolve uma proporção simples na classe 1pM, seguido de muito longe da classe Ref.D (78,57% e 7,14%, respectivamente).

Corroboramos com as ideias de Gitirana et al (2014) quando consideram que as situações-problema agrupadas na classe 1pM do eixo PS são protótipos da multiplicação, pois sua resolução comumente se apoia numa relação ternária do tipo $a \times b = c$; $c \div a = b$, e $c \div b = a$. Este tipo de resolução nos permite fazer uso da soma de parcelas iguais repetidas. Tal estratégia reside numa filiação entre o campo conceitual aditivo e o multiplicativo.

Este resultado chama a atenção, pois esperávamos que esse grupo, por trabalhar com estudantes do 6º ao 9º ano, os quais possivelmente possuem maturidade cognitiva para expansão dos conceitos multiplicativos, diversificassem a elaboração das situações-problema. Neste aspecto, concordamos com Magina (2011) quando afirma que, para além dos protótipos, as demais situações precisam ser trabalhadas pelos professores para que possam ser apreendidos pelos estudantes.

Nos estudos de Merili et al. (2013) o percentual de situações agrupadas no eixo PS, na classe 1pM foi de 90%, maior que o índice que encontramos. Este dado reforça nossa preocupação, ainda mais, quando comparamos esses dados com resultados de estudos cujo objetivo era avaliar o desempenho de estudantes (Merlini et al. 2013, Gitirana et al. 2014, por exemplo). Nos estudos citados o desempenho dos estudantes foi maior, exatamente, no eixo PS e na classe 1pM. Não temos a intenção de discutir a relação entre esses resultados. Apenas ressaltamos nossa preocupação e consideramos que estudos com tal objetivo podem trazer contribuições importantes para o campo da Educação Matemática.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse artigo é discutir o tipo de situação-problema que o professor do Ensino Fundamental elabora envolvendo uma comparação multiplicativa. A análise dos resultados, referente aos 14 participantes do estudo, permite-nos fazer algumas considerações.

Os resultados encontrados revelaram que, apesar do êxito na elaboração da maioria das situações-problema, tanto do ponto de vista conceitual, como do ponto de vista da adequação das situações dentro do Campo Conceitual Multiplicativo, na distribuição das situações-problema os professores não avançam em relação ao nível de dificuldade, considerando os tipos de problemas apresentados na figura 1.

Partindo dos resultados encontrados, é momento de refletir se este é o conceito multiplicativo mais trabalhado em sala de aula. Se tal acontece, significa que tendo o professor, ao ser solicitado a elaborar situações-problema, lembrado daquelas nas quais são consideradas protótipos do campo multiplicativo, possivelmente são aquelas mais trabalhadas em sala de aula. Assim, fica claro que a expansão dos conceitos multiplicativos, para o estudante, não acontece. Ou seja, para o estudante também fica limitada a expansão dos conceitos multiplicativos, o que leva a entendimentos errôneos sobre esse campo como, por exemplo, “multiplicação sempre aumenta”, “divisão sempre diminui”, “dividir significa repartir em parcelas iguais”, “multiplicar significa somar parcelas iguais”.

Temos a convicção que a expansão de um campo conceitual requer a mobilização de diversos conceitos. Nesse sentido, consideramos que a escola, na pessoa do professor, tem a responsabilidade de propor ao estudante o contato com diversas situações-problema, para que possa promover a ruptura entre o campo aditivo e o multiplicativo.

Assim, consideramos que nosso estudo pode contribuir para o debate sobre a formação do professor de Matemática, em especial sobre a formação daqueles que atuam nos últimos ciclos do Ensino Fundamental, pois, corroboramos com Verganud (2009) quando afirma que os conceitos matemáticos desenvolvem-se ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações. Portanto, para além dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997.

____________Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores.** Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

GITIRANA, V; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S; SPNILLO, A. **Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** São Paulo: PROEM, 2014.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. **O Desempenho dos estudantes de 4ª Série do Ensino Fundamental frente a Problemas de Estrutura Multiplicativa**. In: X encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Ilhéus: Via Literarum. v. 1. p. 1-11, 2010.

______________. **A Estrutura Multiplicativa sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem.** 3º SIPEMAT, Fortaleza, 2012.

MERLINI, V. L; MAGINA, S; SANTOS, A. **Estrutura Multiplicativa: Um Estudo Comparativo entre o que a professora elabora e o desempenho dos estudantes**. Ata do VII Congresso Ibero-americano de Educação Matemática – VII CIBEM. Montevideu, 2013.

NUNES, T.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2009.

SOUZA, E. I. R. **Estruturas Multiplicativas: concepção de professor do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus, 2015.

SOUZA, E. I. R.; MAGINA, S. **Comparação Multiplicativa: Um Estudo Com Professores Do Ensino Fundamental.** Anais do IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matermática – IV SIPEMAT. Ilhéus, 2015.

VERGNAUD. G. A Multiplicative Structures. Em R. Lesh & M. Landau (Eds.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures.** New York: Academic Press, 1983, pp.127-17

_______________ Multiplicative conceptual field: what and why? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

______________ A Teoria dos Campos Conceituais. In BRUN, J. (Ed.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

______________ **A Criança, a Matemática e a Realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução: Maria Lúcia Faria Mouro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

CAPÍTULO 8

"OS PREÇOS ESTÃO NA HORA DA MORTE" - TEMA GERADOR NO ENSINO DE FRAÇÕES E NÚMEROS DECIMAIS NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Hosana Silva de Santana
Universidade de Pernambuco campus Mata Norte
Recife-PE

Mirtes Ribeiro de Lira
Universidade de Pernambuco campus Mata Norte
Recife-PE

RESUMO : Este relato apresenta os resultados de uma pesquisa que teve por objetivo analisar o desempenho dos estudantes do EJA nível II (8º e 9º ano) após uma intervenção pedagógica sobre frações e números decimais numa perspectiva freireana em torno do tema gerador "Os preços estão na hora da morte". Para a realização do estudo utilizamos como procedimento metodológico a pesquisa-ação que é concebida e realizada em estreita associação com a ação ou com a resolução de um problema coletivo em que os pesquisadores e participantes estão envolvidos de forma cooperativa ou participativa. A realização da intervenção pedagógica favoreceu aos estudantes da EJA reconstruir seus conhecimentos sobre fração e números decimais a partir de suas experiências, onde o tema gerador esteve relacionado com seus interesses e vivências contribuindo para o aprendizado da Matemática.
PALAVRAS CHAVE: Tema gerador. Intervenção pedagógica. Matemática, Educação de Jovens e Adultos.

ABSTRACT: This report presents the results of a survey that aimed to analyze the performance of the students of ADULT and YOUTH EDUCATION level II (8th and 9th year) after an educational intervention about fractions and decimal numbers in freireana around the theme “generator prices are at the time of death “. To perform the study used as methodological procedure action research that is designed and carried out in close association with the action or the settlement of a collective problem in which researchers and participants are involved in order cooperative or participatory. The achievement of pedagogical intervention favored students from the EJA rebuild their knowledge of fraction and decimal numbers from their experiences, where the theme generator was related to their interests and experiences contributing to the learning of mathematics.
KEYWORDs: Theme generator. Pedagogical intervention. Mathematics, adult and youth education

1 I INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, com a evolução constante do ensino da Matemática, defende-se à ideia e a necessidade de ensinar de forma contextualizada, porém, muitos professores consideram que contextualizar é apenas encontrar aplicações práticas para a Matemática no dia a dia do aluno. Fernandes (2006) vai além desta concepção, e afirma que contextualizar é o ato de colocar no contexto, ou seja, colocar alguém a par de alguma coisa; uma ação premeditada para situar um indivíduo no lugar no tempo e no espaço desejado. Ele ressalta ainda, que a contextualização pode também ser entendida como uma espécie de argumentação ou uma forma de encadear ideias. A contextualização do conhecimento matemático em conteúdos de outras disciplinas é outra forma de mostrar a contribuição da Matemática na leitura dos diversos fenômenos naturais e sociais em que outras ciências se apresentam. Por isso, concordamos com Giassi e Moraes (2010), ao afirmarem que o objetivo de se trabalhar com a contextualização é dar condições para uma aprendizagem motivadora, que proporcione ao aluno fazer uma relação do conhecimento do seu cotidiano com a própria Matemática.

A contextualização no ensino da Matemática, não é trabalhar o conteúdo envolvendo apenas o cotidiano do estudante, e sim o envolvendo com contextos que tenham significado e que possa mobilizá-lo para que se sintam motivados e percebam a importância da Matemática como mecanismo de transformação da realidade, e que também possa exercer a cidadania e sejam capazes de desenvolver uma atitude crítica diante dos problemas que envolvem o meio social em que vivem.

Os estudantes que frequentam a Educação de Jovens e Adultos (EJA) na maioria das vezes tem conhecimento de Matemática que foram aprendidos de maneira informal ou intuitiva em seu dia a dia. O educador deve, então, valer-se desses conhecimentos que os estudantes trazem para a sala de aula, e tornar como ponto de partida nas situações matemática apresentadas e fazer uma ligação do cotidiano com situações ligadas a outras áreas do conhecimento. Entretanto, dentre tantos desafios para o professor da EJA, encontra-se a falta de motivação dos estudantes aprenderem conteúdos da Matemática por apresentarem dificuldades em alguns conceitos básicos de aritmética, pois muitas vezes eles não percebem a conexão entre a Matemática vivenciada por eles e o conceito matemático explorado de maneira conceitual (no ambiente sala de aula).

Nesse sentido, deve o professor possibilitar a esses estudantes o desenvolvimento de atitudes e capacidades de modo a despertar suas habilidades, tornando-o capaz de lidar com novas situações. Para tanto, é necessário que cada professor propicie condições que favoreçam a curiosidade e o desejo de aprender, valorizando o pensamento de cada estudante. Além disso, é necessário que os professores da EJA tenham um olhar adequado aos diferentes discursos emergidos da apresentação dos conceitos matemáticos abordados em uma sala de aula.

2 I TEMA GERADOR

O uso de “temas geradores" emergiu da proposta pedagógica elaborada por Paulo

Freire (1987, p. 53) na qual segundo o autor é assim chamado porque, "qualquer que seja a natureza de sua compreensão como da ação por eles provocada, contém em si a possibilidade de desdobrar-se em outros tantos temas que, por sua vez, provocam novas tarefas que devem ser cumpridas".

A proposta procura romper a dissociação entre conhecimento científico e cidadania, quanto o processo de produção da cultura acadêmica, proposto a partir do diálogo entre saberes, popular e científico, em que a apreensão do conhecimento é construída coletivamente, a partir da análise das contradições vivenciadas na realidade local (SILVA, p. 2007, p. 13). Assim, a proposta pedagógica freireana via tema gerador, apoia-se na dialogicidade como referência para a construção do conhecimento e como metodologia para a vivência das atividades participativas da comunidade.

Nesse sentido, o uso de tema gerador em sala de aula estará voltado para a formação social e crítica do estudante, aberto à participação, ao uso e a reconstrução do saber. Para realização de sua *práxis* é necessário considerar as seguintes as etapas organizativas: (a) levantamento preliminar da realidade local; (b) escolha de situações significativas; (c) caracterização e contextualização de temas/contratemas geradores sistematizados em uma rede de relações temáticas; (d) elaboração de questões geradoras; (e) construção de planejamentos para a intervenção na realidade; (f) preparação das atividades comunitárias participativas.

A importância da utilização de temas geradores em sala de aula pode ser atribuída pelo fato de que além de contextualizar o aprendizado, podem permitir o desenvolvimento de conhecimentos e valores que ajudam os estudantes a compreenderem e interagirem melhor com o mundo ao seu redor. Por conseguinte, a escolha do tema gerador deve estar adequada à realidade do estudante, para promover uma reflexão crítica sobre o conteúdo abordado.

Desse modo o presente estudo, teve como objetivo analisar o desempenho dos estudantes do EJA nível II (8º e 9º ano) após uma intervenção didática sobre frações e números decimais numa perspectiva freireana em torno do tema gerador "Os preços estão na hora da morte".

3 I RELATO DA EXPERIÊNCIA

A EJA tem como principal referência à pedagogia dialógica e problematizadora de Paulo Freire (FREIRE, 1996) que propõe que haja uma participação ativa e dinâmica do aluno trabalhador na sala de aula. O tema gerador trabalhado na sala de aula de EJA foi “Os preços estão na hora da morte" este é um jargão muito utilizado, especialmente, entre a população ao se tratar dos custos de manter a família.

A intervenção pedagógica utilizada buscou ser informativa, formativa e dinâmica, dando oportunidade para que os estudantes da EJA participassem de forma mais efetiva, uma vez que o tema gerador é algo bastante conhecido entre eles. A experiência na qual relatamos faz parte do trabalho de pesquisa realizado para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Pernambuco *campus* Mata Norte.

Para atingir o objetivo na pesquisa adotamos os pressupostos da teoria da pesquisa-ação, que é concebida e realizada em estreita associação com as ações coletivas, nos quais pesquisadores, professores e estudantes se envolvem de modo cooperativo ou participativo, com propostos comuns em atividades planejadas e realizado por todo o grupo.

A pesquisa-ação, conforme Thiollent (1985, p. 14) é "uma das formas de pesquisa qualitativa, concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou resolução de um problema coletivo, no qual os pesquisadores e participantes representativos a situação ou do problema, estão observação". A opção pela abordagem colaborativa da pesquisa-ação foi por entender que a função de investigador vai além de apenas coletar informações, permeia pelo papel de agente transformador e atuante nas ações educativas que ocorrem durante a construção do conhecimento, ou seja, se dá conjuntamente com a transformação de práticas.

Participaram desta intervenção 20 estudantes da turma do módulo V da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da Escola Municipal Dom Bosco de Sena, localizada no município de Jaboatão dos Guararapes-PE.

A realização dessa experiência foi composta de três momentos: (1) aplicação do pré-teste no primeiro momento; e (2) no segundo realização de uma intervenção pedagógica sobre frações e números racionais e (3) aplicação do pós-teste.

A aplicação do pré-teste foi realizada com todos os estudantes que se encontravam na sala e se predispuseram a participar. Após a apresentação à turma explicamos que estávamos coletando dados para o nosso trabalho de conclusão de curso e que contávamos com a colaboração deles em responderem as questões propostas a partir do que eles já sabiam e que as mesmas não serviriam como avaliação da escola.

O segundo momento apresentamos o tema gerador da intervenção com a seguinte frase "OS PREÇOS ESTÃO NA HORA DA MORTE", o qual foi escrito no quadro e solicitado à opinião dos estudantes, se eles concordavam com esta afirmativa e em seguida foi realizado alguns questionamentos, tais como: O que estariam causando a alta dos preços? Como eles sabiam que os alimentos, produtos estavam com preços elevados? Onde os preços estavam mais altos nos produtos ou nos alimentos? E assim por diante.

A partir da discussão começamos a introduzir conceito de decimal/fração fazendo uma correlação dos valores das contas de água, luz e de gás, alimentação, diversão e saúde que os estudantes descreviam a partir da realidade deles. Eles nos relataram por quanto compravam alguns alimentos no começo do ano e comparávamos o preço de janeiro com o preço atual, calculando assim a diferença entre preços, onde foi utilizado o quadro branco para realizar as operações que sempre continham números decimais. É interessante pontuar que a temática provocou várias discussões, tais como: girou em torno da política atual, enquanto alguns acreditavam que o governo estava tentando solucionar a inflação, outros tinham a opinião contrária, afirmando que o governo não estava se importando com os pobres; também nos relataram que era importante saber as operações com os números decimais para fazer as pesquisas de preços entre supermercados e para calcularem o seu troco. Ao encerrar as discussões realizamos algumas situações problemas no quadro envolvendo as quatro operações com números decimais. Após isso começamos a discussão de quanto eles gastavam com a alimentação. Eles relataram que gastavam em torno da metade do salário com a mesma, e aproveitamos com essa informação e trabalhamos o conteúdo tomando como base o valor de um salário mínimo (que no momento era de R$ 788,00). Levando esse dado correspondendo à fração eles gastavam em torno de 1\2 do salário e fomos ao quadro calcular, então perguntamos o que eles faziam com a outra parte restante 1\2 do salário o que faziam?

Então nos disseram que tinha que pagar contas de água, luz e de gás não sobrando nada ou pouquíssimo para a saúde e diversão. Com isso, gerou novamente a discussão em torno de políticas públicas, falta de médico no posto de saúde do bairro, falta de oportunidades para a diversão da família. Trazendo todos para a questão do conteúdo a ser trabalhado, usamos o quadro para resolver algumas questões utilizando as operações com números fracionários. Entretanto, muitos deles relataram que tinham esquecido as propriedades das operações com frações e nem da transformação de um número fracionário em um numero decimal o que nos levou a trabalhar tais conteúdos de forma contextualizada.

O terceiro momento da realização desta pesquisa ocorreu após a intervenção didática, com a aplicação do pós-teste aos estudantes que se encontravam na sala de aula. Embora encontrassem estudantes que não estavam presentes no momento do pré-teste eles também realizaram o pós-teste. Entretanto para fins de análise serão apenas computados os pré-testes e pós-testes dos estudantes que realizaram os dois testes, nos seus respectivos momentos.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com Bell (1997, p. 158) "na análise, interpretação e apresentação de dados há que proceder cuidadosamente para não ir além daquilo que os resultados permitem". Nesse sentido, tendo em conta o objetivo do estudo, analisar o desempenho dos estudantes do EJA sobre o conhecimento de frações e decimais seguimos uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo a partir dos dados quantitativos. Os resultados obtidos em cada questão foram apresentados e analisados separadamente. A análise dos dados foi realizada em três etapas: (1) análise dos resultados do pré-teste; (2) análise dos resultados do pós-teste e (3) análise comparativa dos resultados do pré-teste com o do pós-teste.

Para fins de compreensão os testes foram compostos de 03 questões com 04 itens, na qual a primeira tratava da resolução das quatro operações aritmética com frações; a segunda questão abordava operações aritméticas com números decimais; e a última questão solicitava aos estudantes que representassem as frações em números decimais. Vale salientar que o formato das questões propostas para a realização do teste foi apresentado no mesmo formato de atividades em que os estudantes estavam familiarizados, ou seja, não contextualizada. Optamos por essa forma não contextualizada para não por risco nos resultados, uma vez que ao elaborar as questões recebemos a informação de que os estudantes não estavam familiarizados com questões contextualizadas. Fernandes (2006) nos faz lembrar que a Matemática ainda hoje é utilizada como produto de um processo histórico que levou muitos séculos para sistematizá-la e que a maioria dos docentes trabalha como se fosse produto pronto e acabado, desvinculado de um processo social. Para a autora "contextualizar é situar um fato dentro de uma teia de relações possíveis em que se encontram os elementos constituintes da própria relação considerada (p. 08)". Mas, infelizmente, ainda encontramos essa prática de atividades não contextualizada não só em turma de EJA como também em classes regulares. Com efeito, o quadro 01 apresenta uma visão geral do desempenho dos 15 estudantes, nas questões aplicadas no pré-teste, como segue abaixo.

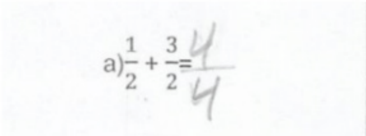
Result.	**Questão 01**				**Questão 02**				**Questão 03**			
	A	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
Acertos	01	01	13	---	12	--	09	09	---	---	---	---
Erros	14	14	02	12	01	13	03	02	14	13	14	14
Branco	---	---	---	03	02	02	03	04	01	02	01	01

Quadro 01: Desempenho dos estudantes na aplicação do pré-teste

Em conformidade o quadro 01 exposto, acima, observamos que apenas os itens que obtiveram mais acertos foi o item "C" da questão 01 com 87% e os itens "A", "C" e "D" da questão 02 com 80% e 60%, respectivamente. Temos que em relação à questão 01 os itens com maior número de erros foram a "A" e "B" as que envolviam adição e subtração de frações com denominadores iguais e o item "D" com divisão. Estudos comprovam que as operações com frações geram sempre muitas dificuldades nos estudantes do ensino fundamental, principalmente nas situações em que são exigidas algumas propriedades. Esse fato vem ratificar que somente a aplicação da regra em qualquer operação não resolve o grau de dificuldade, é fundamental que os estudantes entendam a sua construção.

Ainda na primeira questão, os estudantes não souberam fazer a adição e a diferença de duas frações, com denominadores iguais. O erro que predominou foi efetuar a adição e subtração numerador com numerador e denominador com denominador o que indica a dificuldade dos estudantes por não perceberem a diferença entre números fracionários e números inteiros. Segue abaixo alguns exemplos das respostas dos estudantes da questão 01:

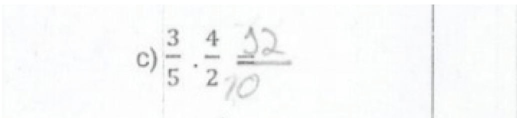
Resposta do estudante nº 04



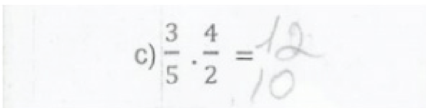
Resposta do estudante nº 13

Este tipo de erro conforme Carvalho e Carvalho (2001) não consideram como sendo de construção de conhecimento, mas como erro no uso de conhecimentos construídos, por o estudante utilizar procedimentos inadequados mesmo tendo estruturas mentais necessárias.

O resultado apresentado no item "C", dessa mesma questão, obteve 87% de acerto pelos estudantes. O que reforça nossas inferências, de que os estudantes utilizaram o mesmo raciocínio da multiplicação dos números inteiros quando operam com os números racionais.

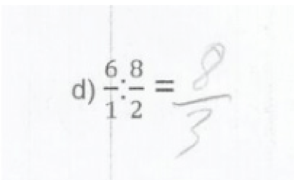


Resposta do estudante nº 02

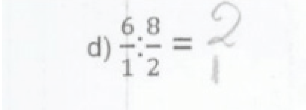


Resposta do estudante nº 05

Já no item "D" da questão 01 que trata de uma divisão simples com números fracionários, ocorreram 100% de erros, segue dois exemplos.



Resposta do estudante nº 05



Resposta do estudante nº 06

De acordo com o resultado observa-se que os estudantes além de não saberem fazer divisão de números inteiros não tem a compreensão da divisão de números fracionários, daí o alto índice de erros neste item. Percebemos que essa dificuldade não advém apenas da pouca compreensão de números fracionários, mas também a falta de domínio das regras operatórias evidenciando assim, obstáculos encontrados por eles na divisão de frações.

A questão 02 apresenta quatro itens de operações simples (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números decimais, são eles:

a) 0,5 + 0,1 =

b) 0,15 - 0,8 =

c) 0,72 x 5 =

d) 1,5 : 3 =

Dentre os itens a letra "B", que tratava de uma subtração, foi à única que não ocorreu acerto. Os demais itens o percentual de acerto girou em torno de 80% o item com adição e 60% os itens com multiplicação e divisão. Percebemos, então, que os estudantes não apresentaram dificuldade de posicionar a vírgula, desse modo podemos considerar que os estudantes tenham a compreensão da operação com números decimais, à maioria dos erros cometidos está relacionados com as operações desejadas.

A questão três solicita aos estudantes representar as frações 1/2, 3/4, 5/(10), 3/6 em números decimais. Como esta questão tem o mesmo principio de resolução transformar números fracionários em números decimais, a primeira dificuldade encontrada pelos alunos é saber qual será o método de resolução a ser usado; a segunda dificuldade esteve na resolução que deve ser uma divisão, sendo esta a operação em que os alunos apresentam o maior grau de dificuldade, nesse item não houve nenhum acerto. Ao finalizarmos a análise dos resultados do pré-teste, percebe-se que o modo como o conteúdo foi tratado em sala de aula parece ter sido insuficiente para dar sentido às operações de frações na aprendizagem dos estudantes do EJA. Isto posto, a proposta de intervenção pedagógica, teve como objetivo trabalhar os conteúdos de fração e números decimais na perspectiva pedagógica da freireana de forma contribuir para a construção do conhecimento dos estudantes sobre fração e números decimais.

Neste momento iremos realizar a segunda etapa da análise dos dados a partir dos resultados encontrados no pós-teste realizado após a intervenção pedagógica. De um modo geral os resultados apresentados no pós-teste foram bastante significativos quando comparados com o pré-teste. Segue o quadro geral dos resultados do desempenho dos 15 estudantes após a intervenção pedagógica.

Result.	Questão 01				Questão 02				Questão 03			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
Acertos	13	11	13	08	12	---	08	13	13	11	14	14
Erros	02	03	02	04	02	13	05	01	01	03	01	01
Branco	--	01	--	03	01	02	02	01	01	01	---	---

Quadro 02: Resultados do desempenho dos estudantes no pós-teste

Conforme os resultados apresentados no quadro 02 acima, observamos de um modo geral que os estudantes conseguiram superar alguns obstáculos na resolução das atividades aplicadas. Os resultados mostram que exceto o item "B" da questão 02, as demais questões os estudantes tiveram um desempenho em média superior a 75%. Na realidade o item "B" da questão 02 revela uma dificuldade específica dos estudantes em resolver a subtração com números decimais por ser decorrente da dificuldade de resolver subtração de números inteiros.

A terceira etapa da análise consiste um estudo comparativo com os resultados encontrados no pré-teste com o do pós-teste. A análise comparativa dos dados do pré-teste com o pós-teste, permite verificar que foi no pós-teste que se observam melhores resultados, principalmente nos itens da questão 03 que trata de representar frações em números decimais, onde o quantitativo de acertos foi na ordem superior a 70% em relação ao pré-teste. Vale salientar, que em relação aos resultados do pré e pós-teste os itens da questão 01 que obteve uma percentagem de respostas corretas mais baixas, estão mais direcionados para as dificuldades de resolução de operação matemáticas simples (subtração e divisão) com números inteiros.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aprender na fase adulta exige bastante esforço tanto da parte do estudante para compreender o assunto que lhe é passado, como por parte do docente que precisa utilizar uma metodologia adequada. A complexidade dos cálculos que envolvem as operações com frações, operações com números decimais e a transformação de números fracionários em decimais, levam muitas vezes os estudantes apresentarem dificuldades, pois é preciso pré-requisitos, como certas habilidades para poderem estruturar e resolverem os problemas.

Embora saibamos a importância de trabalhar os conteúdos de ensino de forma contextualizada, ainda persiste a prática pedagógica de forma mecânica, linear, desvinculado da realidade, levando aos estudantes a uma série de dificuldade ao tentar resolver problemas do cotidiano. Incorporar novas aprendizagens, explorar o saber cotidiano dos estudantes, acreditar na sua capacidade de aprender, de descobrir, de criar soluções, de desafiar, só será possível se no lugar de continuarmos com práticas pedagógicas ultrapassadas, utilizarmos métodos que levem em conta a lógica de quem aprende.

Desse modo, entendemos que ao procurarmos desenvolver em nossa prática pedagógica situações motivadoras com nossos estudantes conseguimos melhores resultados. Foi isso que aconteceu ao utilizarmos o tema gerador "Os preços estão na hora da morte", ao trabalhar o conteúdo de fração e decimal com os estudantes da EJA. Pois, foi observada durante a intervenção pedagógica que os estudantes tiveram uma participação ativa e dinâmica que evidenciaram através de posturas críticas e participativas dos estudantes no seu processo de ensino e aprendizagem, pois houve uma motivação gerada pelas próprias discussões. De acordo com Quadros (2004) trabalhando com um tema que tem relação com a realidade dos estudantes tem-se a possibilidade de ensinar o conteúdo e ao mesmo tempo e relacioná-los com o seu dia-a-dia permitindo a inclusão de um número maior de conceitos. Através do uso de temas, em nosso caso para a EJA, a organização curricular foi mais flexível onde proporcionou um olhar crítico quanto à questão trabalhada tanto nos aspectos sociais, políticos e econômicos.

Este trabalho teve como referência a pedagogia dialógica e problematizadora de Paulo Freire (1996) que é a principal referência para a Educação de Jovens e Adultos. Nas palavras de Paulo Freire (1987), enfatizamos que é preciso "organizar a escuta" das populações inseridas na realidade a ser transformada; a escuta, nos trará as "falas significativas", explicitando suas contradições e, portanto, os "temas geradores" de diálogo. Diante disso, constatamos que com a utilização de tema gerador na sala de aula ocorreram diversas participações ativas e dinâmicas dos estudantes, evidenciando que a experiência de vida pode servir como base para a construção e reconstrução de conhecimentos.

Portanto, a realização desta intervenção pedagógica favoreceu ao estudante da EJA reconstruir seus conhecimentos sobre fração e números decimais a partir de suas experiências, onde o tema gerador esteve relacionado com seus interesses e vivências contribuindo para o aprendizado da Matemática.

REFERÊNCIAS

BELL, J. **Como realizar um projecto de investigação**. Lisboa, Gradiva, 1997.

CARVALHO, D. D. M.; CARVALHO M. M. Para compreender o erro no processo ensino-aprendizagem. **Presença Pedagógica**. v. 7, n. 42, p. 61-75, 2001.

FERNANDES, S. S. **Contextualização no Ensino de Matemática – Um Estudo com Alunos**

e Professores do Ensino Fundamental da Rede Particular de Ensino do Distrito Federal. Universidade Católica de Brasília, 2006. Disponível: www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf. Acesso: 26/09/2015.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 17ª. ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra,. 1987

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIASSI, M.G.; MORAES, E. C. Um estudo sobre a contextualização do ensino nos PCNEN e na proposta curricular de Santa Catarina. In: VI Simpósio Internacional e VII Fórum Nacional de Educação, 4, 2010, Rio Grande do Sul. **Anais Currículo, Formação Docente, Inclusão Social, Multiculturalidade e Ambiente, 2010**

QUADROS, A. L. A água como tema gerador do conhecimento químico. **Química nova na escola**, n. 20, p. 26-31, nov.2004.

SILVA, A. F. G. **A busca do tema gerador na práxis da educação popular.** Curitiba: Editora Gráfica Popular, 2007.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez, 1985.

CAPÍTULO 9

RESSONÂNCIAS DO APRENDER, SEGUNDO DELEUZE, EM UM FAZER DOCENTE: EXPLORANDO O CONCEITO DE FRAÇÃO EM TURMAS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Wagner Rodrigues da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Instituto de Matemática e Estatística
Porto Alegre – RS

RESUMO: Aprender decorre da interpretação que cada pessoa faz do que está a sua volta e lhe emite signos. Este pressuposto norteou a construção deste texto, a partir de uma prática docente desenvolvida em duas turmas de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, por meio da qual foi proposta a elaboração do conceito de fração, levando-se em consideração diferentes contextos e significados para essa forma de representação dos números racionais. Os estudantes, em geral, apresentaram elementos indicadores de uma aprendizagem do conteúdo proposto, não concluída em termos de um acabamento conceitual, visto que a representação fracionária referente ao conceito de número racional é móvel, conforme seu contexto de significação. Algumas constatações e percepções experimentadas nessa prática expressaram-se por meio de um fazer compartilhado entre os alunos, complementado por momentos de reflexão individual, e aqui são relatadas via análise dos registros e produções realizadas. Enquanto professor-pesquisador, acompanhado de Deleuze, percebi-me como alguém, cujo fazer docente em um cotidiano de vivências de afetos e decifração de signos altera-se e me afeta de maneira contínua.

PALAVRAS-CHAVE: signos, Deleuze, aprendizado, fração.

ABSTRACT: Learning comes from the interpretation that each person makes of what is around him and sends him signs. This presupposition guided the construction of this text, based on a teaching practice developed in two classes of sixth grade elementary school students, through which it was proposed to elaborate the concept of fraction, taking into account different contexts and meanings for this form of representation of rational numbers. The students, in general, presented indicator elements of a learning of the proposed content, not completed in terms of a conceptual ending, since the fractional representation regarding the concept of rational number is mobile, according to its context of signification. Some findings and perceptions experienced in this practice were expressed through a shared doing among the students, complemented by moments of individual reflection, and are reported here through the analysis of the records and of the productions made. As a professor-researcher, accompanied by Deleuze, I perceived myself as someone whose teaching in a daily life of affections and decipherment of signs changes himself and is affected in a continuous way.

KEYWORKS: signs, Deleuze, learning, fraction.

1 I COMEÇO DE CONVERSA

Acredito na necessidade de repensarmos os processos de escolarização visando, especialmente, a qualificação do ensino. Entusiasmado com essa possibilidade, busquei caminhos outros para a condução do meu fazer pedagógico, encontrando na pesquisa em Educação Matemática um campo de potencialidades e, em algumas noções do filósofo Deleuze (2003), inspiração para tal empreitada. Com o apoio dessas perspectivas, almejei desenvolver um trabalho focado no aprendizado de frações, no sexto ano do Ensino Fundamental, considerando que a compreensão de tal conceito constitui ferramenta importantíssima na vivência de situações do dia-a-dia. Nessa trajetória, busquei, através das atividades propostas, contemplar diversos contextos e significados, nos quais tal forma numeral é empregada.

Além disso, como professor-pesquisador, preocupei-me em ofertar situações e atividades potencialmente capazes de despertar o aprendizado nos alunos, postura esta que mobilizou o meu próprio aprendizado e sensibilizou meu “ver-se” e “fazer-se” docente.

2 I O APRENDIZADO EM UMA PERSPECTIVA DELEUZIANA

Gilles Deleuze (1925 – 1995), filósofo francês, não desenvolveu uma teoria que, de alguma forma, explicasse a ocorrência da aprendizagem. Muito diferente disso, o mesmo:

> Centrou-se na criação de conceitos, principalmente a partir da leitura das obras de filósofos modernos como Spinoza, Leibniz, Hume, Kant, Nietzsche e Foucault e de artistas como Proust e Kafka. Explorou temas filosóficos voltados para produção de conceitos como signo, diferença, sentido, evento, rizoma, etc. (GALO, 2013)

Contudo, em seu livro *Proust e os signos*, o filósofo apresenta suas considerações sobre aprendizado, a partir da análise da obra de Marcel Proust, *Em busca do tempo perdido*, cujo autor relata o aprendizado de um homem de letras.

Um dos focos de Deleuze se encontra na exploração dos signos proustianos, com seus vínculos temporais, e suas relações com a noção de aprendizado, uma vez que:

> Aprender diz respeito essencialmente aos *signos.* Os signos são objeto de um aprendizado temporal, não de um saber abstrato. Aprender é, de início, considerar uma matéria, um objeto, um ser, como se emitissem signos a serem decifrados, interpretados. Não existe aprendiz que não seja “egiptólogo” de alguma coisa. (DELEUZE, 2003, p. 4)

Ou seja, não há aprendizado que não envolva encontros com objetos e a interpretação de signos por eles emitidos. Tudo que é aprendido decorre da decifração e atribuição de sentido aos signos emitidos pela matéria, ser ou objeto.

Isto nos permite a pergunta: o papel da escola poderia consistir, de alguma forma, na tentativa de propiciar encontros e afetos potencialmente capazes de desencadear um aprendizado?

São em encontros e nas situações de atordoamento que cada pessoa experimenta o contato com signos. A sensação de não compreensão, que violenta o pensamento e pode provocar a necessidade da interpretação. Algo até então não decifrado, mas que desperta o desejo à busca do sentido que esse algo traz consigo, caracterizando assim o surgimento do signo.

Nesse sentido, Gallo (2012) explica que:

> Qualquer relação, com pessoas ou com coisas, possui o potencial de mobilizar em nós um aprendizado, ainda que ele seja obscuro, isso é, algo de que não temos consciência durante o processo. É apenas ao final que aquele conjunto de signos passa a fazer sentido; e, pronto, deu-se o aprender, somos capazes de perceber o que aprendemos durante aquele tempo, que nos parecia perdido. (p. 3)

Sensibilizada, cada pessoa encontra-se em situação de buscar a verdade oculta no signo que a afetou. Isso porque, não há vontade prévia na busca da verdade e na origem do pensamento e do aprendizado. Pensa-se e aprende-se de maneira forçada, por ação de signos aleatórios à vontade do aprendiz. Aprender, nessa perspectiva, decorre de algo que nos é externo, que nos mobiliza, forçando o pensamento a interpretar.

3 I OS MUNDOS DOS SIGNOS E O APRENDIZADO

Ao descrever sua interpretação de aprendizado em *Proust e os signos*, Deleuze (2003) organiza os signos em quatro tipos distintos, dispostos em quatro mundos também distintos, que se interseccionam em alguns momentos.

O primeiro mundo é o dos signos mundanos, signos que substituem ações ou pensamentos. Um signo mundano esgota-se em si mesmo, uma vez que não remete a nenhuma verdade oculta. São signos autoexplicativos, pois não se mostram, por si só, sedutores ou provocativos, no sentido de nos despertar o desejo de aprender. Tais signos encontram-se esparsos por toda a parte, em todas as situações: os gestos, os jeitos, os esboços, as meias-palavras, tudo aquilo que não remete a nada, além de si mesmo, constitui o mundo dos signos mundanos. Embora vazios, não portando verdade a ser decifrada, nosso aprendizado está condicionado ao encontro com tais signos.

O segundo mundo sob o qual se organizam os signos é o mundo do amor. Para

Deleuze (2003, p. 7) “apaixonar-se é individualizar alguém pelos signos que traz consigo ou emite. É torna[r]-se sensível a esses signos, aprendê-los”, procurando explicar os mundos envolvidos no amado [Grifo meu].

Talvez os signos amorosos sejam os signos que, por sua coação, nos causam maior violência e necessidade de interpretação, devido ao potencial mobilizador do próprio amor, o qual pressupõe a compreensão do amado e de suas características.

O terceiro mundo, segundo Deleuze, é o dos signos sensíveis, das qualidades ou impressões sensíveis, ou seja, das qualidades que nos afetam.

> Uma qualidade sensível nos proporciona uma estranha alegria, ao mesmo tempo que nos transmite uma espécie de imperativo. Uma vez experimentada, a qualidade não aparece mais como uma propriedade do objeto que a possui no momento, mas como o signo de um objeto *completamente diferente,* que devemos tentar decifrar através de um esforço sempre sujeito a fracasso. Tudo se passa como se a qualidade envolvesse, mantivesse aprisionada, a alma de um objeto diferente daquele que ela agora designa. (DELEUZE, 2003, p. 11)

Ou seja, o imperativo transmitido por tais signos imprimem ao pensamento a necessidade de trabalhar na busca do sentido que trazem consigo, porém a qualidade experimentada acaba por revelar um novo objeto, tal como se explorássemos um casulo, desconhecendo que no seu interior há algo ainda não completamente definido. Mesmo sabendo-se da sua existência, o seu teor ainda é desconhecido.

De toda forma, os signos aqui referidos – mundanos, amorosos e sensíveis –, apresentam-se de forma incompleta, visto que “o sentido material não é nada sem uma essência ideal que ele encarna” (Deleuze, p. 12-13), a qual é necessária para expressar o que se passa no espírito.

Contudo, tais signos são indispensáveis para despertar em nós uma potência adormecida, o pensamento. Tal completude é alcançada somente no quarto mundo, formado pelos signos da arte.

> Ora, o mundo da Arte é o último mundo dos signos; e esses signos, como que *desmaterializados,* encontram seu sentido numa essência ideal. Desde então, o mundo revelado da Arte reage sobre todos os outros, principalmente sobre os signos sensíveis; ele os integra, dá-lhes o colorido de um sentido estético e penetra no que eles tinham ainda de opaco. (DELEUZE, 2003, p. 13)

Os signos da Arte são plenos em si mesmos, por seu sentido espiritual, caracterizados através de uma essência ideal.

Assim, os encontros com signos, em seus interseccionados mundos nos violentam o pensamento, despertando em nós a necessidade de interpretação e a ocorrência do aprendizado.

4 I ALGUMAS IDEIAS ENVOLVIDAS NO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL E AS INTERPRETAÇÕES ASSOCIADAS À REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Ao longo da pesquisa levaram-se em consideração alguns dos múltiplos empregos dos números racionais em sua representação fracionária, uma vez que "os contextos significativos ou de significação podem ser traduzidos como atividades, exemplos ou situações-problema nos quais o número racional está presente" (ROMANATTO, 1999, p. 41).

Essa perspectiva pode contemplar, entre outros, os seguintes aspectos, de acordo com Romanatto (1999):

a) fração como medida: estabelece uma relação entre a parte e o todo, o inteiro, como é o caso dos clássicos problemas de divisão de uma pizza ou de uma barra de chocolate;

b) fração como quociente de números inteiros ou como divisão indicada: está associada à ideia de partilha, na qual o inteiro é fracionado em partes do mesmo tamanho.

c) fração como razão: "uma razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades" (ROMANATTO, 1999, p. 42), cujas naturezas podem ser idênticas ou não.

d) fração como operador multiplicativo: relacionado à situação, na qual uma grandeza ou quantidade, habitualmente maior que a unidade, é dividida numa certa quantidade de partes iguais, das quais se destacam algumas.

e) probabilidade: "a representação, na forma fracionária, de uma probabilidade deve ser entendida com uma comparação entre as chances favoráveis ou necessárias e as chances possíveis" (ROMANATTO, 1999, p. 44). O cálculo das chances de se obter determinada face no lançamento de um dado ilustra bem este aspecto.

5 I PRÁTICA DOCENTE: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

O ponto de partida para o estudo aqui descrito foi a realização da prática docente de Matemática, em duas turmas do sexto ano do ensino fundamental, durante o ano letivo de 2015, momento no qual se buscou explorar o conceito de fração.

Tal proposta foi desenvolvida ao longo de cinco encontros, em cada uma das turmas, nos quais aos alunos foi solicitada a resolução de situações que envolviam o conceito em pauta, o qual se acreditava ser desconhecido pelas mesmas.

Ao longo de cada encontro, priorizou-se, num primeiro momento, que as atividades fossem desenvolvidas pelos alunos, sem nenhum tipo de ajuda ou intervenção do professor. Depois disso, passou-se às discussões em grande grupo, momento no qual cada um pode expressar suas ideias e considerações.

Ao término de cada aula, cada aluno, individualmente, respondeu a pergunta "O que eu aprendi hoje?”, momento no qual foi possível o registro de ideias e impressões. Além disso, na condição de professor-pesquisador, também fiz registros sobre as minhas percepções em relação ao andamento das atividades propostas.

Nas páginas que se seguem apresento, através de dois exemplos, uma descrição do trabalho realizado, acompanhado de algumas considerações dos alunos e deste professor-pesquisador.

Atividade 1 – O barril: nesta atividade, aos alunos organizados em grupos, solicitou-se a resolução da situação a seguir:

Um barril pode conter 7 litros de suco de uva. Quantas canecas de 2 litros são necessárias para encher o barril?

Figura 1: O barril

Fonte: David e Fonseca (1997, p.5)

Para a questão proposta na imagem anterior, algumas respostas foram: (i) “cabe três canecos e mais um pouco”; (ii) “três canecos e mais meio caneco”; (iii) “4 canecos vai sobrar”; (iv) “dá 3 canecos e uma fração, porque não deu tudo cheio”.

Todas as respostas indicam a percepção dos alunos no que diz respeito à existência de quantidades que não são inteiras, ou que são inteiras porém acrescidas de uma parte não inteira. Excetuando-se (ii), vemos que os mesmos não souberam informar com precisão o valor da parte não inteira, embora percebessem sua existência.

A resposta (iii) mostrou a percepção da existência da parte não inteira, e de alguma forma manifestou que a quantidade seria um número menor que 4. Talvez, implícita esteja a ideia de que tal parte seria um número maior que 3, porém menor que 4.

Como já se mencionou, a resposta (ii) apresentou a relação numérica exata no que diz respeito à quantidade de canecas que cabiam no barril ao empregar o termo “meio caneco”.

Além disso, mesmo não tendo sido explicitado na apresentação da atividade, observa-se que nenhuma das respostas apresentou-se na notação a/b, usual para frações.

Atividade 2 – O lançamento de um dado: organizados em grupos, os alunos tiveram que responder à situação a seguir:

Ao lançarmos um dado, ao acaso, quais são as chances de o resultado obtido ser o número 2? Represente numericamente essa chance.

Figura 2: O lançamento de um dado

Fonte: arquivo pessoal.

Sobre esta questão, algumas das respostas dadas pelos alunos foram as seguintes: (i) “tem uma chance em seis”; (ii) “tem 1 de 6”; (iii) “só um lado tem o 2, daí é só 1 de 6”; (iv) “ pois tem uma chance em 6”.

Todas as respostas apresentadas contêm, de maneira descritiva, a relação entre o número de chances favoráveis e o número de chances possíveis. Mesmo sem o emprego da notação habitual a/b, que designa uma fração, as respostas (i), (ii) e (iii) apresentam correção quantitativa. Como se percebe, em (iv) os alunos conseguiram representar a probabilidade utilizando a escrita fracionária habitual.

Como finalização da aula, ao responder a pergunta “O que eu aprendi hoje?”, alguns dos registros feitos pelos alunos foram: (i) “dá para escrever com um número em cima, uma barra e um número em baixo”; (ii) “tem um traço entre dois números, é fração”; (iii) “meio é sempre cinco. ‘Que nem’ meio real, que é cinquenta centavos”; (iv) “fração é um pedaço de uma parte maior, quando uma coisa é repartida”; (v) “fração é uma divisão que me fala quantos pedaços tem e quantos pedaços eu vou precisar”; (vi) “que as coisas podem ser repartidas em pedaços do mesmo tamanho”; (vii) “fração é uma divisão com dois números. Um número em cima e um número em baixo”.

Nas falas transcritas anteriormente, percebe-se a ideia de fração associada à divisão do inteiro em partes, ou seja, a ideia de fração como elemento de medição, visto que representa o tamanho da parte considerada em relação ao todo, sendo este o aspecto mais apresentado. Os demais significados contidos nas atividades propostas, como é o caso da fração como indicação de uma probabilidade, constaram somente nos registros de resolução das atividades específicas, não aparecendo neste momento final de sistematização da aula.

O outro aspecto que ficou perceptível diz respeito à representação das frações usando a notação a/b. As falas (i), (ii) e (vii) mostram esta percepção por parte dos alunos. No entanto os mesmos não relacionam a notação a/b com algo além dos próprios números contidos nesta escrita. Ao longo dos demais encontros trabalhou-se da mesma forma: os alunos resolveram as atividades propostas sem intervenção do professor, após discutiu-se no grande grupo as impressões de cada um, e por fim, individualmente os participantes fizeram seus registros sobre a aula.

Finalizados os encontros que constituíram esta prática docente, acredito que foi uma experiência, no mínimo, interessante deixar que os alunos trabalhassem sozinhos, não fazendo nenhum tipo de intervenção na resolução das atividades propostas. Ressalto que possibilitar aos mesmos momentos de autonomia é um desafio para todos os envolvidos no processo. Também me senti alegre ao vê-los discutir, em alguns momentos até “brigar” entre si, dadas as divergências de ideias que surgiam. Igualmente, não posso deixar de dizer que em alguns momentos me senti angustiado pelo fato de vê-los seguir caminhos de resolução que não levariam às respostas matematicamente corretas. Mas deixei-os experimentar, sentir e perder tempo na busca dessas soluções. Por vezes ri de mim ao perceber o quanto em minha prática docente estou acostumado, mesmo que de maneira bem intencionada, a controlá-los, guiando-os para o caminho desejado.

Além disso, creio que cada encontro constituiu-se numa aula que eu considerei produtiva, tanto pelas percepções que os alunos apresentaram em relação ao trabalho proposto, quanto pela constatação que eu tive da necessidade e da possibilidade de por vezes perder-se o controle, deixando cada aluno experimentar um caminho próprio, fugindo da rota habitual ditada pelo controle das ações por parte do professor.

Colocar-se na condição de pesquisador exige algumas ações que nem sempre são comuns à atividade docente. Refiro-me ao hábito do registro de alguns sentimentos e impressões que tive durante as aulas. É interessante ver-se como professor, mas a partir de registros sistemáticos sobre fatos e situações ocorridos durante a prática docente.

No que diz respeito à proposta de trabalho, acredito que obtive o resultado desejado, ou seja, possibilitar aos alunos a vivência de situações nas quais o emprego dos números racionais, em alguns de seus múltiplos contextos e significados, é expresso de forma fracionária, vivenciando assim a ideia de fração.

Ao meu ver, esta proposta apresentou-se como um caminho potencialmente favorável para que tais vivências contribuíssem para a ocorrência da aprendizagem, embora não tenhamos quaisquer garantias a respeito dessa ocorrência.

A resolução das atividades propostas, por meio de soluções matematicamente corretas, na maioria dos casos, além do próprio bem-estar expresso pelos alunos ao participarem da aula, ilustram esta percepção.

Ainda, acredito que um aspecto a ser considerado seja a diferenciação entre o *aprender como* e o *aprender com*. Sobre isto temos em Deleuze que “nada aprendemos com aquele que nos diz: faça como eu. Nossos únicos mestres são aqueles que nos dizem ‘faça comigo’ e que, em vez de nos propor gestos a serem reproduzidos, sabem emitir signos a serem desenvolvidos no heterogêneo” (DELEUZE, 2006, p. 48).

Ou seja, buscar sentir a heterogeneidade, deixando-se afetar e também afetando, tentando viver, cotidianamente repetições do diferente, aventurado-se numa trajetória, talvez interminável, na busca de algumas crenças.

Assim, busquei emitir signos ou emitir certos tipos de signos. *Ensignar*, talvez.

Fomentar os múltiplos encontros que desejamos que ocorram, dirigidos à construção de conhecimentos. Desejo não garantido, mas ainda um desejo, pois para Deleuze (PARNET, 1994) “desejar é construir um agenciamento, construir um conjunto, conjunto de uma saia, de um raio de sol...”, ou seja, construir novas (des) organizações, novos caminhos que potencializem a criação de novos fluxos e novos processos na materialização do desejado. Assim, tentei, de alguma forma, possibilitar mobilizações nos pensamentos daqueles que são meus companheiros de caminhada, os alunos. Mas é interessante ressaltar, até mesmo repetir, que esses processos de aprendizagem não são uma decorrência direta das minhas ações, mas dos encontros que eventualmente venham a ocorrer, comigo mesmo e com meus aprendizes, e que provoquem a necessidade de interpretação de tais signos.

Além disso, apesar da minha ação docente constituir processos de ensino, com a aprendizagem dos alunos não ocorre o mesmo, pois o professor, de certa forma, exerce um domínio sobre o que ensina, mas não controla o que cada aluno efetivamente aprende.

Isso porque o encontro com signos, apresentado na obra de Deleuze, é um processo individual e temporal, pautado na casualidade dos encontros. Além de individual é também um processo heterogêneo, de multiplicidades. Cada um aprende de forma diferente e aprende o diferente, constrói significados diferentes para cada coisa ou, outras vezes, constrói o mesmo significado, mas pautado por uma via diferenciada.

Desse modo, nas palavras de Gallo (2012, p. 9), “a questão, afinal, é se somos capazes de reconhecer e valorizar essas diferenças, ou se permanecemos, como professores, no papel de tentar trazer todos para o mesmo lugar, mesmificando”.

Creio que tal caminhada se dá, sobretudo, na construção de uma postura, que diz respeito tanto à maneira como me deixo afetar pelos signos que me rodeiam, quanto à minha maneira de agir. Mais do que questões de ordem metodológica, imiscuem-se na prática docente e em todos que dela participam questões da ordem da sensibilidade, dos afetos, das percepções.

6 I PALAVRAS FINAIS

Vejo-me, de certa forma, meditando sobre o que é o adequado em educação. Quebrando a cabeça ao pensar sobre modos potenciais de desenvolver uma educação escolar que valorize a diversidade e que potencialize as múltiplas possibilidades de se percorrer um mesmo caminho ou de se chegar a um mesmo lugar, a ocorrência do aprender.

Compreender a aprendizagem como um processo que decorre da decifração de signos presentes no cotidiano é uma das muitas possibilidades a ser explorada num contexto de educação escolar. Mais do que isso, compreender cada sujeito, cada indivíduo, como algo em permanente transformação, num processo contínuo de vir a ser, constitui imenso desafio. Desafio pertinente e interessante em um mundo no qual a rapidez com que as coisas se transformam é espantadora. Talvez, também pertinente pela necessidade que urge, no sentido de que as diferenças sejam valorizadas, algumas verdades sejam destruídas, e rotas de fuga do mesmo, do homogêneo e do hegemônico se tornem intensa presença em suas variações.

Em relação ao trabalho desenvolvido mediante a realização da prática de ensino, creio que algumas considerações são cabíveis. Umas delas diz respeito a minha compreensão da escola e do ambiente escolar como um tempo-espaço cujo objetivo principal é a ocorrência da aprendizagem. Não estou afirmando que não se aprenda em outras situações, mas, especificamente, nas instituições escolares buscamos possibilitar vivências, potencializar afetos múltiplos e talvez intensificar a emissão de alguns signos. Creio que a experiência docente, que foi brevemente descrita ao longo deste texto, buscou um pouco disso. Por vezes dando pistas, por vezes tirando o chão dos alunos, por outras tantas os deixando livres para que sozinhos fizessem suas próprias explorações. Permitindo o erro e valorizando a possibilidade de criação de rotas alternativas.

Tentei fomentar e enriquecer o surgimento dos elementos necessários para a ocorrência do aprendizado: signos, afetos, percepções, dúvidas, situações, multiplicidades, contextos, conflitos, entre outros tantos. Como já mencionei em outro momento, talvez isso tenha ocorrido. De qualquer forma esse processo não se encerra com o término do trabalho desenvolvido. Creio que outras muitas situações futuras possibilitarão que as aprendizagens pretendidas sejam revisitadas e modificadas. Da mesma forma, creio que outras tantas práticas docentes, na condição de pesquisador, ou não, possibilitarão mudanças no meu modo de ser como professor, num processo contínuo e que se reformula a cada vivência, a cada encontro com os signos presentes que nos sensibilizam durante a prática docente. Sobretudo, creio ser esta uma abertura necessária para novos tempos, novos mundos, novos caminhos tão necessários na educação.

REFERÊNCIAS

DELEUZE, G. **Diferença e Repetição.** Trad. Luiz Orlandi e Roberto Machado. 2. ed. Rio de Janeiro: Graal, 2006.

DELEUZE, G. **Proust e os signos**. Trad. Antonio Piquet e Roberto Machado. 2.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003.

GALLO, S. **Deleuze & a Educação**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

GALLO, S. **As múltiplas dimensões do aprender.** Congresso de Educação Básica: aprendizagem e currículo. Florianópolis, SC, Brasil, 06, 07 e 08 de fevereiro de 2012. Disponível em:

<http://www.pmf.sc.gov.br/arquivos/arquivos/pdf/13_02_2012_10.54.50.a0ac3b8a140676ef8ae0dbf32e662762.pdf.> Acesso em 19/06/2015.

PARNET, C. **O abecedário de Gilles Deleuze**. Entrevista por Claire Parnet, direção de Pierre-André Boutang. 1994. (Texto digitado). Disponível em:

<http://stoa.usp.br/prodsubjeduc/files/262/1015/Abecedario+G.+Deleuze.pdf> Acesso em: 12/09/2017.

ROMANATTO, M. C. Número racional: uma teia de relações. **Zetetiké**, v. 7, n.12, 1999. p. 37-50.

CAPÍTULO 10

LETRAMENTO ESTATÍSTICO POR MEIO DE PROJETOS: UM ESTUDO DE CASO

Cassio Cristiano Giordano
Doutorando em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
São Paulo - SP

RESUMO: O letramento estatístico é fundamental para a formação acadêmica, para a vida profissional e, sobretudo, para o exercício da cidadania em nossa sociedade, dada a facilidade de acesso a dados estatísticos por meio de diversos veículos de informação. Vemos no ensino e na aprendizagem da Estatística por meio de projetos uma oportunidade para o desenvolvimento do letramento estatístico. A abordagem da Estatística por meio de projetos muda, de forma notável, as relações entre professor, aluno e saber, promovendo maior autonomia por parte dos alunos no desenvolvimento de suas pesquisas. Para analisar esses dois fenômenos – o desenvolvimento do letramento e as mudanças no contrato didático – em uma abordagem por meio de projetos, realizamos um estudo de caso. Nossos sujeitos de pesquisa foram 43 alunos com idades de 17 a 20 anos oriundos de duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio, divididos em nove grupos de quatro ou cinco integrantes. Eles participaram, durante um bimestre letivo, de todo o processo de desenvolvimento de uma pesquisa estatística, desde a escolha do tema e elaboração da questão de pesquisa até a análise e divulgação dos resultados. Os resultados revelaram que essa abordagem favorece o desenvolvimento do letramento estatístico, bem como gera condições para uma quebra de contrato didático, importante para o desenvolvimento da autonomia dos alunos, preparando-os para os desafios futuros de suas vidas, na universidade, no mercado de trabalho ou em qualquer outra situação de seu convívio social.

PALAVRAS-CHAVE: Letramento Estatístico, Contrato Didático, Projetos.

ABSTRACT: Statistical literacy is critical for academic education, for professional life, and, above all, for the exercise of empowerment in our society given the easy access to statistical data through various information vehicles. We see in the teaching and learning of statistics through projects an opportunity for the development of statistical literacy. The Statistical approach through projects changes notably the relations between teacher, student and knowledge, promoting greater autonomy on the part of students in the development of their own research. In order to analyze these two phenomena - the development of literacy and changes in the didactic contract - in an approach through projects, we carried out a case study.

Our research subjects were 43 students aged 17 to 20 years old from two third-year high school classes, divided into nine groups of four or five. During two months, they participated in the whole process of developing statistical research, from the choice of topic and elaboration of the research question to the analysis and dissemination of the results. The results revealed that this approach favors the development of statistical literacy, as well as generates conditions for a breach of didactic contract, important for the development of students' autonomy, preparing them for the future challenges of their lives, in the university, in the market of work or in any other situation of their social life.
KEYWORDS: Statistical Literacy, Didactic Contract, Projects.

1 I INTRODUÇÃO

A introdução do campo 'Tratamento da informação' nos livros didáticos, consequência direta da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, 1998, 2000), ocorreu, a princípio, de forma equivocada. Muitas coleções dedicam um ou dois capítulos isolados à Estatística Descritiva para cumprir as orientações do Ministério da Educação (MEC). No Ensino Médio, isso acontece tradicionalmente nos volumes dedicados ao segundo ano (Probabilidade) e terceiro (Estatística Descritiva). Lopes (1998) julga tardia essa abordagem da Estatística:

> Nesse momento eles são bombardeados por estatísticas relativas às questões sociais e econômicas, quase sempre com fins eleitoreiros, os quais têm como objetivo a formação de opinião, promovendo um determinado partido ou candidato. Não é possível que esperemos que nosso aluno chegue ao Ensino Médio para iniciarmos conteúdos essenciais para o desenvolvimento de sua visão de mundo. (LOPES, 1998, p. 14)

Concordamos com essa autora. Acreditamos ser necessária a promoção do letramento estatístico desde as séries iniciais da Educação Básica; talvez até antes. Consideramos a possibilidade da abordagem por meio de projetos, proposta por Batanero e Díaz (2004, 2011), por ser um caminho promissor para o letramento estatístico, sobretudo quando comparada às propostas apresentadas nos livros didáticos. Por outro lado, ao lecionar para alunos das séries finais da Educação Básica, percebemos grande ansiedade deles em relação a seu futuro acadêmico e profissional. Ao mesmo tempo, nosso contato – direto ou indireto, pelas redes sociais – com ex-alunos da escola-alvo de nossa pesquisa, revela que nos últimos anos a maioria ingressou em cursos universitários, onde seus conhecimentos, habilidades e competências relativas à Estatística lhes foram muito úteis. No que se refere ao Ensino Superior, Costa (2012) ressalta a importância da Estatística:

> O fato de a disciplina de estatística estar inserida na grade horária das mais diversas áreas de formação profissional, sejam elas exatas, humanas, biológicas

> ou tecnológicas (CAZORLA, 2002; NOVAES, 2004), demonstra que existe mesmo uma grande preocupação com a formação de cidadãos educados estatisticamente. (COSTA, 2012, p. 24)

Diante desse quadro, julgamos relevante uma investigação sobre o papel da abordagem por meio de projetos no letramento estatístico de alunos do Ensino Médio.

2 I PROBLEMÁTICA

A presente pesquisa é fruto de nossa inquietação diante das dificuldades encontradas por alunos da Educação Básica, mais especificamente do Ensino Médio, no que se refere à produção, leitura e interpretação de textos, tabelas e gráficos estatísticos, bem como na mobilização de conhecimentos estatísticos para enfrentar problemas de seu cotidiano. Campos (2007, p. 71) define Estatística como "a ciência dos dados. Com mais precisão, o objeto da Estatística é o raciocínio com base em dados empíricos. Os dados não são simplesmente números, mas sim números em um contexto". Dados apresentados fora de um contexto bem delimitado são estéreis para o ensino e para a aprendizagem de Estatística. São, na verdade, pouco motivadores e desprovidos de significado, como observam Batanero e Díaz (2011).

Os conceitos elementares de Estatística Descritiva devem ser tratados sob um novo olhar, sob a ótica da Educação Estatística, em todos os níveis da educação. Podemos mencionar, dentre os estudos brasileiros que focalizam tais aspectos nas primeiras séries do Ensino Fundamental, os de Lopes (1998), Megid (2002), Morais (2006), Conti (2009), Chagas (2010) e Bifi (2014); no Ensino Médio, os de Stella (2003), Mendonça (2008), Vieira (2008), Santana (2011) e Sá (2015); no Ensino Superior os de: Novaes (2004), Jacobini (2004), Biajone (2006), Campos (2007) e Costa (2012).

Na Educação Básica, por meio da abordagem de temas motivadores para o universo da criança e do adolescente, as atividades lúdicas são muitas vezes exploradas, passo a passo, com alto nível de envolvimento do aluno. Ao invés de simplesmente copiar exercícios da lousa, o aluno é convidado a elaborar problemas e propor temas para investigação em sala de aula. Participa ativamente da coleta e levantamento de dados e constrói gráficos e tabelas que os representem. Naturalmente, por se tratar de assunto que lhe é conhecido, sente-se apto a tecer comentários críticos quanto aos resultados observados. Assim, deixa a condição de sujeito passivo no processo de ensino e de aprendizagem. Torna-se ator e autor na produção de conhecimento.

Nesse contexto, pretendemos colaborar, por meio de nossa pesquisa, investigando se o trabalho empreendido por meio de projetos pode contribuir para o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos, bem como identificar que relações existem entre o desenvolvimento desse trabalho e a quebra do contrato didático.

Essa abordagem está em consonância com a proposta de Batanero e Díaz (2004, 2011), nosso referencial maior na compreensão de projetos em Educação Estatística.

Para Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013, p. 17), por intermédio do desenvolvimento do letramento estatístico, poderemos realizar projetos de ensino onde são trabalhadas as metas, as competências e as possibilidades de educação crítica. Este é exatamente o objetivo de nosso trabalho investigativo. Dessa forma, com a proposta de trabalhar com projetos de aprendizagem, apresentaremos a seguir nossa questão de pesquisa.

Nessa perspectiva, adotamos como questão de pesquisa: 'Que contribuições de uma abordagem da Estatística Descritiva por meio de projetos podem ser identificadas no desenvolvimento do letramento estatístico de alunos do Ensino Médio?'

Assumimos como nossos objetivos nessa pesquisa: estudar as possíveis contribuições da abordagem da Estatística Descritiva por meio de projetos de pesquisa empreendidos por alunos do terceiro ano do Ensino Médio para o desenvolvimento de seu letramento estatístico; analisar os tipos de quebra de contrato didático no desenvolvimento do projeto, bem como seus efeitos sobre a construção do letramento estatístico; avaliar os níveis de letramento, segundo Gal (2002), alcançados pelos alunos a partir do desenvolvimento de projetos de pesquisa estatística.

3 I REFERENCIAIS TEÓRICOS

A concepção de letramento estatístico que utilizaremos em nossa pesquisa é aquela defendida por Gal (2002), que vê o letramento estatístico como construído a partir de uma postura crítica e investigativa, de conhecimentos prévios de Estatística e Matemática, habilidades de leitura e análise, crenças, atitudes e conhecimento sobre o homem e o mundo a seu redor. É uma habilidade-chave necessária para o exercício da cidadania em um mundo sobrecarregado de informação.

Esse autor afirma que existem dois componentes inter-relacionados fundamentais à Educação Estatística: a competência para interpretação e avaliação crítica das informações estatísticas e a competência para comunicar e discutir articulando tais informações.

Para Gal (2002), o letramento estatístico é composto por cinco componentes cognitivos: o próprio letramento, que envolve leitura de textos, gráficos, tabelas; conhecimentos estatísticos; conhecimentos matemáticos; conhecimentos do contexto; capacidade de elaboração de questões críticas. Sobre o gradativo nível de letramento estatístico, Coutinho (2013) considera adequado adotar a classificação de níveis de letramento proposta por Gal (2002):

> Aprofundando um pouco esse enfoque, admitimos que o letramento se desenvolve em níveis hierárquicos, tal como proposto por Shamos (1995) e apresentado por Gal (2002). [...] um sujeito está no nível cultural quando a mobilização de seus conhecimentos estatísticos, limita-se ao uso de termos básicos naturalmente utilizados na mídia para comunicação de temas científicos. Já o nível funcional exige alguma substância a mais nessa mobilização de conhecimentos, pois além do uso de termos usuais, o sujeito deve também ser capaz de conversar, ler e escrever de forma coerente, podendo mesmo usar termos não técnicos, mas

> sempre dentro de um contexto significativo. Finalmente, o nível científico, o mais elevado, exige do sujeito uma compreensão global do procedimento científico, de forma integrada com a compreensão dos processos científicos e investigativos. (COUTINHO, 2013, p. 74)

Interdisciplinaridade e contextualização é a proposta de trabalho por meio de Projetos de Aprendizagem. Porciúncula e Samá (2015) expõem que:

> Segundo Hernández (1998), projeto não é uma metodologia, mas uma forma de refletir sobre a escola e sua função. [...] Em Fagundes, Sato e Laurindo-Maçada (1999) encontramos a proposta pedagógica de Projetos de Aprendizagem, a qual busca o engajamento dos estudantes a partir do que estes já sabem e de seus interesses. [...] Projetos de Aprendizagem podem ser uma estratégia pedagógica para o Letramento Estatístico. (PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2015, p. 134-135)

Batanero e Díaz (2004) destacam que os projetos estatísticos motivam os alunos, o que não é alcançado pela mera resolução de exercícios descontextualizados. Essas autoras nos lembram que a Estatística é a ciência dos dados, e estes não são apenas números, mas sim números em contexto. Segundo elas, no trabalho com projetos, a ênfase é dada a tarefas que devem ser realistas.

Para essas autoras, o desenvolvimento de projetos de trabalho visando a Educação Estatística contribui para a aquisição das de competências, fundamentais para o aluno do Ensino Médio, como competência comunicativa linguística, competência matemática, competência de reconhecimento e interação com o mundo físico, competência para o tratamento da informação e competência digital, competência social e exercício da cidadania, competência para “aprender a aprender”, questionar, identificar e gerenciar as diversas técnicas e estratégias para lidar com uma mesma situação-problema, competência para a conquista de autonomia e iniciativa pessoal.

Consideramos o trabalho em grupos imprescindível para o desenvolvimento de projetos de Educação Estatística. Para Garfield (1993), uma forma de o professor motivar o aprendizado ativo em suas aulas é estruturar oportunidades para que os alunos aprendam juntos em pequenos grupos. Em seu artigo sobre grupos cooperativos de aprendizagem, destaca a importância dessa organização no ensino e aprendizagem de Estatística. Segundo ela dentre os muitos benefícios que essa estratégia de ensino e de aprendizagem pode trazer, podemos destacar maior motivação e interesse do aluno, desenvolvimento de atitudes positivas sobre sua capacidade, fortalecimento do espírito de equipe, melhor comunicação, maior responsabilidade do aluno, otimização do tempo e dinamismo nas aulas. Como a autora destaca, “duas cabeças pensam melhor do que uma” e, mesmo que todos no grupo encontrem uma mesma solução, o fazem de formas diferentes. O que enriquece a aprendizagem é a troca de opiniões, não somente sobre o resultado final estar certo ou errado, mas sobre os processos que conduzem até ele.

Em nossa pesquisa, a partir de sua proposta de trabalho com projetos, o professor promoveu a formação de pequenos grupos cooperativos. A proposta de realizar a maioria das tarefas em sala de aula é justamente a de orientá-los, evitando degenerações do trabalho em grupos: casos em que um trabalha e inclui o nome dos demais por camaradagem, ou quando o grupo divide o trabalho em partes, cada um faz isoladamente sua tarefa e, ao final, temos uma verdadeira “colcha de retalhos”, sem coesão, perdendo a riqueza da discussão, do confronto de ideias – ou ainda, o que é muito pior, quando alguém externo (amigo, pai, namorado, e muitas vezes até alguém com formação na área) encarrega-se de tudo, por afeição ou por dinheiro.

Acompanhando o processo de elaboração e condução da pesquisa, é possível intervir e estimular a cooperação entre os alunos. Além da entrega da pesquisa por escrito, os grupos apresentam seus resultados na forma de painel, momento em que são avaliados individualmente, para evitar que algum dos integrantes se omita. Mas antes de falar da produção dos alunos, vamos discutir um pouco sobre o letramento estatístico.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau a partir da década de 1970, influenciado pela teoria epistemológica genética de Piaget, sobretudo no que se refere às contradições e desequilíbrios construtivistas, naturais à problematização, constitui um sólido referencial para a Educação Matemática.

O aluno, na condição de sujeito cognitivo, aprende adaptando-se a um *milieu* gerador de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, desenvolvendo novas respostas, mas, para tanto, esse *milieu* deve ser munido de intenção didática. Segundo Almouloud (2007), na TSD cabe ao professor, na condição de mediador, criar e organizar um *milieu*, no qual estão engajados saberes matemáticos, propício ao ensino e à aprendizagem.

Quando o professor solicita trabalhos aos alunos, deve provocá-los, gerando desequilíbrios e consequente necessidade de adaptações. Para que o professor atinja seus objetivos, ele depende da devolução, ou seja, da aceitação dos alunos. Deve haver interesse destes em aceitar os desafios propostos. Assim, o aluno deve querer se envolver com o problema e aceitar o desafio.

O desejado envolvimento será natural se o aluno escolher um problema de seu universo de interesses, algo que, embora requeira considerável esforço, lhe dê prazer. No entanto, Brousseau (2007, p. 68) nos lembra que “a realidade é mais difícil de compreender que uma teoria”. É possível que os alunos, mesmo motivados, esmoreçam diante das dificuldades de uma tarefa extensa e complexa. Cabe ao professor, neste caso, enquanto responsável pela gestão dos fenômenos didáticos, intervir.

Uma das ideias centrais da TSD é a existência do contrato didático: um conjunto de normas, convenções e práticas, raramente explícitas, que rege as relações entre professor e aluno, como as cláusulas de um contrato formal qualquer. Almouloud (2007, p. 89) acrescenta que o contrato didático é “um meio para gerenciar o tempo didático em sala de aula”. Para Brousseau (1986 *apud* SILVA, 2012):

> Chama-se de contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte, explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá que prestar conta diante do outro. (BROUSSEAU, 1986 *apud* SILVA, 2012, p. 50)

Silva (2012) enfatiza que o contrato didático depende das estratégias de ensino adotadas e de seus contextos. Ainda predominam, em nosso país, as aulas expositivas e os dados envolvidos nos problemas geralmente são retirados do livro didático. Ele observa:

> Há casos extremos em que o professor se refugia na segurança dos algoritmos prontos, fraciona a atividade matemática em etapas pelas quais passa mecanicamente, esvaziando o seu significado. Sua atuação resume-se em apresentar uma definição, dar alguns exemplos e solicitar exercícios "idênticos" aos dos exemplos dados. Aos alunos, cabe memorizar regras para repeti-las nas provas repletas de questões rotineiras que permitem a reprodução dos modelos fornecidos pelo professor. (SILVA, 2012, p. 52-53)

No caso da Educação Estatística, em particular, tal modelo não favorece o desenvolvimento do letramento estatístico. Discutiremos sobre a quebra de contrato, ensino e aprendizagem por meio de projetos em Estatística.

4 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Realizou-se uma pesquisa qualitativa, na concepção de Bogdan e Biklen (1994), do tipo estudo de caso, na concepção de Ponte (2006), Severino (2007), Fiorentini e Lorenzato (2007). A situação em estudo envolveu duas turmas de alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino no município de Santo André, SP. Tratamos as duas turmas como um único caso, uma vez que não houve diferenças significativas que nos motivem a tratá-las separadamente.

A pesquisa abrangeu 43 alunos com idades de 17 a 20 anos, divididos em nove grupos, sendo dois destes compostos de quatro alunos e os outros sete de cinco. O trabalho com os alunos transcorreu durante um bimestre letivo de 2015. Os alunos foram orientados a se organizar em pequenos grupos (de quatro a seis integrantes), como recomendado por Garfield (1993, 2013), a fim de escolherem um tema de seu interesse, como recomendado por Batanero e Díaz (2011).

O professor que orientou os alunos em seus trabalhos foi o próprio pesquisador. Não foram escalados observadores. Os dados coletados para análise foram extraídos das produções dos alunos, ou seja, dos resultados da pesquisa desenvolvida pelos grupos.

Durante a elaboração dos projetos, os alunos puderam dispor do ambiente papel-lápis, calculadoras científicas, *smartphones*, *tablets, notebooks, netbooks*. Para suas orientações, o professor contou com um computador e um projetor (*datashow*) instalados em uma sala de projeção.

Os alunos desenvolveram a pesquisa estatística escolhendo tema, definindo questão de pesquisa e objetivos, elaborando instrumento de coleta de dados, aplicando-o, levantando e testando hipóteses, apresentando os dados por meio de medidas-resumo, tabelas e gráficos, analisando os dados e divulgando os resultados de sua pesquisa por meio um painel, como define Severino (2007).

5 I RESULTADOS, DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos, nesta pesquisa, investigar as possíveis contribuições da abordagem por meio de projetos para o letramento estatístico de alunos do Ensino Médio. Consideramos relevante este estudo, uma vez que existem poucas pesquisas nessa área, como observam Megid (2002), Biajone (2006), Mendonça (2008) e Costa (2012). Embora o tema 'letramento estatístico e abordagem por meio de projetos no processo ensino–aprendizagem' já tenha sido objeto de investigação em outras pesquisas, buscamos aqui associá-lo à ruptura do contrato didático.

Acreditamos que as mudanças no contrato contribuam para a promoção da autonomia investigativa do aluno, tão importante para a Educação Estatística, como defendem Batanero e Díaz (2004, 2011), além de serem necessárias para o desenvolvimento do letramento estatístico, sobretudo quanto aos elementos de disposição (crenças, atitudes e questionamento crítico), como definidos por Gal (2002).

Para alcançar nossos objetivos, formulamos em nossa problematização a seguinte questão: 'Quais contribuições de uma abordagem da Estatística Descritiva por meio de projetos podem ser identificadas no desenvolvimento do letramento estatístico de alunos do Ensino Médio?'

A partir da elaboração de pesquisa, traçamos nosso objetivo geral: estudar as possíveis contribuições da abordagem da Estatística Descritiva por meio de projetos de pesquisa empreendidos por alunos de terceiro ano do Ensino Médio para seu letramento estatístico.

No aprofundamento desse objetivo geral, estabelecemos nossos objetivos específicos: analisar as possíveis contribuições do trabalho por meio de projetos para o desenvolvimento e a aprendizagem de conceitos estatísticos; analisar os tipos de quebra de contrato didático no desenvolvimento do projeto, bem como seus efeitos sobre a construção do letramento estatístico; avaliar os níveis de letramento, segundo Gal (2002), alcançados pelos alunos a partir do desenvolvimento de projetos de pesquisa estatística.

Adotamos como método de investigação o estudo de caso, como o definem Ponte (2006), Severino (2007) e Fiorentini e Lorenzato (2007). Os dados coletados foram as produções dos alunos. Tais trabalhos, resultantes de pesquisas desenvolvidas pelos grupos de alunos, resumiam passo a passo as pesquisas estatísticas por eles realizadas, da justificativa da escolha do tema até a análise dos dados e discussão dos resultados.

Lamentamos não haver conseguido registro audiovisual do painel realizado pelos alunos. Essa ideia surgiu no desenvolvimento da pesquisa, quando os alunos optaram por essa forma de divulgação dos resultados. No entanto, eles não se sentiram confortáveis com a ideia de serem filmados, e optamos por não insistir, sob risco de tolher sua espontaneidade durante o painel.

Nosso primeiro passo na pesquisa foi realizar a revisão bibliográfica. Supúnhamos encontrar vasto material sobre projetos na Educação Estatística, uma vez que esse assunto é amplamente discutido nas escolas. Isso, porém, não aconteceu. Apesar de muito falada, a abordagem por meio de projetos parece ser pouco praticada, pelo menos na forma proposta por Batanero e Díaz (2004, 2011).

Na sequência, realizamos um estudo sobre o estado atual do ensino de Estatística, tratando mais especificamente da rede estadual paulista. Esse estudo teve como objetivo justificar a escolha pela abordagem da Estatística Descritiva por meio de projetos.

Concluímos que o material didático utilizado pelos alunos não era adequado para seu letramento estatístico, fazendo-se necessário que o professor fizesse complementações, o que nos leva a outra questão: Estaria o professor preparado para isso? Pesquisas como as de Silva (2007), Novaes (2011) e Bifi (2014) sugerem que não.

Em seguida, procedemos à análise *a priori* das etapas do desenvolvimento de projetos, como aquelas investigadas por Mendonça (2008) e Santana (2011). Nosso referencial nesse assunto foi o trabalho de Batanero e Díaz (2011). Finalmente, analisamos a produção dos alunos no desenvolvimento de projetos, considerando a proposta de Batanero e Díaz (2011), à luz dos referenciais de letramento estatístico, de Gal (2002), e de contrato didático, de Brousseau (2007), como discutido por Almouloud (2007) e Silva (2012).

Acreditamos que esse trabalho não deva ser isoladamente empreendido pelo professor de Matemática, pois os elementos de conhecimento apontados por Gal (2002) transcendem a esfera da Matemática, como observado por Biajone (2006). Acreditamos também que se faz necessária a flexibilização do tempo e do espaço físico para desenvolvimento dos projetos, como sugerem Mendonça (2008) e Conti (2009). Além disso, é importante para o letramento que os alunos disponham de recursos tecnológicos que otimizem tempo e poupem esforços no registro, na organização e na apresentação dos dados, como propõem Batanero e Díaz (2004, 2011). Acreditamos, sobretudo, ser fundamental a divulgação das pesquisas realizadas pelos alunos, envolvendo a comunidade escolar, como propõem Campos, Wodewotzki e Jacobini (2013).

A quebra de contrato didático e renegociação de um novo contrato, na transição que se fez da aula tradicional, com foco no resultado final e apoio no livro didático e Caderno do Aluno, para o trabalho por projetos, com foco no processo e apoio na própria pesquisa, mostrou-se adequada para o desenvolvimento da autonomia investigativa, para o amadurecimento ao assumir as escolhas por eles feitas (como a de divulgar resultados por meio de um painel) e para a produção de pesquisa em ambiente escolar – enfim, para propiciar aos alunos condições para "aprender a aprender", sem se limitarem à mera reprodução e memorização de conceitos pouco significativos para eles.

O letramento estatístico associa as práticas de leitura e escrita às práticas sociais. Não se limita ao conhecimento estritamente matemático, nem mesmo ao estritamente estatístico. A abordagem por meio de projetos proporciona maior motivação e envolvimento dos alunos, sobretudo quando escolhem temas de seu universo de interesses, como sugerem Batanero e Díaz (2004, 2011). Tal motivação para as tarefas está em consonância com os elementos de disposição presentes no modelo de letramento de Gal (2002). Não foi possível avaliar o nível de letramento a partir do desenvolvimento dos projetos. Esse fenômeno é individual e, dada a natureza da produção coletiva apresentada por meio dos projetos, tal avaliação tornou-se inviável.

As reflexões apresentadas neste estudo sugerem novos questionamentos, que poderão ser objeto de investigação de futuras pesquisas na Educação Estatística: Os livros didáticos contribuem, de fato, para o letramento estatístico? Em caso negativo, como deveria ser sua organização matemática e didática? Os professores estão preparados para desenvolver o trabalho por meio de projetos? Em caso negativo, que tipo de formação, inicial ou continuada, deveria ser oferecida ao professor? Que concepções e conhecimentos são mobilizados por professores e alunos do Ensino Médio na gestão e desenvolvimento de um projeto estatístico utilizado como abordagem para os conceitos da Estatística Descritiva?

A natureza de tais concepções e eventuais mudanças de concepção decorrentes da gestão e desenvolvimento de projetos no ensino e aprendizagem de Estatística, por parte de professores e de alunos, constituem o atual foco de nossa pesquisa de doutorado, sobre a qual pretendemos escrever em breve.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A., **Fundamentos da didática da matemática - edição atualizada**. Ed. UFPR. Curitiba, 2007.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. **El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística - Aspectos didácticos de las matemáticas**: 125-164, Zaragoza: J. Patricio Royo Ed, 2004.

_______. **Estadística con proyectos.** Departamento de Didáctica de la Matemática – Universidad de Granada, 2011.

BIAJONE, J. **Trabalho de Projetos: Possibilidades e Desafios na Formação do Pedagogo** – Dissertação de Mestrado. Campinas: Faculdade de Educação. UNICAMP, 2006.

BIFI, C. R. **Conhecimentos estatísticos no Ciclo I do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico com professores em exercício.** Tese de Doutorado. São Paulo: PUC –SP, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** (1.º e 2.º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 1997. v. 3.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** (3.º e 4.º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 1998.

______. **Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais (Ensino M***édio)*. Brasília: MEC, 2000.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais + (PCN+): Ciências da natureza e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2002.

______. Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio: C**ências **da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: SEB, 2006. v. 2.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In. PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2007. p. 48-72.

CAMPOS, C. R. **A educação estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação**. Tese de Doutorado. Instituto de Geociências E Ciências Exatas – UNESP – Rio Claro, 2007.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática – 2ª edição.** Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

CHAGAS, R. M. **Estatística para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental: um estudo sobre os conceitos mobilizados na resolução de problemas.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC – SP, 2010.

CONTI, K. **O papel da Estatística na inclusão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em atividades letradas.** Dissertação de Mestrado. Campinas: Faculdade de Educação. UNICAMP, 2009.

COUTINHO, C. Q. S. Educação estatística e os livros didáticos para o Ensino Médio. **Revista Educação Matemática em Foco**. Campina Grande, v. 02, n. 1, p. 68-86, 2013.

COSTA, G. D. F. **A metodologia de projetos como alternativa para ensinar estatística no ensino superior.** Tese de Doutorado. Campinas: Faculdade de Educação. UNICAMP, 2012.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos – 2ª ed. rev.** Autores Associados. Campinas, 2007.

GAL, I. Conocimientos básicos de estadística en adultos: significados, componentes, responsabilidades. **Revista Internacional de Estatística**, p. 1-25, 2002.

GARFIELD, J. Teaching statistics using small-group cooperative learning. **Journal of Statistics Education, v. 1, n. 1**, p. 1-9, 1993.

_______. Cooperative learning revisited: From an instructional method to a way of life. **Journal of Statistics Education, v. 21, n. 2**, p. 1-8, 2013.

JACOBINI, O. R. **A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula**. Tese de Doutorado. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP, 2004.

LOPES, C. E. **A probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: Uma análise curricular.** Dissertação de Mestrado. Campinas: UNICAMP, 1998.

MEGID, M. A. B. A. **Professores e alunos construindo saberes e significados em um projeto de Estatística para a 6ª serie: estudo de duas experiências em escolas pública e particular** - Dissertação de Mestrado. Campinas: Faculdade de Educação. UNICAMP, 2002.

MENDONÇA, L. O. **A Educação Estatística em um ambiente de modelagem matemática no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNICSUL –SP, 2008.

MORAIS, T. M. R. **Um estudo sobre o pensamento estatístico: componentes e habilidades.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC –SP, 2006.

NOVAES, D. V. **A mobilização de conceitos estatísticos: Estudo exploratório com alunos de um curso de tecnologia em Turismo.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC –SP, 2004.

NOVAES, D. V**. Concepções de professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC –SP, 2011.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática**.** 2006. **Rev. Bolema**, 25: 103-132.

PORCIÚNCULA, M.; SAMÁ, S. Projetos de aprendizagem: uma proposta pedagógica para a sala de aula de estatística. In. SAMÁ, S.; PORCIÚNCULA, M. (Orgs.). **Educação estatística: ações e estratégias pedagógicas no ensino básico e superior**. Curitiba: CRV, 2015.

SÁ, D. L. **Elaboração e análise de um instrumento para verificar informações acerca do letramento estatístico de estudantes concluintes do ensino médio**. Dissertação (mestrado em educação em ciências) - Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS, 2015.

SANTANA, M. S., **A educação estatística com base num ciclo investigativo: um estudo do desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes de uma turma do 3º ano do ensino médio.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto - MG, 2011.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, B. A. Contrato didático. In. MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: Educ, 2012. p. 49-75.

SILVA, C. B., **Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de Matemática.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC – SP, 2007.

STELLA, C. A. **Um estudo sobre o conceito de média, com alunos do Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC – SP, 2003.

CAPÍTULO 11

ADAPTAÇÃO DA TEORIA DE VAN HIELE PARA O TÓPICO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Eduarda de Jesus Cardoso
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ

Lilian Nasser
PEMAT – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro – RJ

RESUMO: A Teoria de van Hiele para o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico tem sido considerada como guia para ensino/aprendizagem de Geometria. Este modelo consiste em dois grandes princípios: da descrição da estrutura cognitiva, que se caracteriza por níveis mentais hierárquicos a serem atingidos pelos alunos e da metodologia do ensino para que estes níveis sejam alcançados, com o intuito de orientar educadores quanto à tomada de decisão relacionada ao ensino. A partir de um estudo sobre os modelos de desenvolvimento do pensamento sobre a linguagem de funções, este trabalho tem o objetivo de propor e testar um modelo de níveis de desenvolvimento para funções com base no modelo de Van Hiele para a aprendizagem de geometria. Para isso, foram aplicadas atividades a alunos do Ensino Médio, para verificar a validade da escala proposta sobre a aquisição do conceito de função, ou seja, testar as possíveis contribuições e limitações do modelo.
PALAVRAS-CHAVE: função; teoria de van Hiele; níveis de aprendizagem.

ABSTRACT: The van Hiele Theory for the Development of Geometric Thought has been considered as a guide for teaching/learning Geometry. This model consists of two main principles: the description of the cognitive structure, which is characterized by hierarchical mental levels to be reached by the students and the teaching methodology so that these levels are reached, with the purpose of guiding educators regarding the related decision making to teaching. From a study on the development models of thinking about the language of functions, the aims of this are to propose and test a model of developmental levels for functions based on the van Hiele model for learning geometry. For this, activities were applied to high school students to verify the validity of the proposed scale on the acquisition of the concept of function, i. e., test the possible contributions and limitations of the model.
KEYWORDS: function; van Hiele theory; levels of learning.

1 I INTRODUÇÃO

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática, uma vez que este tópico relaciona-se tanto com temas e conteúdos dentro da Matemática como em outras disciplinas. Segundo Pinto (2014), trata-se de um tema importante, mas que, talvez, não seja abordado na escola com a amplitude e conexão adequadas para que fique evidente o seu papel na compreensão de outros temas matemáticos e de questões de outros campos de saber.

O ensino/aprendizagem de funções vem se tornando sistematicamente motivo de grande preocupação para professores e pesquisadores, devido a dificuldades dos alunos em construir tal conceito. Isso se reflete no baixo rendimento escolar e em elevados índices de reprovação nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral em diversos cursos superiores, tornando-se um dos maiores desafios para os profissionais da Matemática (REZENDE, 2003).

Com o intuito de entender o processo ensino-aprendizagem de funções, diversas pesquisas foram realizadas, tais como as de Bergeron & Herscovics (1982), Vinner (1989), Even (1990), Sierpinska (1992), Tall (1991) e Isoda(1996). No Brasil, destacam-se os trabalhos de Rezende (2003), Trindade (1996) e Sant'Anna (2001). Estes trabalhos apontam que a aprendizagem de funções é um processo evolutivo, lento e gradual devido à sua complexidade, uma vez que existem vários tipos diferentes de representações para uma mesma função.

Muitos desses aspectos relacionados às dificuldades dos alunos na aprendizagem de funções podem ser compreendidos na perspectiva dos obstáculos epistemológicos. De acordo com Sierpinska (1992, p.28), "se o obstáculo não for apenas nosso ou de algumas outras pessoas, mas for mais generalizado, ou foi generalizado em alguma época ou em alguma cultura, então ele é conhecido como um obstáculo epistemológico". A partir da perspectiva epistemológica, os obstáculos relativos à apropriação do conceito de função têm se mostrado de fundamental importância no processo de formação dos saberes dos educandos, e na elaboração de modelos de intervenção didática para o processo ensino-aprendizagem deste tópico.

Várias pesquisas em Educação Matemática apontam na direção da necessidade de uma melhor compreensão de conceitos matemáticos por parte dos alunos em tarefas que permitem a construção das definições e dos significados, por meio de procedimentos didáticos que envolvam atributos relevantes destes conceitos (TALL, 1993). Neste contexto, surge a discussão de modelos de desenvolvimento do pensamento sobre a linguagem de funções.

Autores como Dubinsky (1991), Sierpinska (1992) e Vinner (1991), propuseram tais modelos. Estes pesquisadores consideram o desenvolvimento dos alunos, não só em termos de pensamento conceitual sobre funções, mas também da linguagem dos alunos, ou seja, o problema da aprendizagem tem sua justificativa no desenvolvimento cognitivo dos alunos. Assim, o processo de elaboração mental da construção de conceitos matemáticos deve ir muito além da apresentação de sistemas dedutivos, por meio de definições, exemplos e contra-exemplos.

Este trabalho relata uma pesquisa de mestrado, que sugere uma escala de níveis para a aprendizagem de funções, baseada na teoria de van Hiele, que afirma que o progresso nos níveis depende do ensino, e não apenas da maturidade dos educandos.

2 I TEORIA DE VAN HIELE

Os educadores holandeses Dina van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Marie van Hiele desenvolveram um estudo de pensamento geométrico que resultou nas teses de doutorado do casal na Universidade de Utrecht. Esses estudos apontaram que: a aprendizagem de geometria ocorre em níveis hierárquicos de conhecimento; quando o ensinamento ocorre em um nível cognitivo acima do qual o aluno se encontra os conceitos não são compreendidos e fixados; o crescimento relativo à idade não produz automaticamente um crescimento no nível do pensamento geométrico. A teoria proposta consiste de cinco níveis de compreensão de ideias geométricas, onde o aluno avança de nível a partir de sua maturidade geométrica.

Níveis de Compreensão Geométrica

O casal van Hiele sugeriu cinco níveis de desenvolvimento da compreensão em geometria descritos por Shaughnessy e Burger (1985, p.420) como: Nível 0 - Visualização; Nível 1 - Análise; Nível 2 - Dedução Informal; Nível 3 - Dedução Formal; e Nível 4 –Rigor.

Estes níveis explicam como se produz o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos estudantes. De acordo com Nasser (1992), a teoria sugere que os alunos progridem através de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão enquanto aprendem Geometria, e que a linguagem, o insight e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papeis essenciais nesse desenvolvimento.

Em resumo, os objetos (ideias) devem ser criados em um nível para que as relações entre esses objetos possam se tornar o foco do próximo nível. Desta forma, o modelo afirma que o aluno move-se sequencialmente a partir do nível inicial até o nível mais elevado, não havendo como "pular" de nível. Além de fornecerem uma compreensão daquilo que há de específico em cada nível de pensamento geométrico, os van Hiele identificaram algumas propriedades que caracterizam o modelo, bem como definiram uma metodologia específica para o avanço de níveis.

3 I MODELOS DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO SOBRE A LINGUAGEM DE FUNÇÕES

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática, uma vez que este tópico se relaciona tanto com temas e conteúdos dentro da Matemática como com outras disciplinas. Devido à grande abrangência do conceito, o tópico envolve múltiplas concepções e representações, portanto, faz-se necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos. Estas múltiplas representações, quando desenvolvidas de forma articulada, levam a uma melhor compreensão. Visando auxiliar aos alunos na aquisição deste tópico, surgem modelos construtivistas que ajudam o aluno a construir o conceito de função de forma gradativa e abrangente. Tais modelos foram desenvolvidos com o objetivo de superar alguns obstáculos epistemológicos. A seguir, descrevemos pesquisas que propõem níveis de desenvolvimento para a aprendizagem de funções.

A pesquisa de Isoda (1996)

Este modelo de desenvolvimento de linguagem de funções foi criado comparando as práticas de ensino japonês e currículo nacional japonês com formas generalizadas dos Níveis de van Hiele. O estudo de Isoda utiliza a estrutura dos níveis de compreensão geométrica e mostra que eles também podem indicar características para a linguagem de funções. Estas características incluem: hierarquia da linguagem, dualidade de objeto e método, linguagem matemática e contextualização do pensamento dos alunos (ISODA, 1996 p. 105). Através de investigações sobre o desenvolvimento da linguagem dos alunos para descrever funções e sua origem histórica, os níveis de compreensão foram elaborados tomando como base os níveis de compreensão geométrica.

Nível 1 - Linguagem Cotidiana: Os alunos raciocinam basicamente por meio de especulações, através da linguagem cotidiana, os conceitos de funções são vistos como um todo, não sendo levadas em conta considerações explícitas das propriedades dos seus componentes. Com isso, discutem alterações numéricas através de resultados observados em cálculos simples e/ou calculadoras, normalmente suas descrições são feitas com base em uma variável fisicamente evidente, a variável dependente. Mesmo estando conscientes das diferenças numéricas, é difícil explicá-las adequadamente usando duas variáveis, uma vez que suas observações são feitas verbalmente, usando uma linguagem cotidiana.

Nível 2 – Aritmética: Neste nível inicia-se uma análise informal dos estudos de funções através do uso de aritmética e tabelas. Ao explorarem as tabelas, os alunos descrevem as regras de relações, suas conclusões sobre as relações dos fenômenos são mais precisas com as tabelas do que com a única linguagem cotidiana do Nível 1. Apesar de conseguirem descrever as relações, não é fácil traduzir para notações.

Nível 3 - Álgebra e Geometria: Os alunos conseguem estabelecer interrelações entre a lei de formação das funções e seus gráficos, convertem as notações de tabelas, equações e gráficos através de álgebra e geometria. Neste nível, sua noção de função está bem evoluída, envolve a representação em diferentes notações.

Nível 4 – Cálculo: Os alunos desenvolvem o estudo das funções a partir de conhecimentos de cálculo, como limite, derivada e integral.

Nível 5 – Análise: Um exemplo de linguagem para a descrição é a análise funcional, que é uma metateoria do cálculo. A justificação deste nível é baseada no desenvolvimento histórico e ainda não foi investigada.

Modelo proposto por Bergeron & Herscovics (1982)

Os pesquisadores Jacques C. Bergeron e Nicolas Herscovics desenvolveram um esquema para o ensino de funções. Neste modelo, os pesquisadores basearam-se nos obstáculos cognitivos estudados anteriormente. Bergeron & Herscovics (1982) usaramuma abordagem construtivista, partindo da intuição dos alunos para a formalização, onde cada nível foi construído sobre o anterior. Os níveis são descritos como:

Compreensão Intuitiva: pensamento com base na percepção visual e ações primitivas não quantificadas, resultando em aproximações.

Matematização Inicial: organização e quantificação das primeiras noções intuitivas para a construção de um conceito.

Abstração: o conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria, com generalizações.

Formalização: uso da linguagem simbólica, justificação lógica das operações, descontextualização e descoberta dos axiomas.

4 I PROPOSTA DE MODELO DE NÍVEIS DE DESENVOLVIMENTO PARA FUNÇÕES BASEADO EM VAN HIELE

Com base nos níveis de van Hiele e nas outras referências estudadas, nossa pesquisa propõe um modelo próprio para o desenvolvimento do pensamento de funções. Para a validação da escala proposta foram aplicados dois testes durante o ano de 2015 com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola particular, e uma atividade, com os mesmo alunos dos primeiros testes e alunos do primeiro e segundo ano do CAp UERJ, e alunos do terceiro ano do curso de eletrônica do CEFET-RJ.

Considerando os resultados obtidos e os modelos de níveis para funções das pesquisas de Isoda (1996) e Bergeron & Hercovics (1982), sugerimos a seguinte classificação para o desenvolvimento do pensamento de funções para alunos do Ensino Médio:

• Nível 1: É um pré-conceito de função. Reconhecimento das variáveis dependente e independente, estabelecimento de esquemas visuais (gráfico ponto a ponto) e tabelas. Noções não formais de variação (temperatura, dependência...)

• Nível 2: Reconhecimento do domínio e contradomínio, marcação de pares ordenados a partir da expressão algébrica de uma função. Uso da notação $y = f(x)$.

• Nível 3: Identificação da expressão analítica da função, distinção entre equação e função, construção e interpretação de gráficos.

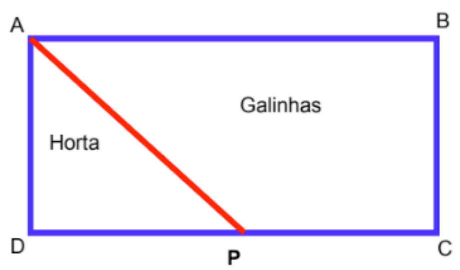
• Nível 4: Reconhecimento de funções injetoras, sobrejetoras, pares e ímpares , operações com funções, relação entre funções.

Após a definição dos níveis de desenvolvimento para o conceito de função, era preciso validar essa escala, ou seja, verificar se eram de fato hierárquicos, e descrever o desempenho de sujeitos em cada nível. Foi então elaborada uma sequência de atividades para a coleta de dados, aplicadas inicialmente com alunos do Ensino Médio de uma escola privada do Rio de Janeiro. Foram convidados os 14 alunos do 3º ano, dos quais apenas 6 concordaram em participar voluntariamente. Infelizmente, estes alunos não alcançaram todos os níveis da escala proposta, o que nos levou a aumentar a amostra.

Para isso, desenvolvemos uma sequência didática, para ser aplicada a uma amostra bem mais ampla de alunos de Ensino Médio. Esta nova amostra foi composta pelos 6 alunos da escola particular inicial, 12 alunos do Colégio de Aplicação da UERJ, sendo 6 do primeiro ano e 6 do segundo ano, e 13 alunos do terceiro ano do curso de eletrônica da CEFET-RJ. Com essa amostra foi possível validar a hierarquia dos níveis propostos para o conceito de função, já que havia alunos raciocinando nos quatro níveis.

A atividade a seguir foi aplicada na pesquisa para validar os três primeiros níveis da escala proposta, o nível 4 foi testado em outra atividade, descrita mais adiante.

O dono de um sítio, de forma retangular de dimensões 4 m por 8 m, divide seu terreno de modo a poder criar galinhas e cultivar hortaliças durante o ano todo. Para isso, ele fixou uma estaca num dos cantos do terreno (A) e ali prendeu uma das pontas de um rolo de tela, fixando a outra ponta numa estaca que fica num ponto qualquer (P) do lado oposto (CD).



Conforme a sua necessidade, durante o ano, ele varia a localização desta ponta da tela que é móvel, ou seja, a do ponto P, sempre sobre CD. O retângulo, ao lado, representa a situação da divisão das regiões de utilização do sítio. O terreno da horta tem o formato de um triângulo retângulo. Lembre-se que a área de um triângulo é expressa por: $A = \frac{b.h}{2}$

Quadro 1: Atividade de validação dos níveis 1, 2 e 3*Sugestão: Represente a horta para cada valor de d no retângulo desenhado no item a.*

A seguir, descrevemos os itens, com respostas características de cada nível. Os três primeiros itens poderiam ser respondidos no nível 1:

a) Desenhe, no retângulo, a região da horta ADP para o caso em que **P** esteja a 3 m do ponto D. Pinte esta região.

b) Qual a área da horta com essas dimensões?

c) Represente a distância de **D** a **P** pela letra **d** e execute as instruções acima para os valores escritos na tabela:

Distância d (m)	Expressão da área da horta	Área da horta (m^2)
0,5 m		
1,2 m		
5,5 m		

Quadro 2: Atividade de validação do nível 1

Todos os alunos da amostra responderam corretamente as questões de nível 1, o que significa, que não havia alunos classificados abaixo do primeiro nível. Tal fato se deve à atividade ter sido aplicada com alunos de Ensino Médio no mês de dezembro, quando todos os estudantes já haviam estudado funções, inclusive os que estavam no 1º ano do Ensino Médio.

Com relação aos itens (a) e (b) não há nada significativo a comentar, já no item (c), uma aluna utilizou a variável *x* ao lado de cada valor de *d*, o que indica a forte influência da notação *f(x).* Esta aluna foi classificada como nível 1.

Os itens (d), (e) e (f) já exigiam raciocínio no nível 2:

d) Pode-se construir hortas no formado indicado para os seguintes valores de **d**?

d = 0,1m; d = 0m; d = 8m; d = $\sqrt{2}$ m

e) Quais os valores inteiros que **d** pode assumir? Quais os valores que **d** pode assumir?

f) A área da horta depende do valor de **d?** Justifique

Quadro 3: Atividade de validação do nível 3

No geral, os alunos acertaram os itens (d) e (f). O problema encontrado no item (d) foi com relação às opções de valores d = 0 e d = $\sqrt{2}$, alguns poucos alunos, consideram que poderia haver medida d=0, enquanto outros poucos estudantes, acharam que devido ao fato de $\sqrt{2}$ ser um número irracional, não poderia existir essa medida para d. No item (e), alguns alunos de nível 1completaram com um não a segunda questão, dessa forma a pergunta ficou quais valores *d* não pode assumir. Tal pensamento é característico de nível 1, uma vez que estes estudantes interpretaram como quais os valores dentre os apresentados na letra anterior não poderiam ser possíveis. Alunos no nível 1 identificam as variáveis da função, entretanto, ainda não conseguem identificar os possíveis valores contínuos ou discretos do domínio. A distinção de domínio discreto/contínuo é característica de alunos no nível 2.

As respostas aos últimos itens demandam raciocínio no nível 3 da escala:

g) Qual o valor de **d** correspondente à horta de maior área?
h) Dê uma expressão para a área da horta ADP em função de **d**.
i) Esboce o gráfico que representa a situação descrita pelo problema.
j) Qual a posição do ponto **P** para que a área da horta seja 5 m^2? E 7,4 m^2?
k) Qual a posição do ponto **P** para que a área da horta 5 m^2? E 7,4 m^2?
l) A área da horta **ADP** aumenta ou diminui quando o ponto **P** se aproxima do ponto **C**?
m) Que função o gráfico representa?

Quadro 4: Atividade de validação do nível 3

As questões de nível 3 confirmaram que os alunos em níveis inferiores apresentam grande dificuldade em obter/transcrever as informações obtidas nas expressões analíticas para os gráficos. Assim, os itens (h) e (i) foram os itens que apresentaram maior número de erros ou de não realização por parte dos alunos de níveis inferiores.

Alguns alunos de nível inferior ao responderem o item (h) apresentaram como resposta a expressão $A = \frac{d\ x\ \overline{DA}}{2}$, mesmo sabendo que o valor de $\overline{DA}$ é sempre igual a 4, enquanto que alunos em nível 3 e 4 apresentaram como expressão $A(d) = 2d$

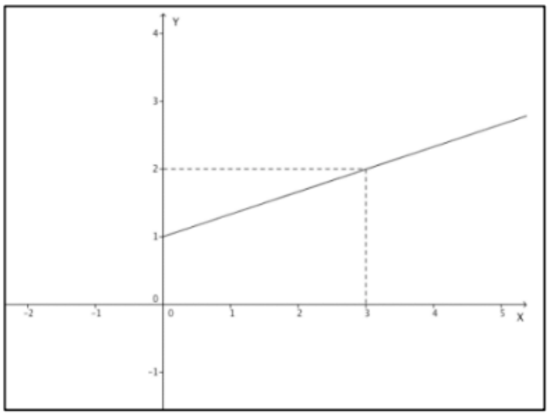
A seguinte atividade, adaptada de Sant'Anna (2001), foi proposta para validar respostas no nível 4 da escala. Estes 4 itens foram classificados no Nível 4 da escala, pois tinham como objetivo verificar se o aluno é capaz de operar com funções, perceber a simetria das funções pares em relação ao eixo vertical e tirar conclusões a partir das definições dadas.

Uma função f é par se e somente se $f(x) = f(-x)$ para todo x de seu domínio.

Uma função f é ímpar se e somente se $f(x) = -f(-x)$ para todo x de seu domínio.

Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é par e a função $g(x) = x^3$ é ímpar.

A figura ao lado mostra um pedaço do gráfico de uma função $f: R \to R$.



Esboce um complemento para o gráfico de f, à esquerda do eixo vertical supondo que f seja par.

Considere, agora, a função h definida por:

$$h(x) = f(x) + f(-x).$$

Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo, justificando sua resposta.

( ) Se f é uma função par e $f(x)$ é um número inteiro, então $h(x)$ é um número par.

( ) Se $h(x)$ é um número par sempre que $f(x)$ for um número inteiro, então f é uma função par?

( ) Se a função f é ímpar, então $h(x) = 0$ para todo x.

Quadro 5: Atividade de validação do nível 4

A maioria dos alunos raciocinando em níveis inferiores ao terceiro nível errou pelo menos alguma delas, principalmente o item que pedia para completar o gráfico apresentado, considerando que a função dada era par. Isso ocorreu porque estes alunos não entenderam a definição de função par e ímpar, não sendo capazes de responder a estes itens, o que comprova que eles estavam num nível inferior ao 4. Por se tratar de questões de Verdadeiro ou Falso, alguns alunos de nível inferior ao 4 acertaram algumas das opções, sem justificativa, e erraram as demais, o que nos deu a entender que estes "chutaram". Os alunos que justificaram estes itens levaram e consideração a natureza de *f(x)*, justificando que a soma de dois números pares é um número par, assim como a soma de dois números ímpares também é um número par.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria de van Hiele para o pensamento geométrico tem servido como modelo para a elaboração de materiais escolares e de atividades geométricas, uma vez que estabelece níveis hierárquicos para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Vale lembrar que, de acordo com essa teoria, o progresso nos níveis de conhecimento depende mais do ensino que apenas da idade ou maturidade dos estudantes.

Este artigo relata uma pesquisa de mestrado, inspirada nos trabalhos desenvolvidos por Isoda (1996) Bergeron & Hercovics (1982), que descrevem níveis hierárquicos para a linguagem de funções. Trata-se de uma tentativa de aplicar um modelo, do tipo de van Hiele, para o tópico de função. Nossa pesquisa foi realizada com alunos dos três anos do Ensino Médio de escolas pública e particular no Rio de Janeiro, buscando validar uma escala de níveis pensada para a realidade brasileira.

A expectativa é que tal modelo poderia facilitar o trabalho do professor do Ensino Médio na tarefa de ajudar os alunos a construir esse conceito, com todas as suas particularidades e variedade de representações. Acreditamos que nossa proposta de níveis atende a estas necessidades e poderá contribuir efetivamente para a apropriação do saber matemático no tópico de funções por parte dos alunos.

Consideramos que o trabalho tem potencial para produzir contribuições relevantes para a pesquisa na área, uma vez que propõe-se a identificar problemas inerentes a estudantes brasileiros. A intenção do trabalho de mestrado foi elaborar e implementar atividades diversificadas para a aprendizagem de funções, verificando através dos resultados obtidos suas contribuições para a aprendizagem. Essa proposta certamente poderá contribuir para descrever o desenvolvimento da aprendizagem de funções, ajudando a entender esse fenômeno e a identificar possíveis contribuições e limitações do modelo proposto.

REFERÊNCIAS

BERGERON, J. e HERCOVICS, N. ***Levels in the understanding of functions*** *concept. Proceedingsofthe Workshop ofFunctions.*Enschede, The Netherlands, 1982.

DUBINSKY, E.***Reflective abstraction in advanced Mathematical Thinking***. Em: TALL, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.1991

ISODA, M., ***The Development of Language about Function: An Application of Van Hiele's Levels***. PME 20, Valencia, Espanha, vol.3, p.105-112, 1996.

NASSER, L. ***Using the van Hiele Theory to Improve Secondary School Geometry in Brazil***.Tese de doutorado apresentada na Universidade de Londres, 1992.

REZENDE, W. M. ***O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica***, Tese de Doutorado, São Paulo: FE-USP, 2003.

REZENDE, W. M. ***Um Mapeamento do Ensino de Funções Reais no Ensino Básico***, Sbem, 2006.

SANT´ANNA, N. F. P***, Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no ensino médio no colégio Pedro II***, dissertação de mestrado, PUC-Rio, 2001.

SIERPINSKA, A. ***On understanding the notion of function***. In: DUBINSKY, E;

HAREL, G (Ed.) **The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy**. MAA Notes, 1992, p.25-58.

TALL, D. (Ed.): ***Advanced Mathematical Thinking***. Kluwer Academic Publishers.1991

VINNER, S.***The hole of definitions in the teaching and learning of Mathematics***. Em: Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.1991

CAPÍTULO 12

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NUMA PERSPECTIVA INCLUSIVA: ESTRATÉGIAS EM BUSCA DA APRENDIZAGEM DE ALUNOS COM DEFICIÊNCIA INTELECTUAL NO ENSINO MÉDIO

Elcio Pasolini Milli
Rede Estadual de Educação do Espírito Santo
Vitória - ES

Cátia Aparecida Palmeira
Rede Estadual de Educação do Espírito Santo
Vitória - ES

RESUMO: Apresentamos episódios de um estudo realizado nos anos de 2014 e 2015, em uma escola pública da rede estadual de Vitória-ES, através da parceria de dois professores de matemática, sendo um deles regente das turmas. Realizamos uma pesquisa de caráter qualitativo, tendo como objetivo explorar possibilidades de aprendizagens de dois alunos com deficiência intelectual, durante as aulas de matemática em turmas de ensino médio regular. Trazemos atividades realizadas com esses alunos, abordando os conteúdos de adição, subtração e divisão. Verificamos que os alunos com deficiência intelectual ampliaram o conhecimento que já possuíam em relação às operações matemáticas. Além disso, passaram a ser envolvidos nas atividades escolares pelos demais colegas da turma. Destacamos que, ao realizar um trabalho com alunos com deficiência intelectual, o professor constrói aprendizagens que interferem diretamente nas suas relações com o ensino-aprendizagem dos demais alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Estratégias; Aprendizagem Matemática; Deficiência Intelectual; Ensino Médio.

ABSTRACT: We present episodes of a study carried out in the years 2014 and 2015, in a public school of Vitória-ES, through the partnership of two math teachers, one of them being regent of the classes. We developed a qualitative research, aiming to explore the possibilities of learning of two students with intellectual disabilities, during the math classes in high school classes. We share some activities with these students, about contents of addition, subtraction and division. We found that students with intellectual disabilities expanded their knowledge of mathematical operations. In addition, they became involved in school activities by the other classmates. We emphasize that, when performing a work with students with intellectual disabilities, the teacher builds learning that directly interfere in their relationships with other students' teaching and learning.

KEYWORDS: Strategies; Mathematical Learning; Intellectual Disability; High School.

1 I INTRODUÇÃO

Apresentamos episódios de um estudo realizado durante os anos de 2014 e 2015, envolvendo dois alunos com deficiência intelectual presentes em salas de ensino regular. Este se deu em uma escola estadual de Vitória/ES, através da parceria de dois professores de matemática, sendo um deles regente das turmas.Acreditamos na possibilidade de buscarmos alternativas para a construção de uma escola inclusiva,numa perspectiva otimista. Encontramos apoio em Mantoan (2013) ao afirmar que

> Muito já tem sido feito no sentido de um convencimento das vantagens da inclusão escolar para todo e qualquer aluno. Embora não pareçam, as perspectivas são animadoras, pois as experiências inclusivas vigentes têm resistido às críticas, ao conservadorismo, as resistências de muitos (MANTOAN, 2013, p. 40).

No primeiro ano, trabalhamos com duas turmas de segundo ano do ensino médio. Em cada uma havia um aluno com deficiência intelectual, conforme laudos médicos e relatórios iniciais de Atendimento Educacional Especializado – AEE. Segundo Espírito Santo (2011, p. 16) “O atendimento educacional especializado deverá ser oferecido pelos sistemas públicos de ensino, por meio da ação de professor especializado na área específica de atendimento, em turno inverso à escolarização, em sala de recursos.” No ano seguinte, ambos os alunos permaneceram na escola e cursaram o terceiro ano do ensino médio na mesma turma.

Os pesquisadores se conheceram através da participação em um grupo de estudos que se reúne semanalmente. Acreditamos que as reflexões sobre as práticas pedagógicas e discussões com outros professores complementam a formação inicial do professor e aperfeiçoam suas ações docentes. Em uma das reuniões do grupo, a professora regente, compartilhou suas expectativas de trabalhar com alunos com deficiência intelectual. O outro pesquisador interessou-se pelo assunto e decidiram desenvolver e experimentar estratégias para o ensino-aprendizagem de matemática com esses alunos.

2 I METODOLOGIA

Realizamos uma pesquisa de caráter qualitativo utilizando experimentações diretas no espaço escolar, acrescidos de registros pictóricos e escritos, diálogos e análises de documentos. Realizamos o planejamento das tarefas levando em consideração uma atividade diagnóstica, para determinar um ponto de partida e considerar o que os alunos já traziam de conhecimento até o momento sobre cada assunto. Encontramos apoio em Lorenzato (2010) quando fala que

> [...] ninguém vai a lugar algum sem partir de onde está, toda aprendizagem a ser construída pelo aluno deve partir daquela que ele possui, isto é, para ensinar, é preciso partir do que ele conhece, o que também significa valorizar o passado do aprendiz, seu saber extraescolar, sua cultura primeira adquirida antes da escola, enfim, sua experiência de vida (LORENZATO, 2010, p. 27).

À medida que as aulas foram acontecendo, planejamos novas abordagens sobre cada tema e fizemos algumas atividades de verificação de aprendizagem buscando relacionar a proposta de ensino com o conhecimento construído com os alunos. A avaliação "precisa e deve ser encarada como uma apreciação de uma evolução de desempenho dos alunos e do trabalho pedagógico desenvolvido pelo professor" (SANTOS, 1997, p. 12).

Encontramos algumas barreiras na comunicação e na compreensão das necessidades individuais dos alunos com deficiência intelectual. Este fato, fez com que procurássemos novos conhecimentos, além da área específica. Apropriamo-nos de experiências vivenciadas por nós e por colegas do grupo de estudos, principalmente aqueles que atuam nas séries iniciais, além de contarmos com nossa criatividade e intuição. Concordamos com Martínez (2005) quando diz que

> [...] trabalhar a partir de uma representação do espaço de sala de aula como um espaço de diversidade educativa exige dos educadores e psicólogos o desenvolvimento de novos conhecimentos, novas competências e muita criatividade, porém, precisamente nesse esforço de experimentação, de fracasso e de acertos, é que a inclusão pode ser efetivamente construída. (MARTÍNEZ, 2005, p. 101).

Relatamos em linhas gerais, comportamentos e ações desses alunosem aulas de matemática, os quais chamamos de Marly e Luiz (nomes fictícios). Para isso, utilizamos nossas observações e relatórios da profissional de AEE do ano de 2013. Obtivemos a informação que ambos eram alfabetizados, porém apresentavam algumas dificuldades de leitura, escrita e coordenação motora. Na matemática, conheciam os números e realizavam operações simples de adição e subtração utilizando material manipulável.

Marly costumava sentar-se na primeira carteira da fileira central. Observamos uma dificuldade na sua dicção. No decorrer das aulas, ela estava sempre interessada nas atividades e atenta aos acontecimentos. Abria o caderno e esperava que as atividades fossem propostas. Ao recebê-las, Marly começava resolver imediatamente, solicitando a intervenção quando tinha alguma dúvida ou quando terminava.

No início do ano letivo, Luiz sentava-se no fundo da sala e costumava ficar sonolento. Alguns professores comentaram este fato com a profissional de AEE, que solicitou a ele que sentasse próximo ao professor. Raramente falava para se comunicar e quase não interagia com os colegas e professores. Ao receber as atividades, Luiz precisava de incentivo para começar a executá-las e de estímulos constantes para concluí-las.

3 I PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Em sua pesquisa de mestrado, Rosso (2012) apresenta dois estudos de caso: um realizado com um estudante com Síndrome do X-Frágil (SXF) e o outro com estudante com Síndrome de Prader-Willi (SPW). Seu objetivo foi investigar e compreender a aquisição dos princípios e procedimentos de contagem numérica e recuperação de fatos aditivos da memória em cada estudante. Os dados de sua investigação foram obtidos através de análise documental, aplicação de tarefas, observações em sala de aula e no espaço escolar. Em suas conclusões, aponta que

> [...] para superar o ensino e a aprendizagem mecanizada e o acesso sem escolarização, são fundamentais as atividades de leitura de números, de escrita numérica, de quantificação, os jogos matemáticos e as experiências vivenciadas pelos alunos. Também os processos avaliativos, os espaços e os tempos de aprendizagem, os currículos e os processos de formação de professores e auxiliares devem ser reavaliados e readequados. (ROSSO, 2012, p.78)

Esses resultados orientaram nosso estudo quanto a possíveis estratégias a serem experimentadas com os alunos com deficiência intelectual, uma vez que estes, também se encontravam em salas de ensino regular, com um nível de escolarização que não condizia com a série em que estavam cursando.

Yokoyama (2012) teve como objetivo principal, em sua pesquisa de doutorado, analisar a compreensão de quantificação de 1 a 10 elementos de crianças e adolescentes com síndrome de Down e elaborar atividades que poderiam contribuir para o desenvolvimento dessa compreensão. Utilizou materiais multissensoriais para permitir que os participantes verificassem e melhorassem suas próprias estratégias de contagem, rompendo com o ensino mecanizado. Dentre esses materiais destacamos o uso dos dedos das mãos. Segundo o autor "Os dedos das mãos são o primeiro 'instrumento' sensorial do ser humano que o auxilia na aquisição do conceito de número relacionado a quantidade" (YOKOYAMA, 2012, p. 65). Em nosso estudo também consideramos os dedos das mãos como material importante no apoio às estratégias de ensino-aprendizagem com os alunos com deficiência intelectual.

Como base teórica para fundamentar nosso trabalho,consideramos os constructos da teoria de Vygotsky: mediação, processo de internalização e defectologia. Ao abordar Vygotsky e os processos de formação de conceitos, Oliveira (1992) comenta que:

> As concepções de Vygotsky sobre o funcionamento do cérebro humano fundamentam-se em sua ideia de que as funções psicológicas superiores são construídas ao longo da história social do homem. Na sua relação com o mundo, mediada pelos instrumentos e símbolos desenvolvidos culturalmente, o ser humano cria as formas de ação que o distinguem dos outros animais (OLIVEIRA,1992, p. 24).

Acreditamos que, na dinâmica da sala de aula, as interações sociais entre os alunos e seus professores, ou mesmo entre os próprios alunos são essenciais para o desenvolvimento e construção do conhecimento. Concordamos com Rocha (2009, p. 38) quando afirma que "o professor tem a oportunidade de assumir a tarefa de intermediar as relações, incentivar os alunos em suas tarefas, trabalhar como facilitador de aprendizagem e gerenciar trabalhos em grupo".

Segundo Vygotsky (2003), o conceito de mediação pode ser concebido como a utilização de um elemento intermediário numa relação, em que este passa a ser mediador. Moreira (2009, p. 108-109) ressalta que "essa mediação inclui o uso de instrumentos e signos". Vygotsky, citado por Moysés, (2009, p. 23) "inclui dentre os signos, a linguagem, os vários sistemas de contagem, diagramas, mapas, desenhos, e todo o tipo de signos convencionais". Neste trabalho, observamos nas relações entre todos os envolvidos noambiente escolar, que o processo de mediação se desenvolve através de discussões, diálogos e outros recursos usados no cotidiano da sala de aula.

Vygotsky (2005) evidencia através de seus experimentos, que a criança é um ser social desde que nasce e que ao nascer já encontra a linguagem trazendo sua marca histórico-cultural. E através de estímulos externos, esta vai construindo significados e os incorpora em suas ações. A este processo, denominado de internalização por Vygotsky, Moreira (2009) diz que:

> Envolve o conhecimento já internalizado, ações e estratégias dos indivíduos numa interação e é através dessa internalização que ações, procedimentos e funções de um se transformam em recursos do outro. Num processo de auto-regulação, as funções psicológicas elementares são transformadas em funções mediadas e conscientes (MOREIRA, 2009, p. 49).

Outro conceito da teoria de Vygotsky importante para fundamentar esse estudo é a defectologia. Este constructo destaca a maneira que o indivíduo com deficiência se desenvolve, buscando caminhos diferentes daqueles limitados pela deficiência(VYGOTSKY, 1997). Segundo Veer e Valsiner (1996, p. 73) "o termo 'defectologia' era tradicionalmente usado para a ciência que estudava crianças com vários tipos de problemas ('defeitos') mentais e físicos". Em 1924, Vygotsky, realiza sua primeira publicação nessa área. Seus estudos focavam a importância da educação social e no potencial para o desenvolvimento normal das crianças deficientes. Segundo ele, as deficiências físicas (cegueira, surdo-mudez ou um retardamento mental) geram uma mudança na situação social da criança e das pessoas com as quais elas se relacionam mais intimamente (VEER; VALSINER, 1996).

4 I DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS EPISÓDIOS

Apresentamos a descrição e análise de quatro episódios ocorridos durante a pesquisa abordando os temas matemáticos de: adição, subtração, resolução de problemas e divisão. Estes foram selecionados devido à participação de ambos os alunos nas atividades propostas e ao objetivo de mostrarmos uma parte de cada conteúdo abordado no estudo.

No primeiro episódio destacamos uma atividade que foi desenvolvida no caderno dos alunos durante as aulas de matemática, com cada aluno em sua devida sala de aula. Escrevemos expressões numéricas de adição e solicitamos que eles as resolvessem. Observamos que Marly, ao receber o caderno com as atividades, arrancou uma folha em branco e começou a fazer “risquinhos”, utilizando representações icônicas que identificavam as quantidades das parcelas das adições e depois os contava e anotava como resultado. Ela transforma os numerais em unidades icônicas e depois realiza a contagem. Nessa atitude, identificamos o processo de internalização de conceitos, pois ela vai construindo significados e incorporando às ações de seu cotidiano escolar (VYGOTSKY, 2005).Ela resolveu as expressões com adição sem cometer nenhum erro, conforme a Figura 1.

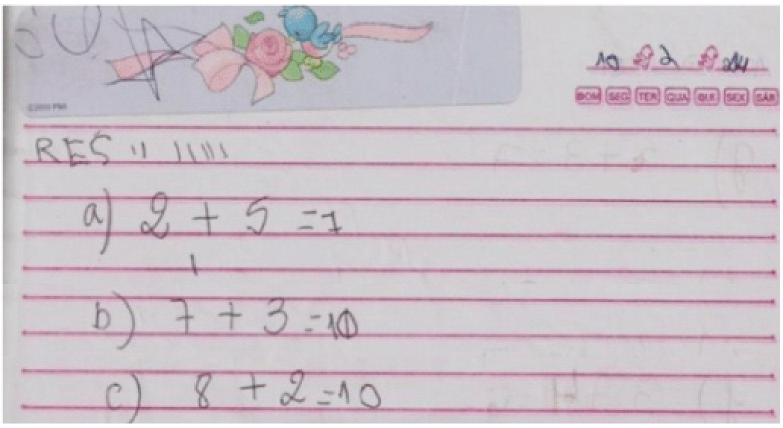


Figura 1 - Expressões de adição resolvidas por Marly.

Fonte: Os autores.

Luiz realizou as operações através da representação das quantidades nos dedos das mãos para identificar cada parcela a ser somada. Percebemos nesta ação, que ele utiliza seus dedos como instrumento de mediação para realizar a atividade proposta e alcançar o resultado desejado (MOREIRA, 2009).Ele acertou as expressões com parcelas menores que cinco e teve dificuldade em responder as demais. Silva (2009, p. 70) em seus estudos sobre ideias relacionadas às estruturas aditivas, fala da “ideia de combinar ou juntar duas grandezas para obter uma terceira”. Acreditamos que esses alunos ao resolverem as expressões numéricas de adição, utilizam a ideia de juntar. De acordo com a defectologia de Vygotsky (1997) evidenciamos que os alunos desenvolveram suas estratégias para lidar com a situação proposta diferente daquelas limitadas pela deficiência, principalmente as relacionadas aos registros icônicos e utilização dos dedos das mãos.

No segundo episódio propusemos atividades que contribuíssem com o desenvolvimento conceitual da operação de subtração explorando a ideia de retirar. Orientamos que Marly utilizasse os ícones que ela já estava acostumada a utilizar nas expressões de adição. Pedimos que ela representasse o minuendo com a quantidade de “risquinhos” e riscasse a quantidade de símbolos referentes ao subtraendo, realizando a contagem dos que não foram riscados (Figura 2).

Figura 2 - Marly resolvendo expressões de subtração.

Fonte: Os autores.

Para Luiz efetuar as subtrações, sugerimos que utilizasse os dedos como já realizava anteriormente na operação de adição. Pedimos que representasse a quantidade do minuendo e abaixasse os dedos referentes à quantidade do subtraendo, efetuando a contagem dos dedos que ficassem levantados. Além disso, segundo Brasil (2014) este processo mobiliza

> “competências importantes como coordenação viso-motora-auditiva (vê-mexe-verbaliza) realizando tanto a correspondência biunívoca como ordenação e inclusão (estruturas lógicas que devem ser trabalhadas e são determinantes na construção de número).” (BRASIL, 2014, p. 13)

É importante que o aluno sinta a representação dos números em suas mãos por meio da quantidade de dedos levantados (YOKOYAMA, 2012). Nessa abordagem, orientamos que o aluno também sentisse a quantidade de dedos abaixados, para instigar a ideia de retirar e estimular o processo de internalização desse conceito.

No terceiro episódio, utilizamos a estratégia de resolução de problemas para ampliar as ideias de adição e subtração. Acreditamos que “a maioria (senão todos) dos importantes conceitos e procedimentos matemáticos pode ser melhor ensinada através da Resolução de Problemas” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p. 223). Permitimos que os alunos realizassem manipulações com alguns objetos (Figura 3) para que estes se tornassem sujeitos dos problemas, já que o foco está nas transformações efetuadas sobre o material e não no próprio objeto (VALE, 1999).

Figura 3 - Alunos resolvendo problemas com material manipulável.

Fonte: Os autores.

Utilizamos problemas com linguagem simples e escrevemos os numerais por extenso, para não apresentá-los de forma explicita. Estimulamos a interpretação a fim de que os alunos usassem as expressões numéricas como instrumento para resolução dos problemas.

Iniciamos as atividades de 2015, verificando as aprendizagens dos alunos com deficiência intelectual, ambos na mesma turma. Escolhemos algumas situações-problema trabalhadas no ano anterior (Figura4) e percebemos que os alunos as resolveram com êxito.

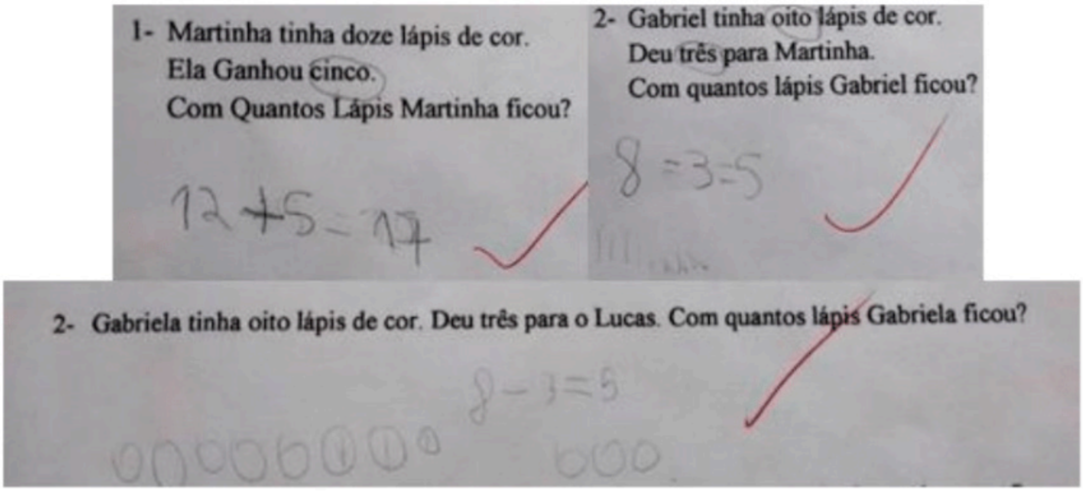


Figura 4 - Problemas resolvidos pelos alunos.

Fonte: Os autores.

No quarto episódio trabalhamos o conceito de divisão, tomando como base as ideias de partição e quotição. Segundo Selva e Borba (2005)

> Problemas de divisão têm sido analisados na literatura como basicamente de dois tipos: partição e quotição. Problemas de partição são aqueles em que é dado um conjunto maior e o número de partes em que o mesmo deve ser distribuído, o

resultado é o valor de cada parte. Problemas de quotição consistem em problemas em que é dado o valor do conjunto maior e o valor das quotas em que se deseja dividir o mesmo, o resultado consiste no número de partes obtidas. (SELVA E BORBA, 2005, p. 55).

Para explorar a ideia de quotição, usamos como representações icônicas um retângulo que chamamos de "caixa" e figuras iguais que eram desenhadas dentro do mesmo. O enunciado propunha que o aluno organizasse grupos com uma determinada quantidade de figuras. Pedimos que os alunos limitassem com uma linha as quantidades de figuras solicitadas. Observamos que ambos os alunos não apresentaram dificuldades em realizar esse tipo de atividade. Posteriormente solicitamos que contassem as quantidades de grupos formados e anotassem esse resultado (Figura5).

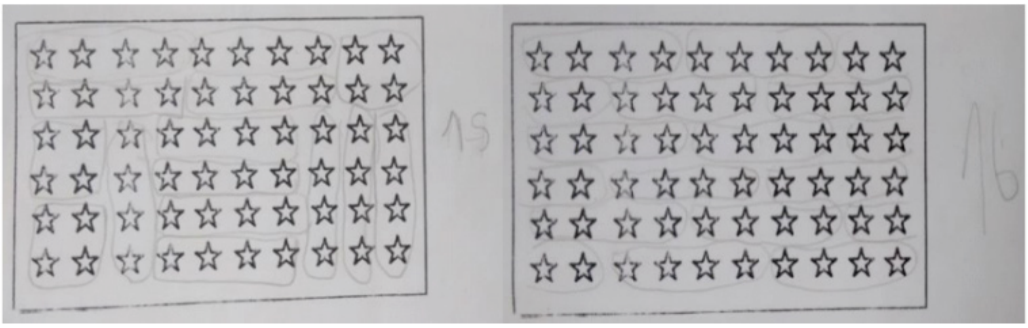


Figura 5 - Atividades sobre divisão com ideia de quotição

Fonte: Os autores.

Objetivando a construção da ideia de partição, elaboramos uma atividade similar à anterior. Nesse caso desenhamos figuras na "caixa" e, logo abaixo, uma quantidade de retângulos menores que chamamos de "caixinhas" que representavam a quantidade de partes que as figuras da "caixa" seriam divididas. Ao realizarmos essa atividade com os alunos, sugerimos que a cada figura desenhada nas "caixinhas", fosse riscada uma figura da "caixa", possibilitando a distribuição por correspondência termo a termo, apoiada na ideia de repartir em partes iguais (SILVA et al, 2015). Luiz e Marly apresentaram um pouco de dificuldade ao realizarem a primeira atividade desse tipo. Porém à medida que foram estimulados, eles tornaram-se mais confiantes e realizaram outras atividades similares com sucesso(Figura 6).

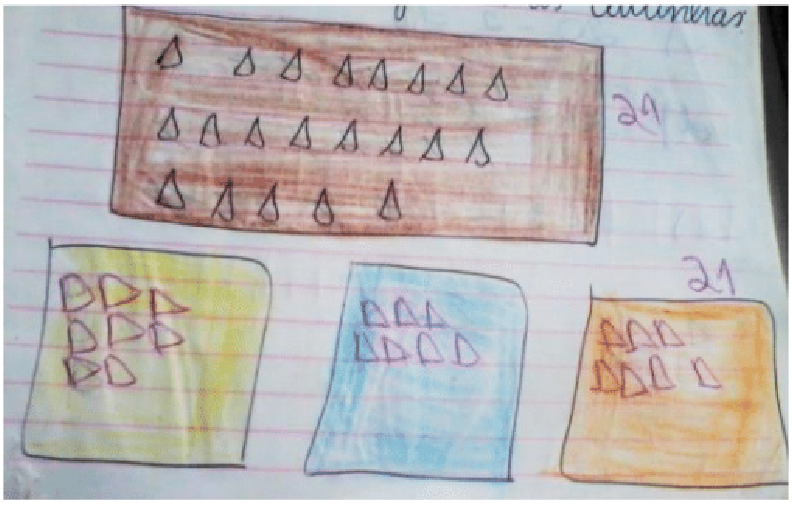


Figura 6 - Atividade sobre divisão com ideia de partição.

Fonte: Os autores.

Avançando na construção do conceito de divisão, sobre a ideia de quotição, solicitamos aos alunos que contassem a quantidade de figuras da “caixa” e fizessem o registro numérico. Pedimos que contassem também a quantidade de figuras que foram distribuídas em cada uma das “caixinhas” e também registrasse. Por fim, solicitamos que somassem o valor encontrado na contagem de cada “caixinha” e comparassem com o resultado da “caixa”. Sugerimos que observassem o fato de que, se a divisão estivesse correta então os resultados teriam o mesmo valor, pois não poderiam sobrar figuras na “caixa”, nem faltar figuras nas “caixinhas”. Essa abordagem ajudou os alunos a conferirem se fizeram a distribuição corretamente. Esta estratégia de verificação da solução foi internalizada pelos alunos. Em alguns momentos quando questionados se a solução apresentada estava correta, eles apontavam os resultados e mostravam que estes correspondiam à mesma quantidade.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um ambiente de perseverança e a crença nas possibilidades de aprendizagem dos alunos com deficiência intelectual foram imprescindíveis para os resultados alcançados neste trabalho. Conhecer os alunos e verificar os conhecimentos que já possuíam em suas vivências, principalmente em relação à matemática, foi um importante ponto de partida para traçar o planejamento e desenvolver novas estratégias.

Destacamos que os alunos com deficiência intelectual passaram a ser envolvidos espontaneamente, pelos colegas de turma, em trabalhos em grupo e atividades extraclasse, sem a necessidade da interferência da professora de matemática. Nesses momentos os alunos com deficiência intelectual recebiam tarefas a serem cumpridas, assim como os demais integrantes do grupo. Acredita-se que essas ações aconteceram a partir da observação dos estímulos oferecidos aos alunos com deficiência intelectual, durante as aulas de matemática. Este fato dialoga com Jesus (2002) quando fala

> [...] da possibilidade da criação de situações pedagógicas em que todo aluno possa "entrar no jogo", a partir de uma pedagogia possível, criando condições de mediações culturais que façam da sala de aula e da escola um verdadeiro espaço-tempo de aprendizagem (JESUS, 2002, p. 215-216).

Estas situações pedagógicas caracterizam a interação dos alunos com deficiência intelectual com a professora de matemática e demais colegas da turma.

É possível destacar importantes aprendizagens para os docentes envolvidos no estudo. Estes se dispuseram a buscar e construir novos conhecimentos, diferentes dos estabelecidos na área específica, aprimorar as ferramentas e, sobretudo, desenvolver e analisar a eficácia dos recursos metodológicos utilizados nessa pesquisa. Quando um professor se dispõe a realizar um trabalho com alunos com deficiência intelectual, este constrói aprendizagens que interferem diretamente nas relações desse profissional com o ensino-aprendizagem dos demais alunos.

Esperamos que estas experiências inspirem outros professores, principalmente os atuantes na área de educação matemática, a desenvolverem estudos com alunos com alguma deficiência. É preciso se contagiar com a ideia da possibilidade de atender todos os alunos, considerando as especificidades, particularidades, habilidades e potencialidades de cada indivíduo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: **Construção do Sistema de Numeração Decimal**. Brasília: MEC, SEB, 2014.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. **Diretrizes da Educação Especial na Educação Básica e Profissional para Rede Estadual de Ensino.** 2. ed. Vitória : SEDU, 2011.

JESUS, Denise Meirelles de. **Educação inclusiva:** construindo novos caminhos. Relatório final de estágio de Pós-Doutorado. USP. Vitória: PPGE, 2002.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MANTOAN, Maria Teresa Eglér. **O desafio das diferenças nas escolas**. 5. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

MARTÍNEZ, Albertina Mitjáns. **Inclusão escolar**: desafios para o psicólogo. In: MARTÍNEZ, Albertina Mitjáns. (Org.) Psicologia escolar e compromisso social: novos discursos, novas práticas. Campinas: Alínea, p. 95-114, 2005.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999. 4. Reimpressão 2009 (nova ortografia).

MOYSÉS, Lúcia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. 9. ed. Campinas: Papirus, 2009.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vygotsky e o processo de formação de conceitos. In: LA TAILLE, Yves de;

OLIVEIRA, Marta Kohl de; DANTAS, Heloysa. **Piaget, Vygotsky, Wallon**: Teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992, p. 23-34.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO,

Maria Aparecida Viggiani, BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. revisada. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

ROCHA, Mescenas Miranda. **Um estudo do desenvolvimento de atividades investigativas na aprendizagem de matemática no ensino médio**. 2009. 211f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória.

ROSSO, Telma Regina França. **Contagem numérica e recuperação de fatos aditivos em estudantes com síndromes do x-frágil e de prader-willi.** 2012. 98f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:** métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

SELVA, Ana Coelho Vieira; BORBA, Rute Elizabete de Souza R. **O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata**: analisando a contribuição da calculadora. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro: o grupo, n. 47, p. 51-72, jul./dez. 2005.

SILVA, Alexsandra Lúcia Miranda Lima Senna da; PALMEIRA, Cátia Aparecida; MILLI, Elcio Pasolini; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira. Explorando a resolução de situações-problema do conceito matemático de divisão no ensino fundamental. In: BAZET, Lydia Márcia Braga; SILVA, Sandra Aparecida Fraga da. (Org.). **Contribuições do grupo de estudo no planejamento e realização de uma aula sobre divisão.** 1 ed. Vitória: Editora Ifes, 2015, v. 1, p. 99-109.

SILVA, Sandra Aparecida Fraga. **Aprendizagens de professores num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais.** 2009. 364f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

YOKOYAMA, Leo Akio. **Uma abordagem multissensorial para o desenvolvimento do conceito de número natural em indivíduos com síndrome de down.** 2012. 230f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

VALE, Isabel. **Materiais manipuláveis na sala de aula:** o que se diz, o que se faz. In APM (Eds.), Actas do ProfMat 99, (p.111-120). Lisboa: APM, 1999.

VEER, René van der; VALSINER, Jaan. **Vygotsky:** uma síntese. São Paulo: Loyola, 1996.

VYGOTSKY, Levi Semiónivitch. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005. (Publicado pela primeira vez em 1987).

______. **A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Organizado por Michel Cole et al. Tradução José Cipolla Neto; Luiz Silveira Menna Barreto; Solange Castro Afeche. 6. ed. 1998. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

______. **Obras escogidas V** – Fundamentos da defectología. Traducción: Julio Guillermo Blank. Madrid: Visor, 1997.

CAPÍTULO 13

APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES SOBRE SEU ENSINO A PARTIR DE ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS

Francisco José Brabo Bezerra
Universidade Federal do ABC – UFABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição.
São Paulo – SP – Brasil

Francisco Erivaldo Rodrigues Gomes
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE
Santo André - SP - Brasil

Caroline Miranda Pereira Lima
Universidade Federal do ABC - UFABC
Santo André - SP - Brasil

RESUMO: O presente capítulo tem como propósito investigar e relacionar competências e habilidades apresentadas por estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e terceiro ano do Ensino Médio, ao valer-se da linguagem algébrica para manipular situações matemáticas. A metodologia aplicada é de caráter qualitativo e buscou-se fazer uma análise comparativa entre grupos de estudantes dos dois níveis de ensino, um do nono ano do Ensino Fundamental, e o outro do terceiro ano do Ensino Médio. Todas as atividades foram desenvolvidas no âmbito do programa Observatório da Educação (OBEDUC) da Universidade Federal do ABC (UFABC). Assim, possibilitou-nos compreender se há afinidades entre os grupos de estudantes, ao descreverem suas ideias quanto ao método de resolução das atividades propostas. As atividades adotadas nesta investigação têm como objetivo discutir os diferentes critérios apresentado por estudantes ao reproduzir e manipular situações matemáticas envolvendo concepções de álgebra. Concluímos que os grupos chegaram a uma etapa importante no progresso do pensamento algébrico, com significativa presença de procedimentos aritméticos. Analogamente, comporá um estimulante para os professores na reflexão sobre suas práticas docentes, não apenas no campo da Álgebra, mas também em outras abordagens relacionadas à teoria do "Conhecimento Matemático para o Ensino" (Mathematical Knowledge for Teaching - MKT), que a nosso ver é fundamental aos professores quando desenvolvem suas funções ao ensinar.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino e Aprendizagem; Álgebra; Ensino Fundamental e Médio.

ABSTRACT: The following chapter has the purpose of investigating and relating the capability and abilities presented by ninth (9th) grade of elementary Middle School students and High School seniors (third year of High School), availing of algebraic language to manipulate mathematic situations. The applied methodology is of qualitative character and was sought to make a comparative analysis between groups of students from two different education levels, one from Middle School, and the other

from High School. All activities were developed in the Observatório da Educaçãos (OBEDUC) [Observatory of Education] field, from the ABC Federal University (UFABC). This made it possible for us to comprehend if there are affinities between both student groups, by having the students describe their ideas regarding the resolution method of the proposed activities. The activities adopted in this investigation have a main objective in the discussion of the different criteria presented by students when reproducing and manipulating mathematic situations involving algebraic conceptions. We concluded that both groups have arrived at an important stage in the algebraic thinking progress, with significant presence of arithmetical procedures. Analogously, we will compose a stimulant to teachers in the reflection of their teaching practices, not only in the Algebra field, but also in other approaches related to the Mathematical Knowledge for Teaching - MKT theory, which is, in our perspective, fundamental to teachers when developing their teaching tasks.
KEYWORDS: Teaching and Learning; Algebra; Middle School and High School.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho encontra-se incorporado em um projeto de pesquisa intitulado *Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: uma abordagem baseada em perfis conceituais*, no âmbito do Programa Observatório da Educação[1] (OBEDUC) da CAPES, com duração de quatro anos e constituído por bolsistas e colaboradores, dentre os quais encontram-se estudantes de graduação e de Pós-Graduação, professores da Educação Básica e professores do Ensino Superior. O referido projeto aborda três temáticas relacionadas à Álgebra: a álgebra vista por ela mesma, a álgebra vista em suas intersecções com a geometria e a álgebra vista em suas intersecções com a aritmética e a análise. O principal objetivo do projeto é *investigar os conhecimentos algébricos desenvolvidos por professores, ao ensinar álgebra na Educação Básica, utilizando-se de uma abordagem baseada em perfis conceituais*.

O interesse em álgebra vem tanto do destaque que a ela é dado na Educação Básica como dos resultados das macroavaliações, como a Prova Brasil/SAEB (2011) e dos dados do Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que *evidenciam as deficiências dos estudantes em seus conhecimentos algébricos*.

O entusiasmo pelas concepções de álgebra de professores da Educação Básica de Ensino decorre a princípio da necessidade de identificar uma compreensão de álgebra própria do grupo, uma vez que, destas discussões teóricas, fica claro que o entendimento sobre o que é álgebra não é único nem restrito. Focamos nosso olhar nas estratégias de resolução de alunos do Ensino Fundamental e Médio da Rede Pública do Estado de São Paulo. Assim, nosso objetivo foi identificar nos estudantes o reflexo do conhecimento algébrico de acordo com as concepções de álgebra estabelecidas a

1 Projeto de pesquisa financiado pela Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (CAPES), coordenado pelo Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro (projeto 1600/2012).

priori e reconhecer quais relações na aprendizagem são comuns. Enfatizamos que no presente trabalho pretende-se investigar a aprendizagem da álgebra nos alunos, para além do projeto original que investiga o conhecimento do professor.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As análises desta pesquisa terão por suporte o quadro de referencial teórico das categorias de Álgebra, elaborado pelo grupo de pesquisa OBEDUC, e apresentado no decorrer deste trabalho. A ideia de elaboração do quadro se deu em face da necessidade de oferecer ao grupo uma compreensão de álgebra própria, e da preocupação de diminuir as complexidades em unificarmos os conceitos algébricos. Apresentamos primeiramente os autores que pautaram nesta investigação, bem como na construção do quadro teórico, e de modo resumido, as investigações realizadas por cada um deles.

- Usiskin (1995) apresenta as seguintes concepções; A Álgebra *como aritmética generalizada*. Aqui as ações importantes para o estudante são as de traduzir e generalizar. A Álgebra *como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, sendo que, as instruções chaves são simplificar e resolver. A Álgebra *como estudo das relações entre grandezas*. A Álgebra *como estudo das estruturas*, neste caso, as atividades optam por manipular e justificar.

- Lee (2001) descreve que, para fornecer um modelo sobre visões de álgebra, destaca-se a álgebra como: *Linguagem* para desenvolver a comunicação em uma linguagem algébrica; *Caminhos de Pensamento*, ou seja, pensamentos sobre relações matemáticas, *Atividade* como modelo de construção de atividades; *Ferramenta* para resolver problemas de modo a veicular e transformar mensagens; *Generalização* ou estudo das estruturas da aritmética.

- Fiorentini *et al.* (1993), os autores apresentam concepções, tanto de Álgebra como de Educação Algébrica, constituídas como reflexo de alguns aspectos do desenvolvimento histórico, tanto da própria álgebra, como das práticas escolares.

- Ribeiro (2013), o autor traz uma discussão sobre perfil conceitual e ensino de matemática e apresenta algumas zonas de um perfil conceitual de equação e, a partir de reflexões e análises que foram propiciadas por um estudo envolvendo pesquisas suas e de seus alunos.

Depois que o grupo se debruçou a estudar sobre as concepções de álgebra dos autores acima citados, passou-se a organizar e compreender o processo de interpretação dos dados e a categorização dessas concepções identificadas. Isso posto, surgiu a ideia de construir um "Quadro de referência das categorias de Álgebra", sintetizado da seguinte forma:

Categorias de Álgebra	Principais ideias
1. Pré-Algebra	» Manipulação de somas, produtos e potências aritméticos; » Resolução de problemas aritméticos para a introdução do pensamento algébrico
2. Generalizações	» Aritmética generalizada; » Estrutura de representação formal do concreto (através da abstração); » Atribuir grau de abstração e generalidade aos símbolos linguísticos;
3. Relações	» Estudo das relações entre grandezas
4. Estruturação	» Estudo das estruturas e propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios; » Linguagem simbólica/variável como símbolo arbitrário
5. Modelagem	» Iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta; » Construção da atividade e exercícios de modelagem; » Modelagem de situações a partir de situações-problema.
6. Manipulação	» Conjunto de técnicas ou procedimentos específicos para abordar problemas por métodos algorítmicos; » Capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas primordialmente simbólicas; » Atividades que envolvam incógnitas com o objetivo de simplificar ou resolver.

Figura 1: Quadro de Referencial Teórico das Concepções de Álgebra

Fonte: Silva, Saito, Souza e Bezerra (2015, p. 2622).

Este quadro nos possibilitou sintetizar as discussões de alguns autores que atuam no campo da Álgebra, lembrando que os conceitos algébricos podem ser mais intensamente e mais bem explorados quando seus significados são articulados com outras áreas do conhecimento (KILPATRICK; HOYLES; SKOVSMOSE, 2005).

Ainda de acordo com Kilpatrick, Hoyles e Skovsmose (2005) o problema reside na dificuldade de comunicação, transformação e negociação dos significados sociais de matemática escolar, sejam eles compartilhados, aceitos ou criticados pelos estudantes. Isto os motiva a pensar em novos significados, sejam eles verdadeiros ou não. Um significado social da matemática escolar pode funcionar como um meio de seleção e fluxo de estudantes, como uma ferramenta para habilitá-los, e este fato os influencia nas interpretações a respeito das tarefas a serem apresentadas na escola, encorajando o desenvolvimento de atitudes instrumentais e de motivação.

3 I METODOLOGIA

A pesquisa se desenvolve nos moldes da pesquisa qualitativa e os dados coletados são predominantemente descritivos. Todo o material obtido nessa pesquisa é rico em situações e acontecimentos. "O processo de pesquisa envolve (...) a análise dos dados indutivamente construída a partir das particularidades para os temas gerais e as interpretações feitas pelo pesquisador acerca do significado dos dados" (CRESWELL, 2010, p. 25).

Considera-se elementos de caráter interpretativo, tais como, a interação entre sujeitos e objetos de conhecimento como fonte de significados construídos socialmente. Outro elemento da pesquisa qualitativa que destacamos é a coleta dos dados realizada no próprio local onde intercorre a produção dos fenômenos que se quer investigar, quer seja, a escola ou a sala de aula (ESTEBAN, 2010). Ainda, de acordo, com Demo (2000), insere-se numa perspectiva teórica por ter como objetivo "reconstruir teoria, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos" (DEMO, 2000, p. 20), ou ainda, desenvolver quadros teóricos.

Para melhor compreensão dos resultados sintetizados neste capítulo, organizamos sua apresentação em duas categorias: estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e estudantes do 3º ano do Ensino Médio, sendo os detalhes da construção dos dados apresentados segundo sua pertinência em cada uma das categorias.

Para realizar tais investigações partimos da seguinte estrutura: em um primeiro momento aplicamos um questionário que possibilitasse identificar o perfil dos estudantes - idade, afinidade coma matemática, histórico de escolaridade, entre outros - em outra etapa, um questionário com cinco atividades propostas aos estudantes foi aplicado, tanto para os alunos do nono ano do Ensino Fundamental quanto para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Para sua resolução, os estudantes de cada turma se organizaram em grupos de até cinco pessoas. Além da atividade escrita, foram coletadas, por meio de gravações, as discussões entre os estudantes de cada grupo.

As escolas participantes incorporam a Rede Pública do Estado de São Paulo e estão situadas na região do Grande ABC. Ademais, algumas delas incluem professores da Educação Básica de Ensino que, anteriormente, já haviam cooperado com o desenvolvimento de outras pesquisas do grupo do OBEDUC, outrora apresentadas em artigos[2].

Assim, com o intuito de relacionar tanto as Concepções de Álgebra estudadas pelo grupo de pesquisa do Observatório da Educação - OBEDUC, por meio da análise da metodologia e procedimentos de resolução utilizados pelos alunos, bem como de

2 ALMEIDA, M. V. R.; ALVES, K. R.; SILVA, T. H. I.; SILVA, R. L. **Uma Proposta de Análise Vertical:** Investigando o Conhecimento Matemático para o Ensino de Professores da Educação Básica. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. 2015.
SOUZA, D.; SILVA, R. L.; RIBEIRO, A. J. **Investigando o que pensam os Professores da Educação Básica sobre Álgebra.** V SHIAM - Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática. 2015.

reconhecer o pensamento lógico-dedutivo aplicado pelos mesmos durante a resolução das atividades, fez-se um levantamento e uma análise comparativa entre os grupos formados com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental e terceiro ano do Ensino Médio. Os estudantes tiveram participação voluntária, e, como em sua maioria, eram menores de idade, buscou-se o consentimento dos seus responsáveis quanto a participação na pesquisa, por via de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

As atividades desenvolveram-se em três escolas e em dois momentos. O primeiro encontro envolveu a apresentação do grupo de pesquisa do OBEDUC e, na sequência, propomos aos participantes a realização de um *brainstorming, isto é,* uma dinâmica de grupo, onde os alunos deveriam expressar seus conhecimentos a respeito do termo *equação*. Todas as ideias sobre a palavra *equação* foram, por nós, consideradas, sem qualquer julgamento de valor- certo ou errado - de modo que todas integraram a compilação do encontro. Esse momento foi melhor explorado no artigo que tratou especificamente de analisar os dois encontros, onde apenas um nível de ensino foi considerado[3].

O segundo encontro ocorreu na sala de aula com a participação de 95 estudantes, envolvendo as três escolas participantes e os dois níveis de ensino pesquisados. Mais especificamente, participaram 54 alunos do nono ano do Ensino Fundamental e 41 alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Dentre os pesquisados foram formados 17 grupos de nonos anos, cuja nomenclatura atribuída foi G1EF ao G17EF e, posteriormente, dois descartados para a análise (G1 e G3), em virtude da falta do TCLE. Nos terceiros anos formaram-se doze grupos, nomeados de G1EM ao G12EM, em sua maioria compostos com quatro integrantes cada. Após nossas orientações, os estudantes dispuseram de duas aulas de 50 min cada, totalizando 1 hora e 40 min para debaterem e transcreverem suas reflexões. Paralelamente, enquanto acontecia a realização das atividades descritas, o grupo que conduzia a pesquisa fazia anotações e alguns questionamentos aos participantes, de maneira que fossem estimulados durante todo o processo e cujos dados coletado compõem as análises deste estudo.

Após a finalização dos dois encontros, em todas as escolas participantes, o grupo reuniu os instrumentos coletados, entre eles as gravações, fotografias referentes ao *brainstorming,* os formulários de perfil dos alunos, atividades e autorizações para realizar o processo de interpretação e quantificação dos dados. Após o mesmo, classificamos e organizamos cada grupo de estudantes conforme as Concepções de Álgebra e nossos referenciais teóricos, subdividindo-os em conformidade às categorias do *Quadro de referência das categorias de Álgebra*. Desta forma, utilizamos o questionário da terceira etapa para sintetizar as ideias de Álgebra dos estudantes do nono ano do Ensino Fundamental (Quadro 1) e do terceiro ano do Ensino Médio

3 SILVA, E. A.; SOUZA, D. S.; ALBRECHT, E.; FERREIRA, M. C. N. **Analisando como Alunos do 9º ano da Rede Pública respondem e interpretam questões de Álgebra.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016.

(Quadro 2). Ambos os quadros apresentam a compilação da análise dos instrumentos de avaliação, descritos a seguir:

Categorias de Álgebra	Questão 1a	Questão 1b	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
Pré-Álgebra	G7 - G9 - G10 G11 - G13 - G16	G7 - G9 - G10 G11 - G13 - G16	G2 -G5 - G6 G7 - G9 - G10 G11	G2 - G4 - G9 G12 - G14 - G15 G16 - G17		G5 - G7 - G12 G13 - G14 G15 - G16 G17
Generalizações	G5	G5	G17		G12 - G17	G9
Relações	G12 – G14 G17	G12 - G14 - G17			G14	
Estruturação					G9	
Modelagem						
Manipulação						
NA – Não Aplica	G2 - G6 - G8 G15	G2 - G6 - G8 G15	G13 - G14 G15 - G16	G5 - G7 - G8 - G10 - G11	G2 - G5 - G7 G15 - G16	
NR – Não Respondeu	G4	G4	G8 - G12/	G6 - G13	G4 - G6 - G8 G10 - G11 G13	G2 - G4 - G6 G8 - G10 - G11

Quadro 1: Análises com base nas categorias de Álgebra do Quadro de Referencial Teórico

(vide figura 1) 9° ano Ensino Fundamental (Grupos: G2, G4 ao G17)

Fonte: Grupo OBEDUC

Categorias de Álgebra	Questão 1a	Questão 1b	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
Pré-Álgebra	G1 - G5 - G6 - G9	G1 - G5 - G6 G9	G4	G5 - G10		G1 - G5 - G3
Generalizações	G4 - G7 - G8 G10 - G11	G4 - G7 - G8 10 - G11	G1 - G2 - G5 G6 - G10 G11 - G12	G4 - G7 G8 - G11	G8 - G11	G4 - G7 - G10
Relações	G2	G2				
Estruturação					G7 - G10	
Modelagem						
Manipulação					G4	
NA – Não Aplica	G3	G3	G3 - G7 - G8 G9	G1 - G6 - G12	G1 - G5 - G6 - G9	G6 - G8 - G9 G11
NR – Não Respondeu	G12	G12		G2 - G3 - G9	G2 - G3 - G12	G1 - G2 - G12

Quadro 2: Análises com base nas categorias de Álgebra do Quadro de Referencial Teórico

(figura 1) 3° ano Ensino Médio (Grupos: G1 ao G12)

Fonte: Grupo OBEDUC

Com relação ao *Quadro de referência (figura 1)*, em comparação com as respostas dos estudantes, constatamos que havia algumas atividades que, apesar de apresentarem algum dado escrito, não expressavam necessariamente um significado, desenvolvimento ou processo aritmético e/ou algébrico. Nesses casos adotamos a categoria “NA - Não se aplica” para representar as situações-problema de cada grupo de alunos que não se enquadravam nas categorias de Álgebra por nós estipuladas.

Para representar, neste artigo, as análises desenvolvidas, optamos por eleger quatro grupos, sendo dois representantes do nono ano do Ensino Fundamental, **G9EF** e **G17EF**, e os outros dois, **G4EM** e **G10EM**, representantes do terceiro ano do Ensino Médio. Além disso, duas das atividades realizadas, neste caso, a **Situação 1** e a **Situação 3** foram escolhidas para esse estudo. O critério utilizado para a escolha dos grupos a serem investigados nesse artigo foi a maior/melhor compatibilidade dos mesmos com o *Quadro de referência das categorias de Álgebra*. Além disso, a escolha das questões a serem analisadas levou em consideração a participação no questionário - isto é, questões que foram respondidas, independentemente de acertos ou erros.

4 I ANÁLISE DE DADOS

Para os referidos grupos selecionados para a análise - **G9EF** e **G17EF** dos nonos anos do Ensino Fundamental e **G4EM** e **G10EM** dos terceiros anos do Ensino Médio - optamos por analisar duas das cinco atividades que figuraram o questionário proposto aos estudantes no segundo momento das investigações. Os protocolos obtidos serão mostrados a seguir junto com as nossas análises.

Situação 1. “Considere a situação abaixo:

a) Quanto pesam as três galinhas?

b) Quanto pesa cada galinha?” [4]

4 Questão adaptada de BRANCO, N; PONTE, J. P. da. A álgebra na formação inicial de pro-

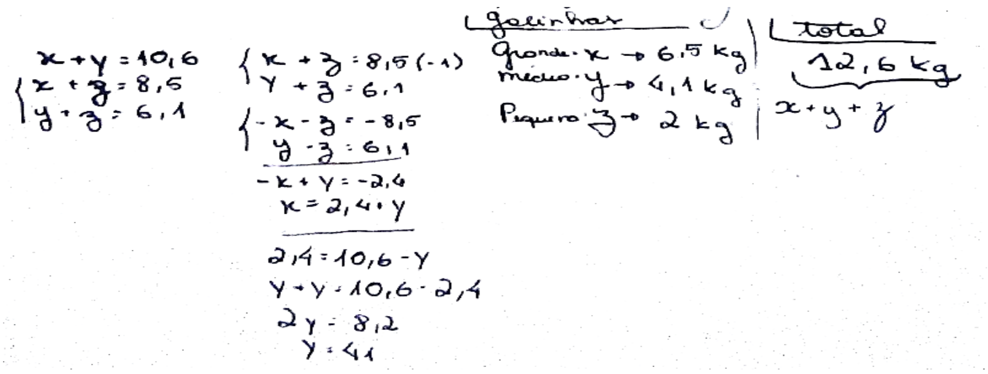


Figura 2: Protocolo G4EM (3º ano EM - Questão 1)

Fonte: Grupo OBEDUC

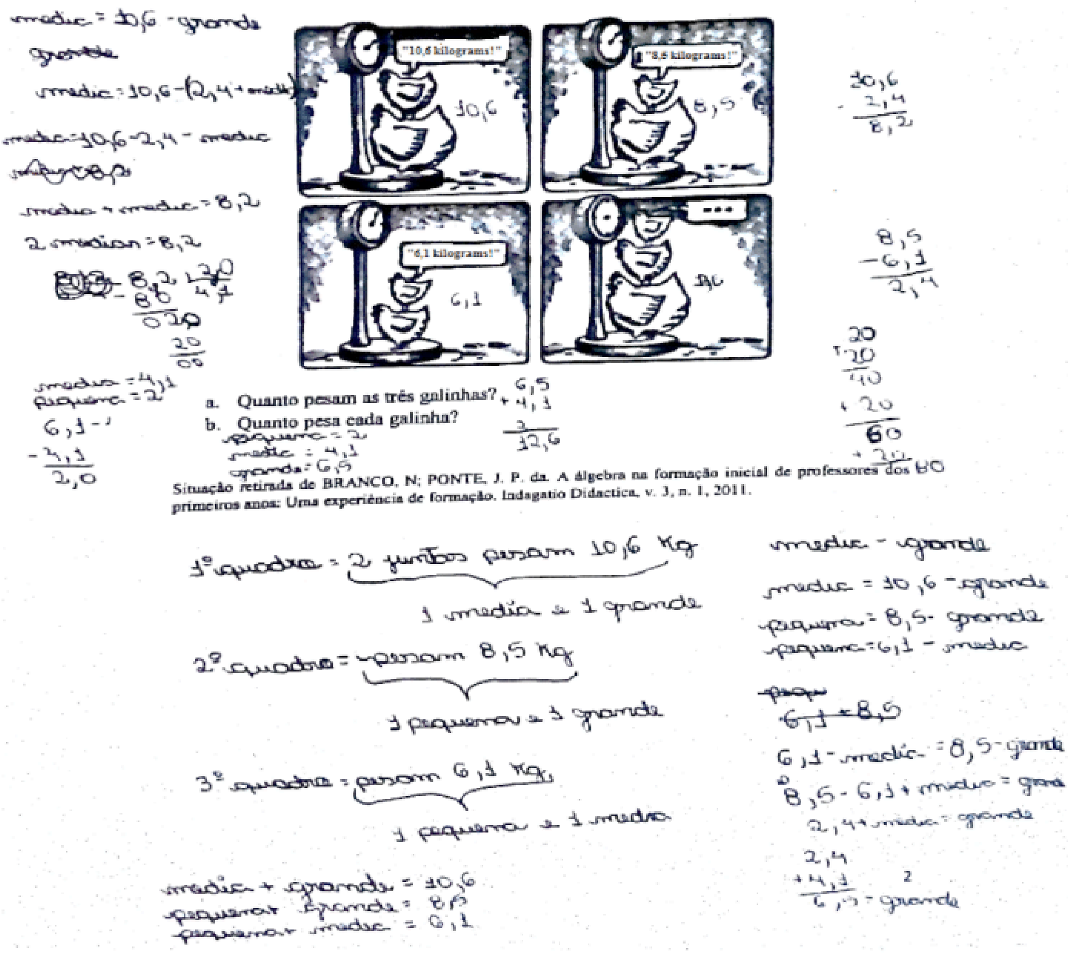


Figura 3: Protocolo G9EF (9º ano EF – Questão 1)

Fonte: Grupo OBEDUC

Ao analisar as estratégias de resolução aplicada pelos estudantes, podemos identificar que os grupos **G9EF** e **G17EF**, pertencentes ao nono ano, recorrem a

fessores dos primeiros anos: Uma experiência de formação. Indagatio Didactica, v. 3, n. 1, 2011.ia de formação. Indagatio Didactica, v.3, n. 1, 2011.

Diálogo da situação 1:*"-10,6 kilogramas! - 8,5 kilogramas! - 6,1 kilogramas! - (...)."*

operações aritméticas na tentativa de passar de uma linguagem formal para uma linguagem algébrica, buscando encontrar caminhos que tornem a situação concreta, do ponto de vista algébrico. Categorizamos este procedimento como *Pré-Álgebra*, dentre as categorias de Álgebra do quadro de referencial teórico (vide Figura 1).

Por outro lado, os grupos **G4EM** e **G10EM**, do terceiro ano do EM, buscam transformar a linguagem equacionando o problema, e elaboram um sistema de equações, resolvendo-a pelos métodos da adição e substituição. Ao resolverem a questão utilizando-se da categoria *aritmética generalizada*, eles indicam as grandezas, e nesse caso podemos classificar como uma *generalização* (vide Figura 1). Percebe-se um grau de abstração maior.

Comparando as respostas dos grupos pesquisados nos dois níveis de ensino, mediante as situações propostas aos mesmos, podemos afirmar que as estratégias adotadas são diferentes, o que era esperado em razão da etapa de ensino em que se encontram. Ficou evidente que todos os grupos, no início, recorrem à aritmética, como um dos recursos para a resolução do problema proposto. Para os alunos do 9º. ano, apesar do contato com a Álgebra, muitos ainda recorrem aos procedimentos aritméticos, enquanto que os alunos do 3º. ano do Ensino Médio o grau de formalização e abstração é maior que o grupo anterior.

Situação 3: “Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. Em cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?” [5]

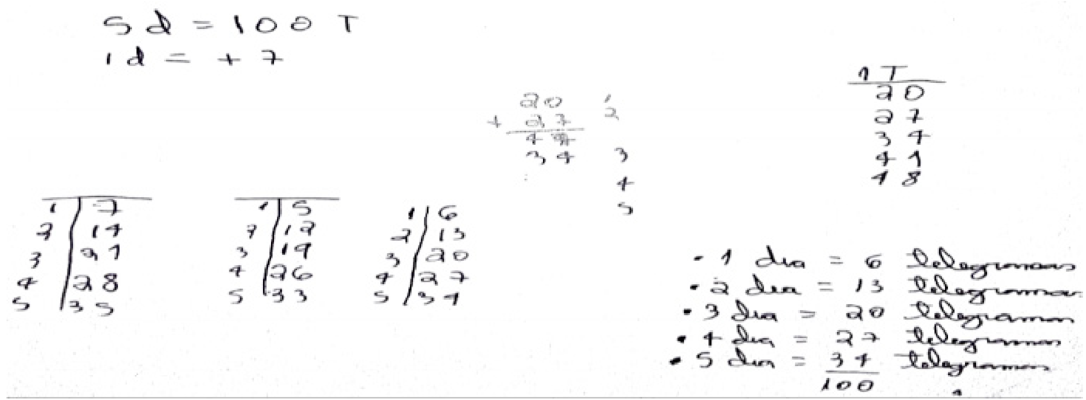


Figura 4: Protocolo G17EF (9º ano EF - Questão 3)

Fonte: Grupo OBEDUC

5 Questão retirada de BURIASCO, R. L. C. de CYRINO, M. C. de DE C. T.; SOARES. M. T. C. Manual para correção das provas com questões abertas de matemática: AVA2002. Curitiba: SEED/ CAADI.2003.

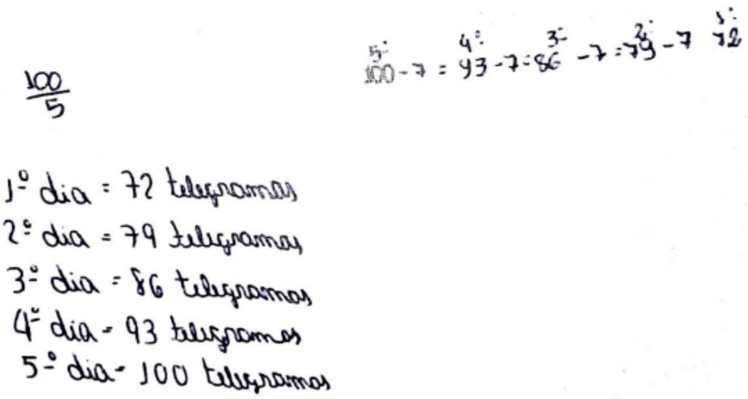


Figura 5: Protocolo G10 (3º ano EM - Questão 3)

Fonte: Grupo OBEDUC

Analisando as resoluções do **G9EF**, observamos que os estudantes apresentam uma estratégia de resolução onde as operações matemáticas são aplicadas, mas logo percebem que há divergências ao comparar os resultados obtidos, bem como na transformação da linguagem. Posteriormente apresentam o resultado sem dar descrição do método utilizado. Esta situação se enquadra, a nosso ver, na *Pré-Álgebra*. Por outro lado, o **G17EF**, ao se reportar à aritmética, o grupo estabelece alguns valores, para então, comparar os resultados obtidos, através de tentativas e erros, analisamos que a, *Pré-Álgebra* se faz presente novamente, de acordo com o quadro de referencial teórico.

Já na terceira questão do grupo **G4EM** notamos na resolução a transformação da linguagem formal para uma linguagem algébrica, equacionando o problema e desenvolvendo o processo de resolução, se enquadrando na categoria de *Generalizações.* O **G10EM,** do terceiro ano do Ensino Médio, por sua vez, efetuou a manipulação das operações aritméticas, não realizando a transformação da linguagem formal para linguagem algébrica. Mesmo assim, apresentam um raciocínio dedutivo e revelam outra interpretação do problema, se enquadrando na categoria da *Pré-Álgebra*.

De um modo geral, os grupos recorrem, inicialmente, às operações aritméticas, e buscam de alguma maneira conduzir a situação do problema à efetivação do cálculo algébrico. Em alguns momentos os estudantes não verificam se a solução obtida condiz com o enunciado proposto. Os estudantes identificam como um obstáculo o processo de tradução de uma linguagem natural para uma linguagem algébrica. Ademais, é possível aferir que os mesmos desenvolvem melhores estratégias de resolução quando há uma “provocação” e um acompanhamento por parte do professor.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta resultados parciais e se encontra dentro de um projeto de pesquisa, que tem abrangência maior em relação os conceitos de álgebra estudados até o presente momento. O quadro de referencial teórico tem servido de base ao grupo, não só com relação a este trabalho, mas também a outros trabalhos já concluídos e publicados, ou em andamento.

Ao analisar as respostas dos estudantes, passamos a compreender melhor que os processos de ensino e aprendizagem da Álgebra no contexto da sala de aula. Acreditamos que a realização de atividades exploratórias e/ou investigativas, que pretendem instigar os estudantes a pensar genericamente, perceber e explicitar regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis, (FIORENTINI; MIORIM & MIGUEL, 1993, p. 87), pode vir a ser um caminho significativo para o crescimento do pensamento e da linguagem algébrica dos estudantes.

As análises feitas neste tipo de atividade indicam que este é um cenário que apresenta, inicialmente, a motivação do pensamento algébrico dos estudantes, mesmo quando o processo percorre caminhos nos quais percebem a necessidade de recorrer e organizar os dados, de modo que as operações aritméticas os levem a efetivação do cálculo numérico. No entanto, na maioria de sua representatividade, os grupos chegaram a uma etapa significativa no progresso do pensamento algébrico.

Ao condensar as investigações desenvolvidas pelo grupo de pesquisa, acreditamos que se enquadrará como subsídio para o ensino e aprendizagem de Álgebra, em conformidade com as manifestações de novas possibilidades e aplicações, principalmente, nos métodos de manipulação dos conceitos matemáticos por parte dos estudantes. Analogamente, comporá um estimulante para os professores na reflexão sobre suas práticas docentes, não apenas no campo da Álgebra, mas também em outras abordagens relacionadas à teoria do “Conhecimento Matemático para o Ensino” (*Mathematical Knowledge for Teaching* - MKT), que a nosso ver é fundamental aos professores quando desenvolvem suas funções ao ensinar (BALL, 2008).

Ao professor cabe um importante papel como mediador e conhecedor do significado atribuído pela experiência histórica, pessoal e acadêmica, visto que suas ações em sala de aula refletem os aspectos teóricos e práticos de sua formação, e é primordial na aproximação dos sentidos pessoais para o real significado da Álgebra. Transitar da aritmética para a álgebra abstrata nos parece um longo percurso a ser trilhado pelo professor nos processos de ensino da matemática escolar.

A matemática na vida social não pode invisível parece ser mais extrema do que em outras ciências; e esta tende contra a vontade dos professores de capitalizar os usos sociais do significado, a fim de fazer da matemática parte de ações significativas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. R.; ALVES, K. R.; SILVA, T. H. I.; SILVA, R. L. **Uma Proposta de Análise Vertical**: Investigando o Conhecimento Matemático para o Ensino de Professores da Educação Básica. Anais...

VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: what makes it special?** Journal of Teacher Education, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEZERRA, F.J.B., GOMES, F.E.R., LIMA, C.M.P. **Reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de álgebra.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, XIII, 2016, São Paulo. Anais... São Paulo, São Paulo, Brasil, p. 1-12.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e misto.** 3ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um Repensar: a Educação Algébrica Elementar. Pro-Posições**. São Paulo, v.4, n.1 [10], p. 78-91. mar. 1993.

FIORENTINI, D; LORENZATO, D. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

KILPATRICK, J.; HOYLES, C.; SKOVSMOSE, O. **Meaning in mathematics education**. New York: Springer, 2005.

LEE, L. **Early - but which algebra? The future of the teaching and learning of algebra.** CIDADE: ICMI STUDY CONFERENCE, 2001.

______. An **Initiation Into Algebraic Culture Through Generalization Activities**. In: BEDNARDZ, N.; KIERAN, C. E LEE, L. (Org.). **Approaches to algebra:** Perspectives for Research and Teaching. London: Kluwer Academic Publishers, 1996. v.18. p. 87-106.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

______________________. Sobre a Álgebra. In: LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus Editora, 2001. Cap. III, p. 89-157.

RIBEIRO, A. J. **Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. Ciência e Educação**, São Paulo, v.19, n.1, p. 55-71, 2013.

SAITO, D. S.; SOUZA, D. S.; SILVA, R.L e BEZERRA, F. J. B. **Compreender no sentido que concepções de álgebra surgem em que questões das macro avaliações: ENEM 2011**. Anais do XII Encontro Paulista de Educação Matemática: XII EPEM. Birigui: SBEM/SBEM-SP, 2014

SILVA, R. L.; SAITO, D. S.; SOUZA, D. S.; e BEZERRA, F. J. B. **Concepções de álgebra: uma tentativa de construir um "quadro de referência por integrantes de um grupo colaborativo**. In: IV SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Ilhéus, Bahia, Brasil. Anais... Ilhéus: UESC, 2015. p.2612-2623.

SOUZA, D.; SILVA, R. L.; RIBEIRO, A. J. **Investigando o que pensam os Professores da Educação Básica sobre Álgebra.** V SHIAM - Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática. 2015.

USISKIN, Z. **Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis.** In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (Orgs). Tradução de Hygino H. Domingues. **As ideias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

CAPÍTULO 14

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE PRODUTOS NOTÁVEIS: EM EUCLIDES E NOS DIAS ATUAIS

Larissa Corrêa
UTFPR-CM
Campo Mourão

Ana Carolina Lopes de Melo
UTFPR-CM
Ubiratã

Claudete Cargnin
UTFPR-CM
Campo Mourão

Silvia Teresinha Frizzarini
UDESC-Joinville
Campo Mourão

RESUMO: Esse artigo é parte de uma reflexão originária de um projeto de pesquisa PIBIC-EM. Apresentamos os registros de representação semiótica para os produtos notáveis chamados de quadrado da soma e da diferença, constantes em "Os Elementos" e em livro didático usado atualmente. É uma pesquisa bibliográfica que busca analisar, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os tipos de registros utilizados para o tema nos dois contextos citados. Observou-se que a representação em língua natural se manteve, embora com uma linguagem atual mais acessível, entretanto, a representação figural (ou geométrica) de "Os Elementos" deu lugar à representação algébrica nos dias atuais. No livro didático atual analisado, a representação figural tem destaque apenas na introdução ao tema. Conclui-se que o uso concomitante, e intensivo, dos registros de representação em língua natural, geométrica e algébrica, favorece a aprendizagem relativa aos produtos notáveis, contribuindo para a redução das dificuldades inerentes ao tema.

PALAVRAS-CHAVE: Produtos notáveis; representação semiótica; história.

ABSTRACT: This article is part of a reflection originating from a PIBIC-EM research project. We present the semiotic representation records for the notable products called sum and difference square, contained in "The Elements" and in the textbook used today. It is a bibliographical research that seeks to analyze, in the light of the Theory of Semiotic Representation Records, the types of records used for the subject in the two contexts cited. It was observed that the representation in natural language was maintained, although with a more accessible current language, however, the figurative (or geometric) representation of "The Elements" gave way to the algebraic representation in the present day. In the current textbook analyzed, the figural representation is highlighted only in the introduction to the theme. It is concluded that the concomitant and intensive use of the registers of representation in natural, geometric and algebraic language, favors the learning

related to the remarkable products, contributing to the reduction of the difficulties inherent to the theme.
KEYWORDS: Remarkable products; semiotic representation; history.

1 I INTRODUÇÃO

Para um melhor ensino e aprendizado nas salas de aula de Matemática, atualmente, várias pesquisas e métodos são desenvolvidos, a fim de suprir as necessidades dos alunos e professores. A maneira de cada professor ensinar um conteúdo varia, assim como a maneira pela qual o aluno compreende a matéria que lhe é ensinada. Assim, a necessidade de se trabalhar de diversos modos um mesmo conteúdo em sala de aula é de extrema importância. Isso pode ajudar cada aluno a extrair a informação desejada, visto que nem todas as mentes pensam igual e que cada pessoa precisa trabalhar de maneiras diferentes para o seu aprendizado. Pensando nisso, estamos desenvolvendo uma pesquisa, no âmbito PIBIC-EM (Iniciação Científica – Ensino Médio), visando a elaboração de uma sequência didática para o ensino dos produtos notáveis que envolva essas "diferentes maneiras" de ensinar e aprender, as quais são contempladas, no nosso estudo, com a diversificação de registros de representação semiótica. É parte desse projeto o que está aqui apresentado.

Em relação aos conteúdos sobre produtos notáveis, é possível que os primeiros registros na história estejam no livro "Os Elementos", de Euclides (aproximadamente 325-270 a.C.), onde o autor relata os produtos "quadrado da soma" e "produto da soma pela diferença" por meio da Geometria, uma representação semiótica figural, e da linguagem natural, o que indica, a nosso ver, a possibilidade de uma pluralidade de representações desde aquela época.

Duval (2009) reforça que o acesso ao saber matemático se dá pela diversidade de representações semióticas, devido à natureza abstrata dos objetos de estudo. Além disso, importa realizar tratamentos e conversões entre tais diferentes representações, pois ao realizá-los, significa que o aluno está apto a passar de um registro de representação para outro, o que prova, segundo Duval, que o aluno conseguiu entender o conteúdo e é capaz de remontá-lo, manipulá-lo e trabalhar com ele em outros contextos, havendo então a sua compreensão significativa.

O interesse em pesquisar sobre produtos notáveis surgiu ao perceber a dificuldade de colegas em sala e também de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear; áreas da Matemática que usam os produtos notáveis como ferramenta. Como estudantes, acreditamos que utilizar diferentes formas de representação de um mesmo objeto pode ajudar muito no processo de aprendizado durante as aulas de Matemática. Ao oferecer diversas estratégias, possibilidades e caminhos a serem seguidos, teremos uma fonte de busca maior para sanar nossas dúvidas e até mesmo entender o conteúdo de maneiras diferentes, dando flexibilidade na maneira de pensar para internalizar o conhecimento, além de apreender esses conhecimentos da maneira como pensamos; ao contrário de apenas decorar o que lhe é passado, como geralmente acontece.

Nesse artigo, expomos os resultados de uma pesquisa bibliográfica realizada com o intuito de compreender as conversões entre as representações dos estudos sobre produtos notáveis, ao longo do seu desenvolvimento histórico. Sucintamente, apresentamos alguns pontos importantes da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003), que embasaram as análises apresentadas.

2 I TEORIA DE DUVAL E TIPO DE REGISTROS

Raymond Duval é autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A partir dessa teoria, muitas pesquisas da Educação Matemática foram elaboradas sobre o tema. Em seu livro, é fornecida uma definição sobre o que são as representações semióticas: "[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento". (DUVAL, 1993, p.39).

A matemática como ciência, não possui objetos de estudos que são palpáveis, ou que podemos facilmente enxergar, portanto representá-los é a forma de acessá-los e compreendê-los. Duval (2003) argumenta:

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2003, p.21)

De acordo com a teoria de Duval, quando conseguimos diversificar os registros de representação para representar um mesmo objeto de estudo, estaremos realmente construindo o conhecimento. O autor ressalta que a representação de um objeto nunca pode ser confundida com o objeto de estudo em si, entretanto, o uso de apenas um tipo de registro de representação, por exemplo, no presente caso, do registro algébrico para produtos notáveis, pode dificultar essa tarefa de diferenciação.

Ainda, segundo a teoria de Duval, as atividades cognitivas de conversão e tratamento entre os diferentes tipos de representação são fundamentais para compreender os conceitos matemáticos. Realizar a conversão da representação consiste em transformar o tipo de representação utilizado em outro, mantendo o objeto de estudo o mesmo. No contexto desta pesquisa, isso acontece quando convertemos uma representação geométrica para uma fórmula, como mostrado na Figura 1.

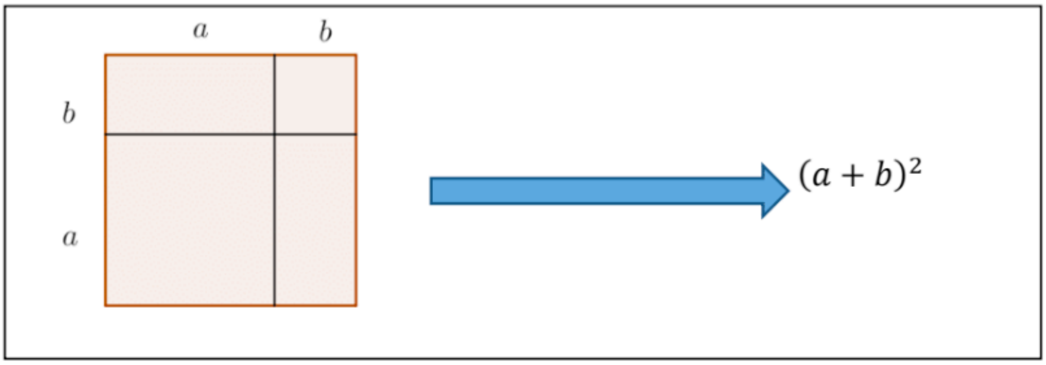


Figura 1: Exemplo de Conversão da representação figural em representação algébrica, envolvendo produtos notáveis.

Fonte: as autoras

Já o tratamento se baseia na transformação de representação mantendo o mesmo registro de representação, por exemplo, realizar os cálculos e alterações possíveis, como mostrado na Figura 2.

$$(a+b)^2 \longrightarrow a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 2: Exemplo de tratamento algébrico em produtos notáveis

Fonte: as autoras

Os tipos de registro de representação semiótica apresentados pelo autor são: a linguagem natural, representação algébrica, representação gráfica ou figural. A linguagem natural implica no uso da linguagem falada ou escrita na língua vernácula do aluno para representar os objetos de estudos, como uma explicação sobre eles. A representação algébrica se dá na maior parte das vezes no uso de números e letras. A representação gráfica ou figural é uma forma de expressar, visualmente, dados, valores numéricos ou expressões algébricas do que precisa ser trabalhado.

3 I PRODUTOS NOTÁVEIS: DE EUCLIDES AOS DIAS DE HOJE

O livro “Os Elementos” foi escrito por Euclides (325-270 a.C.), matemático de origem provavelmente grega. Esta obra reúne muitas proposições, conceitos e explicações fundamentais da geometria. Foi amplamente usado ao longo da história para realizar estudos sobre geometria, usado até mesmo nos dias atuais sua forma de transmitir a geometria.

Justificado pela situação histórica da época em que o livro foi escrito, grande parte das proposições apresentadas no livro se sustentam em relações geométricas, que se caracterizam como uma álgebra geométrica. Os gregos, então, tinham um grande avanço geométrico e se firmavam na geometria para representar o que não conseguiam por meio da pura álgebra. Assim, as operações aritméticas eram representadas por construções geométricas.

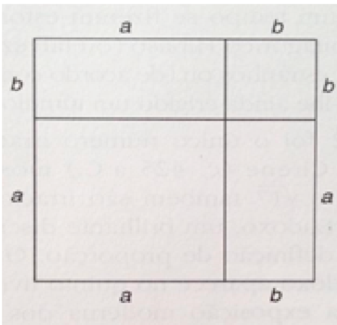
O livro está separado em cinco partes, as quais abrangem diferentes áreas da geometria. Entre essas, encontram-se representações em língua natural e figural a respeito de produtos notáveis, provavelmente um dos primeiros registros sobre o tema: as proposições IV e V.

Analisemos a proposição IV. Lembramos inicialmente que a reta em " Os Elementos" representa o que atualmente chamamos de segmento de reta. No quadro 1 apresentamos representações na língua natural e figural encontradas em " Os Elementos", juntamente com a representação algébrica, acrescentada por nós, que pode caracterizá-la. Aqui, observam-se dois tipos de conversões: RLN e RF, em que RLN – é a representação em Língua Natural, RF é a Representação Figural e RA é a Representação Algébrica. Embora seja mais difícil, é possível ainda incluir a conversão RLN .

Observe, no Quadro 1, que as partes às quais estão referidas no livro Euclides são os segmentos e . O quadrado maior é designado pelos lados . *Soma dos quadrados sobre as partes* refere-se, na representação figural, à soma das áreas dos quadrados de lados e , respectivamente, isto é, . Por fim, *o dobro do retângulo contido pelas partes* refere-se aos dois retângulos de dimensões .

Conversão RLN para RF

Conversão RF para RA

Representação em língua natural	Representação figural	Representação Algébrica*
Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes		$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Conversão RLN para RA

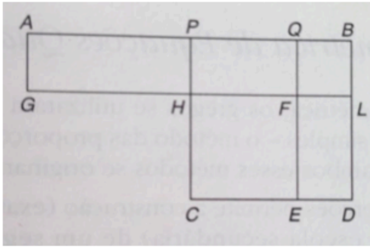
Quadro 1: Possíveis Representações da Proposição IV, Livro II de Euclides.

(*) não contemplada em "os Elementos".

Fonte: as autoras

Vejamos a proposição V do livro II, de “Os Elementos”. Observe-a, juntamente com as possíveis conversões presentes, no Quadro 2.

Conversão RLN para RF *Conversão RF para RA*

Representação em língua natural	Representação figural	Representação Algébrica*
Dividindo-se uma reta em partes iguais e desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada		$(a + b)^2 = 2ab + b^2 + a^2$ Sendo $a = \overline{PQ}, b = \overline{QB}$

Quadro 2: Possíveis Representações da Proposição V, Livro II de Euclides.

(*) não contemplada em “os Elementos”.

Fonte: As autoras

Vamos entender a proposição V. Sejam o segmento $\overline{PQ} = a$ e $\overline{QB} = b$. e . Consideremos, $\overline{PB} = \overline{BD}, \overline{QB} = \overline{BL}$..

Vamos associar a representação em língua natural com a descrição da representação figural em Euclides. Observe o Quadro 3.

Trecho da proposição	Interpretação das autoras
Dividindo-se uma reta em partes iguais e desiguais	O ponto P divide o segmento AB ao meio, isto é, em partes iguais. O ponto Q divide o segmento AB em partes desiguais.
o retângulo contido pelas partes desiguais	Refere-se à área dos retângulos PQFH e FLDE, ou seja, $2ab$
o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção	Refere-se aos quadrados de lados a e b, isto é, às áreas e a^2 e b^2
é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada	$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

Quadro 3: Interpretação sobre a representação em língua natural da proposição V de “Os Elementos”.

Fonte: as autoras

Uma outra interpretação possível para a representação figural presente no Quadro 3 (vide Figura 3) é apresentada na Figura 4.

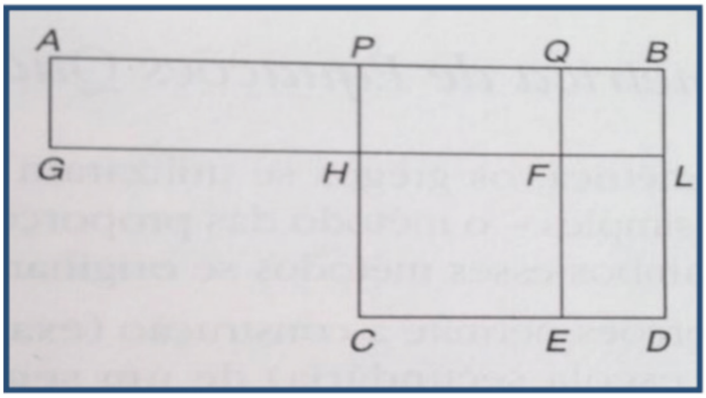


Figura 3: Representação figural associada à proposição V.

Sejam e $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{BD} = \overline{PC} = a$ e $\overline{QB} = \overline{BL} = b$.

Consideremos o retângulo ABDI conforme a Figura 4. Temos as seguintes áreas:

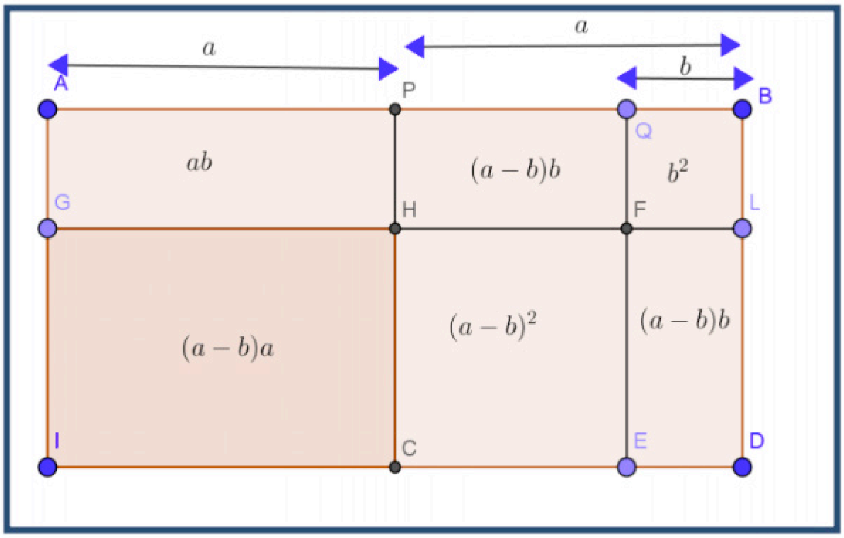


Figura 4: interpretação da proposição V de Os Elementos

Fonte: as autoras

Observe que a área total do retângulo *ABDI* é dada por $2a^2$ (I). Por outro lado, a área do polígono ABDCHG, retratado na proposição V, é: $2a^2 - (a-b)a$ (II).

Entretanto, a área do polígono ABDCHG também pode ser escrita como sendo:

$$ab + 2(a-b)b + b^2 + (a-b)^2\ (III)$$

Como (II) e (III) representam uma mesma área, devemos ter:

$$2a^2 - (a-b)a = ab + 2ab - 2b^2 + b^2 + (a-b)^2$$

$$2a^2 - a^2 + ab - 3ab + b^2 = (a-b)^2$$

De onde vem que

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Nestas duas proposições, no livro de Euclides, encontramos o uso de dois diferentes tipos de linguagem de representação para os produtos notáveis que são a linguagem natural e a figural. Podemos perceber que a explicação feita no livro de Euclides usando a linguagem natural, foi complexa, porém muito precisa. Ele não simplesmente citou a leitura da fórmula matemática para os produtos, mas sim, forneceu um caminho para a construção dos mesmos. Ele usou das palavras para representar uma figura, uma imagem e, por meio dela, expressar uma propriedade matemática. Ou seja, com esse método de explicação, em “Os Elementos” de Euclides, realizou-se a conversão entre dois diferentes registros de representação para se tratar de uma mesma proposição.

Por ser uma obra de sistematização da geometria, no livro de Euclides utiliza-se argumentos geométricos, aliados à retórica, para mostrar as propriedades matemáticas. Devido à complexidade da representação em língua natural observada em “os Elementos”, analisamos como alguns livros didáticos que ainda são usados como referências para professores utilizam esse tipo de representação para o caso $(a+b)^2$.

Analisamos Souza e Pataro (2009, p.120-121). Os autores usam a língua natural para justificar geometricamente a representação algébrica para a fórmula $(a+b)^2$, como pode ser observado na Figura 5. Entretanto, a representação em língua natural é bem mais simples do que a apresentada em “Os Elementos”.

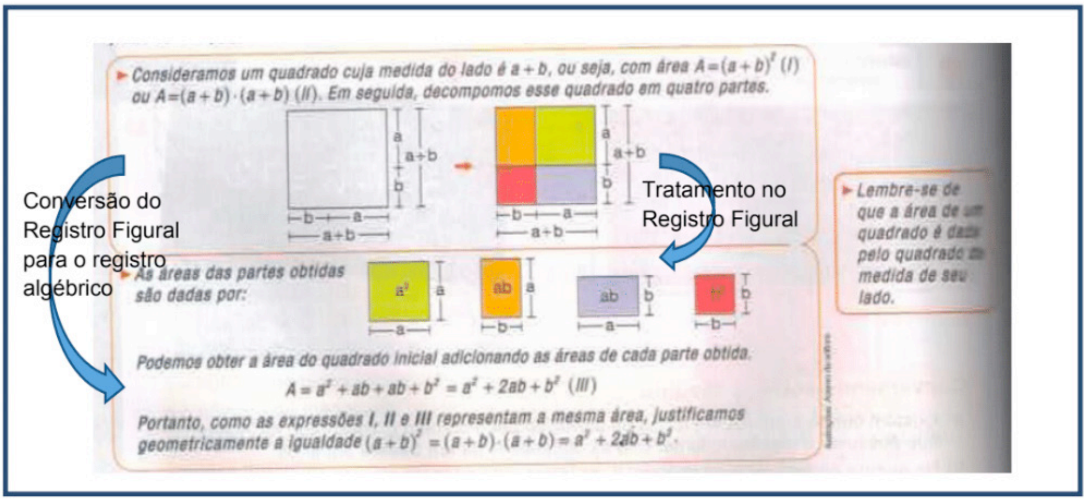


Figura 5: Representação de .

Fonte: Souza e Pataro (2009, p.120).

Na apresentação do tema por Souza e Pataro (2009), observamos a presença de tratamento (no registro figural) e de conversão (do registro figural para o registro algébrico). Na obra em análise, percebemos que ambos os registros (figural e algébrico) se distribuem uniformemente, inclusive nos exercícios.

Da mesma forma, os autores tratam o quadrado da diferença. Observe a Figura

6.

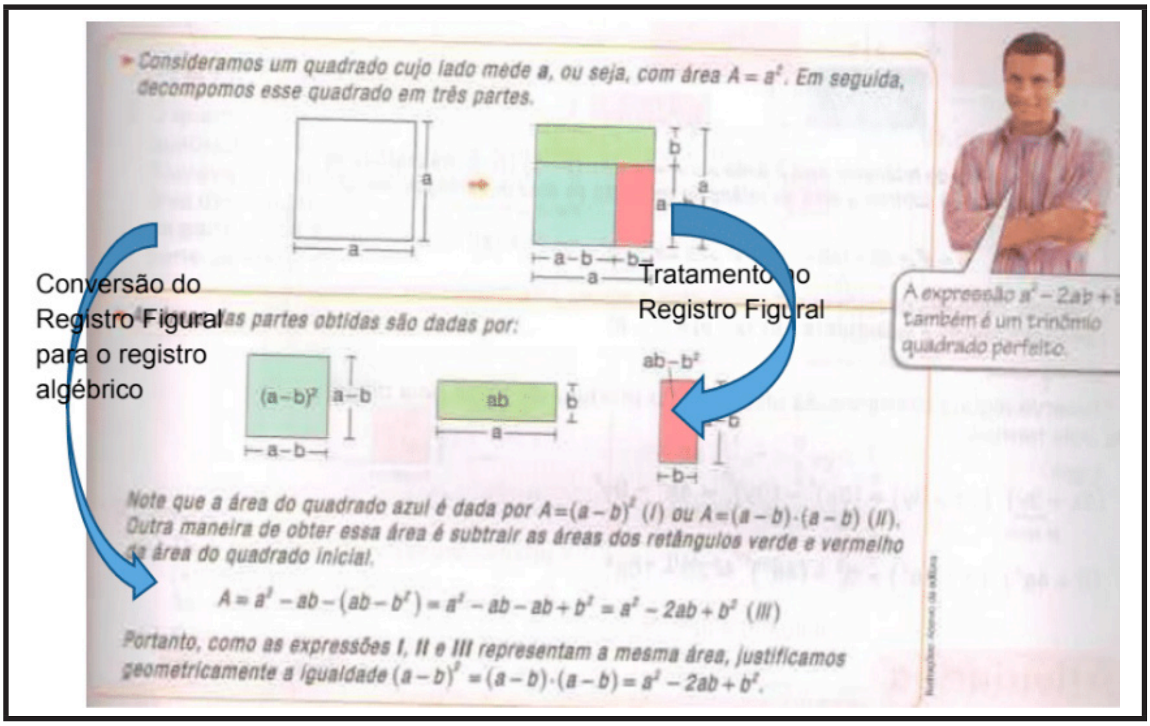


Figura 6: Representação de .

Fonte: Souza e Pataro (2009, p.121).

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio das pesquisas bibliográficas realizadas, pôde-se confirmar a importância do uso de diferentes tipos de representações semióticas no estudo sobre produtos notáveis. No livro de Euclides, escrito por volta do século III a.C., identificamos conversão entre as representações em língua natural e geométrica, o que consideramos essencial para obter compreensão completa das proposições e raciocinar a respeito das construções realizadas, pois dá sentido e complementaridade ao objeto de estudo. A língua natural nos faz pensar e abstrair os conceitos, enquanto a representação geométrica nos permite confrontar nossa imagem mental com o conceito real.

Analisamos também que a conversão e tratamento de registros existem hoje em dia, porém a forma com que essas atividades de transformação de representação nos livros didáticos se apresentam mudou, se adequando à linguagem mais simples e atual. Além disso, vale ressaltar que, assim como na Grécia antiga havia predomínio da forma de representação geométrica, a qual havia maior afinidade, atualmente a forma algébrica de representação torna-se predominante e mais utilizada.

Concluímos que incentivar o conhecimento de diversos registros de representação e a capacidade de conversão entre eles auxilia o aluno a compreender melhor o objeto de estudo e torna-se útil para a internalização do mesmo.

5 I AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Fundação Araucária e UTFPR pela concessão de bolsa de Iniciação Científica Ensino Médio (PIBIC-EM).

REFERÊNCIAS

DUVAL , R. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, S. D.A. (Org.). Aprendizagem em matemática*:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p.21, 2003.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, **A. Matemática e Realidade**. 8º ano. São Paulo: Atual, 2009.

SOUZA, J.; PATARO, P.M. **Vontade de saber Matemática**. 8º ano. São Paulo: FTD, Coleção Vontade de Saber, 2009.

CAPÍTULO 15

RESOLUÇÃO DE ATIVIDADE COM FUNÇÃO LOGARÍTMICA POR ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO: A ENUNCIAÇÃO E A AJUDA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM

Walter Aparecido Borges
Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
w53borges@gmail.com

Maria Helena Palma de Oliveira
Instituto Langage
mhelenapalma@gmail.com

RESUMO: Analisou-se o processo de resolução de um problema envolvendo conceito de logaritmo por estudantes do 1º ano do Ensino Médio de escola pública estadual de São Paulo. Após discussão, dois pequenos grupos assumiram a explicação no quadro. Deveriam calcular o tempo necessário para que uma planta, cuja altura inicial de 1 cm dobra a cada mês, atingisse a altura de 9 cm, informados de que poderia ser calculado por meio da função exponencial, $y=2^t$, sendo *t* o tempo em meses. Fundamentaram a análise os conceitos de Zona de Desenvolvimento Proximal e de níveis de ajuda de Vigotski e o conceito de enunciação: compreensão ativa, réplicas e tréplicas de Bakhtin. Os diversos níveis de ajuda entre os participantes permitiram o entendimento progressivo do conteúdo. A enunciação: falas, escrita, réplicas e tréplicas, aos poucos, construiu a compreensão ativa e evidenciou o modo subjetivo de entendimento possível pela mobilização de conhecimentos retrospectivos.

PALAVRAS-CHAVE: Função exponencial; função logarítmica; compreensão ativa; níveis de ajuda na ZDP.

1 I INTRODUÇÃO

Em nossa prática diária como professor de matemática do Ensino Médio, nos últimos anos, observamos as dificuldades apresentadas pelos alunos em interpretar e realizar operações aritméticas, operações com frações, expressões algébricas, equações de primeiro grau, entre outras. Partimos do pressuposto de que os processos de linguagem envolvidos na interação verbal professor-aluno e aluno-aluno trazem elementos essenciais para o entendimento dos progressos e das dificuldades na aprendizagem matemática (OLIVEIRA, BORGES, 2013). Para isso, buscamos apoio teórico em estudos que consideram a indissociável relação pensamento e linguagem, bem como a relevância dos processos interacionais que ocorrem nos contextos de aprendizagem: Vigotski (2000; 2010), para o estudo das relações entre pensamento e linguagem e Bakhtin (2006), para o estudo dos diálogos por meio da interação verbal, possibilitada pela enunciação com suas características principais, como tema, significação e réplica.

Outro pressuposto vem de Radford (2011)

que considera o saber matemático uma potencialidade atualizada pelas práticas culturais; o conhecimento como a atualização do saber e a aprendizagem como tomada de consciência dos modos como se atualiza o saber.

O apoio dos teóricos justifica-se pelo ponto comum, no entendimento da linguagem e sua relação com o meio social: “uma palavra extrai o seu sentido do contexto em que surge; quando o contexto muda o seu sentido muda também.” (VIGOTSKI, 2000, p. 144), “a palavra revela-se no momento de sua expressão, como o produto da interação viva das forças sociais” (BAKHTIN, 2006, p. 66).

Em relação à ZDP, Beatón (2005) destaca os níveis de ajuda na aprendizagem. Entre desenvolvimento real, representado pelo conhecimento retrospectivo e o desenvolvimento potencial, acontece a ajuda de outros mais experientes na tarefa. A ajuda recebida do outro leva o sujeito a ser mais independente e a alcançar um novo desenvolvimento real. Retomando os estudos de Vigotsky, Beatón (2005) aponta 4 níveis de ajuda dentro do processo de aprendizagem e relaciona o tipo de ajuda aos níveis de independência do aluno para aprender. Os níveis mostram que o aluno necessita da ajuda de nível 1 pode ser considerado mais independente e o aluno que necessita de ajuda em nível 4 é aquele menos independente.

No nível 1, o professor, ou o colega mais capaz, somente direciona o aluno para o objetivo da atividade, com isso mobiliza conhecimentos retrospectivos e elabora estratégias de resolução. No nível 2, a aprendizagem depende da apresentação de uma atividade semelhante àquela ou a outras já realizadas. Pela visualização, ou pela lembrança de procedimentos, o aluno mostra-se capaz de continuar a resolução de modo independente. No nível 3, a ação do agente mais capaz é ainda mais necessária. O aluno depende do professor, ou do mais capaz, para iniciar a resolução da tarefa, na sequência consegue continuar sozinho. No nível 4, é total a dependência do aluno em relação àquele que está ajudando, ele não tem como dar continuidade à resolução sem uma ajuda até o término da tarefa.

Bakhtin (2006) afirma que a verdadeira substância da língua não é constituída de um sistema abstrato de formas linguísticas, mas pelo fenômeno social da interação verbal, que se realiza na enunciação. Bakhtin (2006) diferencia língua e enunciado. Língua é a expressão de um significado dicionarizado, já o enunciado representa o sentido, o significado contextual. A fala transforma a palavra em ato, em enunciação.

> A cada palavra da enunciação que estamos em processo de compreender, fazemos corresponder uma série de palavras nossas, formando uma réplica. Quanto mais numerosas e substanciais forem, mais profunda e real é a nossa compreensão. [...] Assim, cada um dos elementos significativos isoláveis de uma enunciação e a enunciação toda são transferidos nas nossas mentes para outro contexto, ativo e responsivo. A compreensão é uma forma de diálogo; ela está para a enunciação assim como uma réplica está para a outra no diálogo (BAKHTIN, 2006, p. 137)

O conhecimento é construído na interação entre os sujeitos, enunciador e enunciatário, mediados pela interação verbal, uma relação dialógica em que as réplicas e tréplicas estabelecem o processo de compreensão ativa, em que os sujeitos analisam as palavras, confirmam, criticam e expressam-se por meio de réplica e tréplicas, ou seja, tomam uma posição em relação ao discurso do outro. Para Bakhtin (2010),

> O diálogo, no sentido estrito do termo, não constitui, é claro, senão uma das formas, é verdade que das mais importantes, da interação verbal. Mas pode compreender a palavra "diálogo" num sentido amplo, isto é, não apenas como comunicação em voz alta, de pessoas colocadas face a face, mas toda comunicação verbal de qualquer tipo que seja. (BAKHTIN, 2010, p.127).
>
> w

Uma concepção fundamental da teoria de Bakhtin (2010) é a de contexto extraverbal, pois para ele a palavra só adquire sentido na situação ou contexto em que ocorre. O contexto extraverbal é constituído pelo entorno sócio-histórico-cultural no qual se estabelecem as interações, no caso, entre os participantes da pesquisa. Bakhtin considera três aspectos como constitutivos: o horizonte espacial físico e a instância sociocultural onde se dá a comunicação; o repertório sociocultural partilhado pelos participantes da interação, que permite a compreensão do que está acontecendo e a avaliação da situação comunicativa que permite atribuir valor e construir pontos de vista sobre o conteúdo expresso na interação verbal.

DADOS DA PESQUISA

O estudo envolveu dois grupos de 4 estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Paulo. Analisou-se um episódio (de 8 minutos e 44 segundos), em que os estudantes buscavam resolver um problema usado na aplicação do conceito de logaritmo. A transcrição a seguir resultou de gravações de áudio e vídeo da atividade realizada. Os participantes foram identificados somente pelas iniciais do primeiro nome e o Pesquisador ficou identificado como P.

O diálogo marca a primeira tentativa de resolução do problema. O pesquisador explicou que a função logarítmica não tem crescimento constante. Os alunos deveriam calcular o tempo necessário para que uma planta, cuja altura inicial de 1 cm dobra a cada mês, atingisse a altura de 9 cm. Inicialmente, discutiram em grupo as formas de resolução, interpretaram a informação presente no texto da atividade de que o suposto crescimento da plantinha poderia ser calculado por meio de uma função exponencial, a função $y=2^t$, sendo t o tempo em meses. Usaram uma calculadora científica para a realização da atividade. LT vai para o quadro para dar início à resolução após ter discutido com o seu grupo. LT pega a caixinha com giz e se desloca para o quadro. P o anuncia, em meio a uma conversa dos participantes:

[1] P: *Ôoo, jovens! Espera aí! O LT, ele, a J, o grupo da K e o V também estão tentando chegar ao resultado do tempo que pra eles deu 3, 16 meses. LT responde:*

[2] LT: *Na verdade, pra mim deu um resultado, pra ela deu outro*, dirigindo-se a J.

[3] P: *É, mas ela conferiu o do 3,16, qual foi o seu resultado?*

[4] LT: *O meu deu 3...não! Deu 4,16 horas.*

[5] P*: Não! O t, o valor do t!* K e J respondem, em conjunto:

[6]: K e J: *3,16!* e P quer confirmar:

[7] P: *3,16 o que?* LT e o grupo murmuram algo inaudível, K lhe entrega uma folha com cálculos e diz:

[8] K: *Tem aqui, ó! A gente fez na base 10*. LT olha o papel com os cálculos como se estranhasse e comenta:

[9] LT: *Mas eu tinha esse resultado.* Repete: *Eu tinha esse resultado*. LT devolve o papel a K. P intervém, dirigindo-se a LT:

[10] P: *Mas o t equivale, de acordo com a J, 3,16, conferiu?* J e LT se olham e J lhe diz, batendo impacientemente com as costas das mãos na folha de papel:

[11] J: *Esse t aqui, ó!* E LT responde, com a voz alterada, como se não quisesse o aviso:

[12] LT: *Não, mas eu sei do que vocês estão falando.* (Nesse momento, um inspetor da escola pede licença e entra na sala para avisar a P sobre o horário do 1º ano B), P avisa a LT:

[13] P: *Então LT, a gente vai ter que ser um pouco breve, se não der tempo hoje a gente faz outro dia.* LT ouve e continua:

[14] LT: *Porque, pessoal, essa parte do dois, eu entendi o que vocês falaram, essa parte do dois, dois t elevado a... t elevado...* LT se confunde e CR ri alto, LT continua:

[15] LT: *Só que eu fiz de outra forma, o que é que eu fiz, eu fiz um cálculo meio que só soma e divisão, por exemplo, já que ele vai, é... dobra a cada mês, no três, no caso tem o oito*, LT traça uma vertical representando a planta e marca as unidades de comprimento, recitando 8, 9, 10, 11, CR acha engraçado e continua rindo alto, comentando sobre o ruído do giz na lousa

[16] CR: *Ai, esse barulho*. V pede a LT, gesticulando como quem quebra um giz ao meio:

[17] V: *Quebre o giz, pelo amor de Deus, LT*. A sala continua barulhenta e P chama LT três vezes sem que ele ouvisse, pretendendo que a sala silenciasse um pouco:

[18] P: *Você pode parar no onze ali*. LT concorda e apanha outro giz, para continuar a explicação, anotando na vertical que ele traçou.

[19] LT: *O que é que eu fiz, se no oito ele vale três meses, se ele subir de quatro em quatro dias* (ele se volta e encara o grupo de frente, com pose de professor), *aí logo ele vai, três meses e quatro dias, vai, quatro, oito, doze..., até o dezesseis que seria no caso, 4 meses, ele vai chegar aproximadamente em vinte e oito, seria três meses e vinte e oito dias.* LT fala e olha para P, como que perguntando se estava certo. P entende o olhar e diz:

[20] P: *Então, nós vimos ontem isso, nós discutimos, no dezesseis tem quatro meses com*

trinta dias, não tem vinte e oito dias, dirigindo-se a LT. Após a fala de P, o grupo silencia, como que preocupado, e LT escreve alguns cálculos na lousa, P observa:

[21] P: *Aí você tentou por aproximação*. LT diz:

[22] LT: *Eu fiz, ó! Quatro, oito, doze, dezesseis, vinte, vinte e quatro, vinte e oito, certo? Aqui seria vinte e oito dias, se dividisse vai dar quatro, o que sobraria pra chegar nos trinta, que no caso seria quatro meses, seria dois dias. O que eu fiz, eu peguei esses dois dias em horas, seria quarenta e oito horas. Dividindo quarenta e oito por oito, que é do oito até o dezesseis que no caso dá seis, quatro dias e seis horas, foi só essa conta que eu fiz,* disse LT olhando o grupo de frente, como está ilustrado na figura 27 a seguir. P diz:

Figura 1 - Cenário da resolução de LT.

Fonte: Borges (2013)

[23] P: *Então, mais uma vez, né! Está certa a sua explicação está satisfatória, mas a função é logarítmica, então tudo o que você fizer assim, contando de quatro mais quatro...* P interrompe devido a ruído externo.

[24] F: *Meu!* P continua;

[25] P: *É, não acontece assim, por que a função é curva! Se fosse uma função de primeiro grau (*função polinomial de primeiro grau*), por exemplo, para um quilo de açúcar você gasta dois reais, pra dois quilos, quatro, pra três você gasta seis, pra quatro você gasta oito, aí sim vale isso, é uma rampa. Essa curva não é uma rampa. A função exponencial né, não é a função logarítmica, a função exponencial, não é dois elevado a t?*

O grupo ouve, LT ouve e P muda o tom de voz:

[26] P: *Como que era o gráfico do dois elevado a t, que você fez na outra atividade?* LT olhava para P, em silêncio, e P repetiu a pergunta:

[27] P: *Você fez o gráfico de dois elevado a t, como que ele era?* LT fica em silencio e J impacienta-se e faz um gesto como se esboçasse o gráfico no ar, dirigindo-se a P:

[28] J: *É uma curva, assim*, (mostrando a exponencial com a mão, como em uma decolagem). P busca esclarecer:

[29] P: *Por que quando você fizer do dezesseis até o trinta e dois essa ideia ai vai pro espaço, não dá quatro horas e quando você fizer do trinta e dois para o sessenta e quatro também vai*

pro espaço. Então, você chegou numa aproximação, só que não é três meses, quatro dias e seis horas. Não é isso.

O grupo ainda ouvia em silêncio e P continuou:

[30] P: *Por que a curva, ela vai subindo, sempre tem uma reta que aproxima né, agora... nós temos a função exponencial aí.* LT ouvia em silêncio, olhou para P e P disse:

[31] P: *Tá, você tentou chegar por uma aproximação, fazendo por reta né.*

J levanta-se, preparando-se para explicar a sua resolução, enquanto P diz:

[32] P: *Vamos ver o da J como ficou...Se você lembrar como desenhou, LT a curva dois elevado a t, você vai ver que não dá, uma reta só, ela foge, a reta vai pra lá e a curva vai lá pra cima. A reta continua subindo, como se fosse uma rampa,* LT diz:

[33]: LT: *É como se fossem diferentes*, P confirma:

[34] P: *São diferentes.*

J escreve a expressão $2^t=9$ no quadro e o grupo fica em silencio. Quando ela termina, P diz:

[35] P: *Era esse o problema, né?* J explica:

[36] J: *Aí eu passei na base 10,* $2 \approx 10^{0,30103}$ e $3 \approx 10^{0,47712}$ (J continua escrevendo, mostrando o outro membro da equação que escrevera). *Aí eu passei o do lado de lá na base três, que três ao quadrado vai dar nove.* $3^2 \approx (10^{0,47712})^2$; $9 \approx 10^{0,95424}$.

J explicava e a sala permanecia em silêncio, P diz:

[37] P: *Você pôs base dez do lado esquerdo agora põe base dez do lado direito também.* J faz isso: $(10^{0,30103})^t \approx 10^{0,95424}$; $10^{0,30103t} \approx 10^{0,95424}$

[38] J: *Agora só soma os expoentes* $0,30103t \approx 0,95424$.

P interfere, minutos depois, dirigindo-se ao grupo que estava ainda em silêncio:

[39] P: *Deixa eu só perguntar para todo mundo que tá quietinho aí. A J somou os expoentes aí?* A própria J explicou:

[40] J: *Não, eu só passei ele pra baixo* e F diz:

[41] F: *Ela vai somar ainda.*

Retomando a resolução de J para a equação exponencial, ela fez:

$2^t=9$; fazendo $2 \approx 10^{0,30103}$ e $9 \approx 10^{0,95424}$, usando uma calculadora científica para determinar os logaritmos de 2 e de 9, reescrevendo a equação:

$(10^{0,30103})^t \approx 10^{0,95424}$;

$10^{0,30103t} \approx 10^{0,95424}$;

$0,30103t \approx 0,95424$;

$$t \approx \frac{0,95424}{0,30103} \approx 3,1699$$

Como vimos no quadro, J obteve o valor 3,1699 meses, um valor já calculado pelos alunos dos dois grupos presentes nesse episódio, um grupo formado por K, LT, J e V e outro formado por MM, CR, Fe, F e R. Em seguida, os alunos acompanharam a conversão feita por J de 3,1699 meses para dias. A figura 2 a seguir registrou o instante.

Figura 2 - Cenário da resolução de J

Fonte: Borges (2013)

O fragmento de [1] a [4] permite perceber uma confusão no entendimento de LT, embora fizesse parte do grupo que discutiu e resolveu atividades anteriores usando o conceito de logaritmo, ele pretendia resolver de outra maneira, por aproximação diretamente proporcional. Sua fala demonstra que não compreendera a resolução com logaritmos. Cabe ressaltar que LT estava envolvido na busca de resposta para a resolução do problema. O tema de cada enunciado envolvia todos os participantes, inclusive LT, que de alguma maneira, por meio da interação verbal, expressava o conceito de logaritmo em processo de formação. Mesmo contando com toda a ajuda gerada pelo diálogo com os colegas, LT parece não querer se mostrar dependente dos colegas que estão oferecendo ajuda, por isso, propõe um modo de resolução diferente, ou seja, por meio da proporção direta. Talvez, por não estar entendendo o processo, LT busca em conceitos retrospectivos um esquema que possa dar conta da atividade (VIGOTSKI, 2010). Karrer (1999) destaca que alunos de Ensino Médio acabam por linearizar a função exponencial.

Discorrendo sobre as dificuldades da aprendizagem de logaritmos, Kastberg (2002) relata que se frustrava quando ensinava a função logarítmica, mesmo quando considerava os alunos entendiam o conceito, pouco depois, constatava que já não se lembravam.

Menciona o estudo de caso com uma aluna de 18 anos, de um curso superior de 2 anos, na Geórgia, EUA, que buscava compreender o conceito de exponencial, escrevendo como era a sua compreensão usando a potência $2^?$, cometendo o erro $2^0 = 0$. Ainda de acordo com Kastberg (2002, p. 84), essa aluna construiu regras que faziam sentido para ela, mas não estavam corretas como “log 4 + log 5 = log 9”.

No fragmento de [5] a [12], LT se prepara para resolução. Nas falas [5] e [7], P queria chamar a atenção de LT que o tempo t era em meses, e não em horas; queria também verificar se os participantes do grupo (K, LT, V e J) haviam entendido os detalhes da resolução, encabeçada por J. Essa intenção de P parece ter sido compreendida pelo grupo ao qual LT pertencia, principalmente por K e J, que responderam prontamente o resultado em [6].

A rejeição aos apartes, réplicas dos colegas, de certa forma interrompem o diálogo, na medida em que a compreensão ativa não acontece. LT não se dispõe a analisar as respostas dos colegas e não apresenta tréplicas, com isso, toma posição em relação ao discurso do grupo. Esse comportamento de LT acaba impedindo a ação de ajuda (nível 3) em que pelo menos no início da resolução ele dependeria da ajuda do grupo para entender o crescimento exponencial, tomando a transformação dos números 2 e 9 em potências de base 10.

No fragmento de [13] a [21], LT dá continuidade às explicações e é possível perceber as relações de poder que se instauram em função do esperado domínio e da validação do conteúdo matemático por parte P. Esse tipo de relação aparece nos gestos e posturas em [19].

LT provavelmente acreditava ter encontrado outra solução, por aproximação, do tempo necessário para o crescimento da plantinha. Para LT, no intervalo de tempo entre 3º e o 4º meses, a planta crescera de 8 cm para 16 cm, um crescimento de 8 cm.

Possivelmente, LT estava considerando o crescimento constante entre o 3º e o 4º meses, por isso tentou calcular o tempo para a altura de 9 cm, recorrendo à ideia de proporção. Destaca-se que, no grupo em que LT era componente, J explicara que os crescimentos eram diferentes, pois o primeiro mês a plantinha cresceu de 1 cm para 2 cm, isto é, 1 cm; no segundo mês, cresceu de 2 cm para 4 cm, isto é, 2 cm, e chamou a atenção para o fato de que para tempos iguais, o crescimento era diferente. LT tentou um intervalo de 4 dias, provavelmente associando ao crescimento de 8 cm. Entretanto, a compreensão de LT parece não ter ocorrido, o que permite interpretar que seu diálogo interior ainda não possibilitava a interação com as explicações de J. LT de fato não se apropriara da significação do conteúdo.

Na sequência [22], há uma continuidade da resolução por LT: *Eu fiz, ó! Quatro, oito, doze, dezesseis, vinte, vinte e quatro, vinte e oito, certo? Aqui seriam vinte e oito dias, se dividisse vai dar quatro. O que sobraria pra chegar nos trinta, que no caso seria quatro meses, seria dois dias. O que eu fiz, eu peguei esses dois dias em horas, seria quarenta e oito horas. Dividindo quarenta e oito por oito, que é do oito até o dezesseis que no caso dá seis, quatro dias e seis horas, foi só essa conta que eu fiz*, disse LT. O objetivo de LT pode ter sido partir o intervalo de um mês (30 dias), entre o 3º e o 4º meses, em intervalos iguais associados ao crescimento de 8 cm da planta. Parece que não lhe ocorreu que para isso bastaria que ele dividisse 30 dias por 8 cm, o que resultaria 3,75 dias por cm, um crescimento não aplicável ao crescimento exponencial da planta. Sua conclusão (incorreta) de que para o crescimento de cada cm seriam necessários 4 dias e 6 horas deveu-se a ter como causa a sua contagem dos 8 pontos, associados ao crescimento de 8 cm, assinalados por ele em uma reta representando os trinta dias a partir do 3º mês e contados como intervalos: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28. Parece que, LT mobilizou esquemas inadequados para resolução, por isso não teve sucesso.

A fala de LT era dirigida aos dois grupos de alunos participantes, um dos quais ele era componente até poucos instantes antes de se dispor a resolver o problema "à sua maneira". Nesse caso, é preciso considerar o contexto extraverbal das falas de LT, pois a motivação para falar sem receios sobre uma resolução que, de certa forma, contrariava a proposta dos dois grupos, no caso o uso dos logaritmos, estava, aparentemente, apoiada no fato de pertencer a esses grupos e de apostar em réplicas que não o deixassem em posição desconfortável. A postura de LT expressa em suas diversas falas nesse episódio revela elementos de estrutura de poder, que organiza os meios de funcionamento de relações entre os participantes da atividade. LT, provavelmente, não quer admitir para o grupo que não consegue (sabe) resolver do modo como os colegas estão fazendo, e que P está, mas faz questão de mostrar que tem outros caminhos e que quer mostrar, "ensinar" aos colegas como se fosse professor. Essa interpretação pode ser validada nas linhas [12], [14], [15], [19] e [22] que também explicam a sua motivação para assumir a posição de quem explica na lousa. Vale lembrar que até aquele momento da pesquisa, os alunos não haviam realizado atividades com o logaritmo natural em aulas regulares de matemática. Karrer (1999, p.50-51) relata que analisou 6 livros didáticos em busca de situações problematizadas e os livros não exploravam o conceito de logaritmo como a área sob a curva da função $y = 1/x$, todos associavam o logaritmo a expoente.

No fragmento de [23] a [31], analisaremos as falas de P, que comenta e orienta a resolução de LT. Em [23] e [25], mostrando que o raciocínio de LT não se aplica porque a resolução envolve uma função exponencial e não uma função polinomial de 1º grau para isso aponta a diferença da rampa para a curva que expressaria cada tipo de função.

Na sequência, [26] a [31] P continua incentivando LT, ajudando-o a lembrar de outra atividade realizada anteriormente e que poderia ajudá-lo na resolução [26] Como que era o gráfico do dois elevado a t, que você fez na outra atividade? e [27] Você fez o gráfico de dois elevado a t, como que ele era?, no entanto LT não responde, porque supostamente esquecera a Atividade realizada anteriormente com o grupo, que trabalhou a forma da função 2t. J lembrou-se e por isso, adiantou-se e deu a explicação. Ao que parece, P queria reforçar a ideia do crescimento exponencial, em uma curva com crescimento crescente. Em [29], P buscou exemplificar que o crescimento no intervalo do quarto para o quinto mês não seria de 8 cm e sim de 16 cm. Para P a explicação por meio do conceito de reta tangente à curva em um ponto específico não cabia no momento [30] e nem é normalmente trabalhado no Ensino Médio.

P pretendia que LT se convencesse da necessidade do uso do logaritmo para o cálculo do tempo com uma aproximação suficientemente precisa. Ao que parece, porém, seria preciso retomar com LT a Atividade realizada anteriormente com o grupo, do comportamento da função y=2t representada pelo gráfico. Nesse momento, P busca avaliar os conhecimentos retrospectivos de LT e avalia a necessidade de intensificar a ajuda (nível 2) com a retomada de uma atividade já realizada por LT e seu grupo.

No segmento de [32] a [41], J explica a sua resolução e P faz as réplicas cabíveis. A pedido de P, J vai ao quadro dar explicação, estabelecendo o diálogo entre J, LT e P, de modo a ajudar a compreensão de LT. [32] P: *Vamos ver o da J como ficou... Se você lembrar como desenhou LT, a curva dois elevado a t, você vai ver que não dá, uma reta só, ela foge, a reta vai pra lá e a curva vai lá pra cima. A reta continua subindo, como se fosse uma rampa.* A seguir, a réplica de LT mostra que o processo de ajuda e intervenção de J e P permitiu a LT a compreensão ativa da resolução: LT: [33] É como se fossem diferentes, P confirma.

Os diálogos e as explicações, as dúvidas e os silêncios dos participantes evidenciam que apesar do grupo estar reunido, sem restrições a perguntas, participando cada passo, a resolução explicada por J no quadro não parecia ser da compreensão de todos. Sua explanação de como transformou os números 2 e 9 em potências de base 10, acompanhadas em silêncio pelos participantes significava nem que todos haviam compreendido, como F, em [41].

Para J e para MM (de grupos diferentes), estavam claros os processos de resolução da atividade (verificado pelas explicações e anotações feitas por elas), os demais participantes, aparentemente, não conseguiram acompanhar a resolução de forma completa. Esse aspecto permite destacar que as possibilidades que os processos de interação propiciados pelo diálogo beneficiam de modo diferente cada um dos participantes da atividade e que essa diferenciação decorre das possibilidades que os processos de aprendizagem na ZDP criam, particularmente, das possibilidades de mobilização de conceitos retrospectivos de cada sujeito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo permitiu avançar no entendimento da potencialidade criada pelos processos de interação, particularmente, pelo diálogo como elemento fundamental nos processos de desenvolvimento próprios da ZDP e que permitiram aos alunos e ao professor exporem o entendimento progressivo do conteúdo matemático. Por meio da enunciação, as falas, a escrita (no quadro e nas anotações), as réplicas e tréplicas, aos poucos foram construindo a compreensão ativa dos participantes, mesmo que de modo subjetivo.

Destaca-se que apesar de os participantes apresentarem características históricas e sociais que os aproximam muito como classe social (mesmo bairro), grau de escolaridade, faixa etária, de pertencerem à mesma escola, mesma sala de aula e terem o mesmo professor de matemática, existem outros elementos que marcam as diferenças e que resguardam cada um como ser único, embora constituído no mesmo contexto histórico e cultural.

A análise dos diálogos do episódio evidenciou alguns elementos presentes nos processos de enunciação que sustentaram a interação e que foram decorrentes de elementos do contexto extraverbal que envolveu os participantes na atividade. Destaca-se a não aceitação da explicação de colegas como possível saída para não expor que não sabe, ou para manter a posição de quem ensina e acredita que os esquemas de conhecimento que mobiliza são os adequados ou ainda porque as réplicas dos colegas e do professor não estabeleceram a compreensão ativa e não mobilizaram os conhecimentos retrospectivos à resolução adequada.

REFERÊNCIAS

BAKHTIN, M. *Marxismo e filosofia da linguagem*. 12. ed. Trad. Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira, São Paulo: Hucitec, 2006.

BEATÓN, G.A. *La persona en el enfoque histórico cultural*. São Paulo: Linear B, 2005.

BORGES, W.A. *Processos de linguagem na aprendizagem matemática de um grupo de alunos do 1º ano do ensino médio*. 2013. 247f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

KARRER, M. *Logarítmos: proposta de uma sequência de ensino utilizando calculadora*. 1999. 238f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

KASTBERG, *Signe. Understanding mathematical concepts: the case of the logarithmic function.* 2002. 216f. Thesis (Doctor of Philosophy). University of Georgia, Athens, Georgia, 2002.

OLIVEIRA, M.H.P., BORGES, W.A. (2013) Contribuições de Vigotski, Bakhtin e Wittgenstein para o entendimento dos processos de linguagem na aprendizagem de potências com expoente negativo. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 6, p. 119-134, 2013. ISSN 1982-7652.

RADFORD, L. *Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

VIGOTSKI, L.S. *Pensamento* e linguagem. Trad. Jefferson Luiz de Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VIGOTSKI, L.S. *Psicologia pedagógica*. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

CAPÍTULO 16

RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA PARA INTRODUZIR IDEIA DE FUNÇÃO NA EJA: DO RASCUNHO AO CONVENCIMENTO

Ana Paula Gonçalves Pita
Doutoranda da Universidade Estadual Paulista – Educação Matemática
São Vicente – São Paulo

RESUMO: Esse artigo tem como objetivo analisar o ensino e a aprendizagem por meio da resolução de situações-problema para a introdução do conceito de função na Educação de Jovens e Adultos – 9º ano de escolaridade, ensino fundamental. Para tanto, propomos um instrumento que chamamos de ficha de trabalho que foi elaborada a partir da proposta de Mason, Burton e Stacey com as fases de entrada, ataque e revisão. Portanto, a partir de situações-problemas criadas com temas pertencentes às realidades dos alunos, criamos um ambiente de troca de experiências a fim de que fossem capazes de estabelecer concepções algébricas chegando a conceitos formais sobre função e, assim, aplicarem esses conhecimentos na algoritimização de problemas escolares e de suas vidas.
PALAVRAS-CHAVE: Resolução de problemas; Função; Educação de Jovens e Adultos.

ABSTRACT: This article aims to analyze teaching and learning through the resolution of problem situations for the introduction of the concept of function in the Education of Young and Adults - 9th year of schooling, elementary school. To do so, we propose an instrument that we call a worksheet that was elaborated from the proposal of Mason, Burton and Stacey with the phases of entry, attack and revision. Therefore, from situations-problems created with themes belonging to the realities of the students, we create an environment of exchange of experiences in order that they were able to establish algebraic conceptions arriving at formal concepts about function and, thus, to apply that knowledge in the algorithmization of school problems and their lives.
KEYWORDS: Problem solving; Function; Youth and Adult Education.

1 I INTRODUÇÃO

Em nossa experiência docente, principalmente com jovens e adultos das séries finais do Ensino Fundamental, pudemos verificar que alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) apresentam grandes dificuldades ao estudar conteúdos matemáticos que são abordados sem referência a aplicações da vida cotidiana deles. Além disso, presenciamos dificuldades de interpretação de enunciados e de transposição da linguagem escrita para a linguagem matemática, o que, a nosso ver, compromete a utilização de uma metodologia de resolução de problemas.

Pesquisas como as de Ferreira (2011) e Fonseca (2012) relatam que o uso da resolução de problemas pode ser um fator motivador para esse público, pois os processos de ensino e de aprendizagem tornam-se mais dinâmicos e com momentos mais indutivos e experimentais, levando os alunos a conjecturas importantes para a construção de conceitos matemáticos, no nosso caso, da ideia de função.

Nossa escolha pelo tema funções se dá pela aplicabilidade desse conceito, que pode ser usado não somente em diversas situações cotidianas, mas também em outras áreas de conhecimento. Além disso, é um conteúdo que perpassa vários anos da escola básica e do ensino superior, e que é fonte de dificuldades de aprendizagem (por exemplo, LEÃO; BISOGNIN, 2009 e LEAL, 1990). Acreditamos, que a resolução de situações-problema com a ficha de trabalho elaborada por Mason, Burton e Stacey (1982) pode colaborar com o desenvolvimento de habilidades na construção da ideia de função por meio da transposição da linguagem escrita para a linguagem matemática.

Diante disso, nosso trabalho de pesquisa, que ainda está sendo desenvolvido, tem como objetivo principal analisar se as conjecturas que emergem do pensamento narrativo (ou nas narrativas) podem conduzir ao pensamento paradigmático por parte de alunos de séries finais do Ensino Fundamental na modalidade EJA. Entretanto, para o presente artigo nosso objetivo é apresentar os resultados parciais da análise de dados e levantamos a seguinte questão: “Na EJA, a resolução de situações-problema com a ficha de trabalho trazendo as fases de entrada, de ataque e de revisão pode estimular o pensamento algébrico e orientar a construção da ideia de função?”.

A pesquisa em questão está sendo desenvolvida em uma escola pública do município de São Vicente, litoral do estado de São Paulo, inserida numa comunidade carente, com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental na modalidade EJA. Os sujeitos participantes da pesquisa foram convidados a fazer parte deste trabalho no qual trouxeram temas pertinentes às suas vidas para a formulação de situações-problemas e resolveram com a ficha de trabalho com as seguintes etapas: *Rascunho, Resolução, Revisão e Convencimento.* Estas etapas da ficha foram elaboradas a partir das ideias sobre resolução de problemas de Mason, Burton e Stacey (1982) e adaptada de Cybis (2014).

2 I A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS POR MEIO DE TRÊS FASES

De acordo com Mason, Burton e Stacey (1982), o raciocínio matemático por meio da resolução de problemas estabelece uma compreensão mais profunda de conteúdos, é o resgate e a mobilização de conhecimentos para se chegar à resolução de um problema com sucesso.

Esses autores apresentam um método de como “atacar” problemas e aprender a partir de experiências, tentando resolvê-los. Para os autores, o que é primordial são os processos em detrimento de soluções padronizadas. Na metodologia apresentada por eles, são estabelecidas três fases: *Entrada*; *Ataque*; e *Revisão*. A passagem de uma fase para a outra corresponde a uma mudança de sentimentos sobre a questão que se resolve, e de reflexões do processo de resolução do problema.

A *Entrada* começa quando nos deparamos com uma questão. Geralmente, uma opção adequada seria sintetizar os detalhes do problema, isto é, uma sugere-se ler, reler e escrever os principais dados da questão e a ideia central. A estrutura de trabalho na fase de *Entrada* está baseada em três questões: “1) o que eu sei? 2) o que eu quero? e 3) o que eu posso introduzir?” (MASON; BURTON; STACEY, 1982, p.29, tradução nossa). Segundo Mason, Burton e Stacey (1982) é importante a incorporação das três questões em rascunhos feitos para resolver o problema, porém a sequência na qual elas são respondidas não é importante porque elas estão extremamente ligadas.

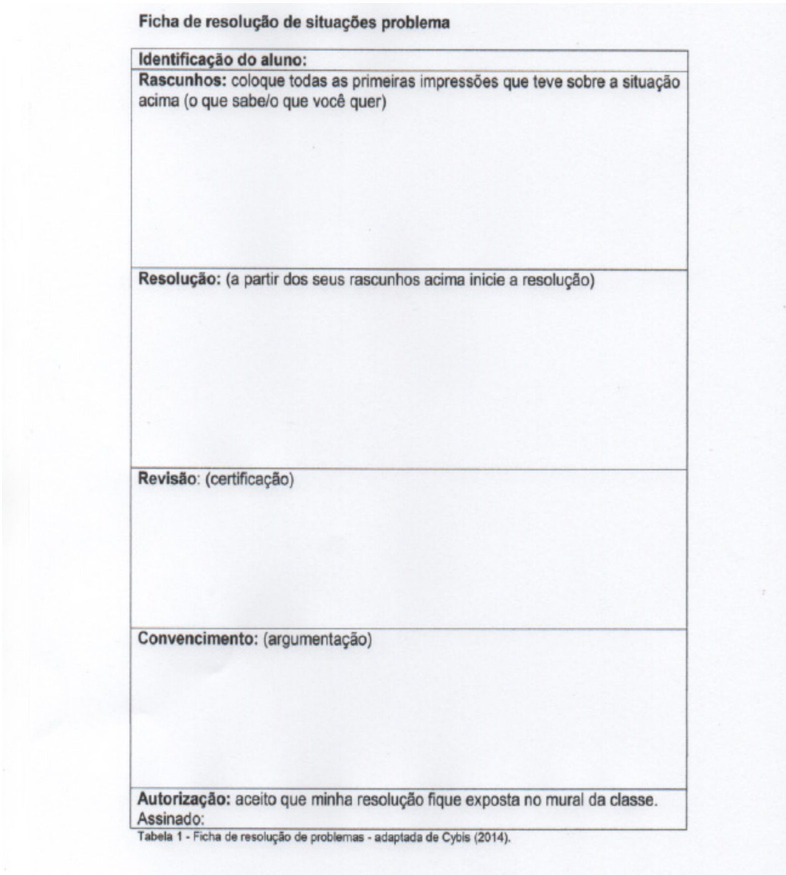
A fase de *Ataque* é aquela em que nos apossamos do problema, e iniciamos o raciocínio para resolvê-lo. Esta fase é completada quando o problema é abandonado ou resolvido. Durante o *Ataque*, diversos caminhos podem ser tomados e diferentes planos podem ser formulados e experimentados.

Na fase da *Revisão*, checa-se o que aconteceu de forma a aprimorar e ampliar as habilidades mentais para resolver a situação problema, e para tentar ajustar a resolução num contexto mais geral. No entanto, isso envolve duas coisas: reler, deste modo devemos fazer uma checagem no que já foi feito; e refletir sobre os principais fatos, e assim aprofundar o processo e os resultados para um contexto mais amplo, e prosseguir.

Para Mason, Burton e Stacey (1982) essas três fases dão subsídios para a discussão da solução de um problema e o sucesso com as questões.

Cybis (2014) elaborou uma ficha de trabalho para a resolução de problemas multiplicativos por alunos de 5º ano do Ensino Fundamental, de forma a possibilitar a passagem por estas fases. Em nossa pesquisa, adaptamos esta ficha, para incentivar os alunos da EJA a escrever ideias iniciais, atacar o problema e revisar a resolução de problemas sobre função (Figura 1). A ficha da autora está dividida em cinco partes, de acordo com as ideias de Mason, Burton e Stacey (1982), são elas: o Problema, a Rubrica, a Estratégia, a Resposta e o Convencimento. Em nossa ficha, não utilizamos a parte do Problema, pois optamos por entregá-lo aos alunos numa folha a parte. Adaptamos a parte de *Rubrica*, espaço destinado às primeiras anotações, chamando-a de *Rascunhos*, por acreditarmos tratar-se de uma palavra mais usual e de fácil entendimento pelos participantes de nossa pesquisa. A Estratégia, destinada aos registros das representações e esquemas, foi substituída simplesmente pela etapa da *Resolução*, porém tendo o mesmo propósito. A *Resposta*, inicialmente criada para que os alunos tragam uma resposta condizente com o problema, foi substituída pela etapa da *Revisão*, com a pretensão de que os alunos participantes mobilizassem seus saberes e experiências adquiridos nas discussões com os colegas durante a resolução ou, até mesmo, com fatos de seu dia a dia, e voltem aos *Rascunhos* para averiguar se os conceitos matemáticos utilizados foram adequados àquele tipo de situação-problema, e se os procedimentos foram favoráveis para a resolução. Finalmente, o *Convencimento*, comum às duas pesquisas, é etapa de grande importância, pois entendemos que é neste momento que os alunos podem justificar as resoluções feitas e descrever argumentos que convençam a si próprio e aos colegas de que a resolução é válida e resultou em uma solução correta. A ficha traz uma breve explicação de cada uma das partes, para conduzir os alunos pelo documento.

Durante o desenvolvimento destas fases, esperamos que os alunos estimulem seus pensamentos algébricos e construam a ideia de função. Por pensamento algébrico, entendemos a capacidade de lidar com o cálculo algébrico, com as estruturas matemáticas e saber aplicar tais conhecimentos na interpretação e na resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (VELOSO, 2012).



Ficha de resolução de situações problema

Identificação do aluno:

Rascunhos: coloque todas as primeiras impressões que teve sobre a situação acima (o que sabe/o que você quer)

Resolução: (a partir dos seus rascunhos acima inicie a resolução)

Revisão: (certificação)

Convencimento: (argumentação)

Autorização: aceito que minha resolução fique exposta no mural da classe.
Assinado:

Tabela 1 - Ficha de resolução de problemas - adaptada de Cybis (2014).

Figura 1 - Ficha de trabalho para a resolução de uma situação-problema.

3 I PROCEDIMENTOS PARA A COLETA DE DADOS

Para a coleta de dados de nossa pesquisa, elaboramos situações-problema envolvendo o conceito de função e situações cotidianas. Estes problemas foram resolvidos por meio da Ficha que elaboramos, para que seja possível seguir as etapas de resolução de problemas de Mason, Burton e Stacey (1982). Esta ficha contém quatro passos: *Rascunhos*, *Generalização*, *Conjecturas* e *Convencimento*, para que o aluno possa refletir sobre o problema e passar pelas fases de Entrada, Ataque e Revisão.

Com a análise dos dados coletados, intencionamos verificar se “Na EJA, a resolução de situações-problema com a ficha de trabalho trazendo as fases de entrada, de ataque e de revisão pode estimular o pensamento algébrico e orientar a construção da ideia de função?”

Tivemos quatro encontros com os participantes da pesquisa. No primeiro encontro, foi aplicado um mapa conceitual com os alunos, a partir das cinco fases explicitadas em (Lima, 2007) – tempestade de ideias, categorização, denominação, organograma e elaboração de texto, finalizamos o primeiro encontro pedindo que para o próximo trouxessem um tema para ser discutido.

No segundo encontro, cada aluno fez uma breve exposição dos temas de interesse, e o porquê da escolha de tal assunto. Em seguida, houve a eleição de quais temas seriam pertinentes a todos. Chegaram ao consenso que os temas seriam: “Contas de consumo, as faixas da conta de água”, “O que é ser Gari?” e “O Lixo”. Congregamos os dois temas “O que é ser Gari?” e “O Lixo” que passamos a tratar por “Reciclagem”, pelo motivo de que por meio do debate os sujeitos elegeram ser mais pertinente o tema reciclagem para todos, justificando-se pelo transtorno que os moradores da cidade estão passando com falta de coleta de lixo periódica e a ausência de uma área de transbordo. O outro tema gerador de um intenso debate foi a conta de água, que, segundo colocado pelo participante que trouxe a sugestão e usando as palavras dele, *“As faixas de consumo de água é um bolo que não se sabe a receita, não entendemos nada”*. Por este motivo, ficou decidido que concentraríamos o assunto nas contas de água e suas faixas de consumo, passando a denominar este tema por “Conta de água”.

As situações-problema sobre Reciclagem e as Contas de água foram elaboradas pela pesquisadora. Ao elaborarmos as situações-problema levamos em consideração quais raciocínios poderiam surgir, como resolveriam as situações de forma que alcançassem os objetivos, quais os relacionamentos matemáticos fariam e quais os conhecimentos prévios seriam ativados (Figura 2). Para este artigo mencionaremos as resoluções da situação sobre o consumo de água.

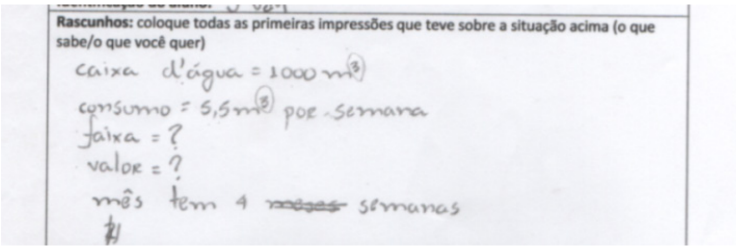
> Nas contas de água, é cobrado o fornecimento de água e de esgoto, com o valor consumido de água sendo cobrado em dobro. Vamos observar nossas contas de água. Após a observação, em grupo, respondam as seguintes perguntas:
>
> a) Qual o valor, em m^3, cobrado em sua conta?
> b) Existem diferentes faixas de tarifação?
> c) Está sendo cobrada somente a água?
> d) Como se calcula o valor a pagar?
> e) O valor cobrado está dependendo do que?
> f) O que está variando?
>
> Diante das informações colhidas por meio das questões acima, analise e responda a situação-problema abaixo utilizando a ficha de resolução de problemas:
>
> Uma casa tem uma caixa de água de 1.000 m^3. Nessa residência, são consumidos 5,5 m^3 de água por semana. Mantendo esse consumo diário, quanto será gasto em um mês? Em que faixa e como ficará definido o valor a pagar? (considere o mês de quatro semanas)

Figura 2 - Situação-problema sobre a conta de consumo da água.

Dessa maneira, as questões foram propostas com os objetivos de conduzir, por meio de um tema pertinente às suas vidas, o entendimento de que há uma relação de dependência entre os valores, por exemplo, na questão sobre a conta de água, valores a pagar x consumo. E, ainda, que os indivíduos compreendessem, intuitivamente, que uma função transforma um número em outro a partir de uma relação de dependência entre as variáveis. Que haja um analise de que há um conjunto de partida e um conjunto de chegada e que cada conjunto corresponde a um único elemento. E por último que interpretem o comportamento de uma função, por meio de uma linguagem comum e que relacione de alguma forma um momento de suas vidas os de sua comunidade.

4 I ANÁLISE DAS FICHAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Vamos analisar as contribuições da ficha de trabalho para a resolução da situação-problema verificando cada passo. Para tanto iniciaremos com o *Rascunho*. Nesta etapa da resolução pedimos para que os sujeitos lessem individualmente, depois com o grupo, discutissem e anotassem suas primeiras impressões da situação no campo *Rascunho*.


Rascunhos: coloque todas as primeiras impressões que teve sobre a situação acima (o que sabe/o que você quer)

caixa d'água = 1000 m³

consumo = 5,5m³ por semana

faixa = ?

valor = ?

mês tem 4 ~~meses~~ semanas

Figura 3 - Rascunho de um grupo de alunos.

Entendemos que é nesse momento que o indivíduo passa a fazer suas principais anotações das informações pertinentes para o início das suas conjecturas para a resolução. Assim sendo, esta etapa é importante para o aluno livrar-se da "brancura do papel", como também sugerido por Mason, Burton e Stacey (1982) o que dá uma sensação de início da resolução, e passando a "entrar na história" da situação-problema, e até mesmo fazer ligações com coisas ou fatos de seus cotidianos. Como para os autores a fase de *Entrada* prepara o aluno para um *Ataque* efetivo, e é essencial que os indivíduos gastem tempo nela. Desta forma, deixamos os alunos a vontade para discutir, tirar suas conclusões e fazer suas anotações (Figura 4).

Carlos – Temos aqui um campo dizendo Rascunhos! (Leram as instruções)

Joana – Então aqui temos que colocar os primeiros dados do problema?

André – Sim. Aqui está escrito para colocar: "o que sabe" e "o que quer", então no caso o que ele está dando para a gente ai?

Joana – O limite da caixa d'água, que é o consumo de 1000 m³.

André – Não! Não é consumo é só o limite. O consumo é de 5,5 m³ por semana. E também fala que o mês tem quatro semanas. Não sabemos a faixa do consumo.

Carlos – Como vamos saber? Porque depende desta faixa de consumo! Também não sabemos o valor.

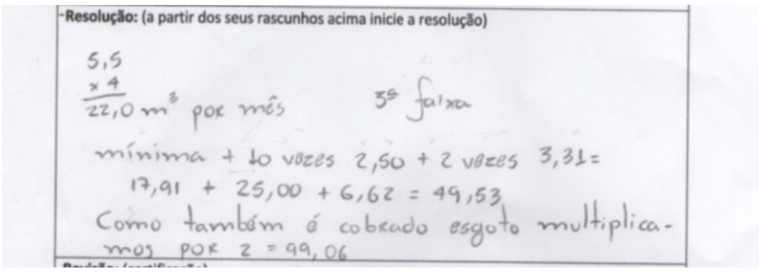
Joana – Mas... tem como saber.

André – Como? Nas contas de água já temos os valores e as faixas. Já vem pronto!

Joana – Mas de alguma forma é feito uma conta matemática. Entendo que depende do m³ consumido.

Figura 4 - Conversa sobre o campo Rascunho de um grupo.

Após o passo *Rascunho*, verificamos que os alunos absorveram a questão e tornaram-se parte dela. Passando para o segundo passo: a *Resolução*.


Resolução: (a partir dos seus rascunhos acima inicie a resolução)

5,5
x 4
22,0 m³ por mês   3ª faixa

mínima + 10 vezes 2,50 + 2 vezes 3,31 =
17,91 + 25,00 + 6,62 = 49,53
Como também é cobrado esgoto multiplicamos por 2 = 99,06

Figura 5 - Resolução de uma situação-problema.

O início da *Resolução* é o levantamento de conjecturas. O aluno começa a pensar e levantar suposições de como resolver um problema, e, a partir disso, criar argumentos válidos para que se justifique a resolução. De acordo com Mason, Burton e Stacey (1982) é nesse momento que os sujeitos criam argumentos válidos para que se justifique a resolução, sendo que as conjecturas são essenciais para o pensamento matemático.

Joana — Bom vamos para esta linha abaixo: a Resolução. No caso como ficaria?

André — Seria uma conta, pra começar, de multiplicação, né! Você entendeu? No caso 4 semanas vezes 5,5. Vamos fazer isso ai, né?

Joana — Deu 22,0 m³ por mês. E agora?

Carlos — Vamos, de acordo, com as faixas da conta de água. Olha aqui, na conta de água isso seria cobrado na terceira faixa. Não, não!!! É por faixas.

Joana — Sim, teríamos que calcular o mínimo, primeira faixa. E depois os outros.

Carlos — Já sei, até 10m³, é o mínimo. Depois, mais 10m³, na segunda faixa e por último 2m³ na terceira faixa.

André — Então o valor consumido ficou dividido em três faixas. Você percebeu que o que pagamos depende destes valores por faixas?

Carlos — Lembra, da dinâmica? Isso deve ser uma lei de formação!!! (Risos) Então vamos para frente, seguindo...Olha isso, na minha conta o consumo é de 19m³. Fiquei na segunda faixa.

André — Engraçado, esses valores estão uns dependendo dos outros. Porque pensando no quando estamos na terceira faixa os valores vão somando com os de cima. Então as faixas estão separadas, mas estão juntas! Estou surpresa! (Risos)

Joana — Pelo que entendi, esses valores dependem do consumo, porém também dependem das faixas acima. Assim, até 10m³ multiplicamos pelo primeiro valor. Depois, de 11 até 20, pelo segundo valor...

André — Mas não desprezamos os valores, temos que ir somando...você percebeu que as faixas estão separadas, mas estão juntas no final?

Joana — É verdade! Vamos voltar ao problema. Já fizemos os Rascunhos. A partir dos Racunhos montamos as contas. Achamos aqui o valor. Bom, somamos: R$ 17, 91 (o mínimo), mais R$ 2,50 vezes 10, vai dar 25 reais.

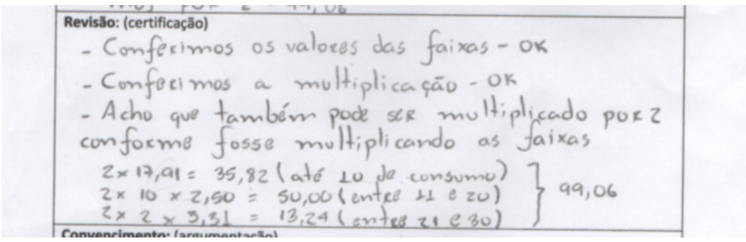
Carlos — Falta mais 2m³ vezes a terceira faixa. Mais 6,62.

Joana — Dá um total de 49 reais e 53 centavos. Como também é cobrado esgoto, esse valor dobra. Isso é convincente? (Risos). Porque as pessoas podem não estarem convencidas disso.

Figura 6 - Discussão sobre o campo Resolução.

Observamos que as conjecturas emergiram a partir do momento em que os indivíduos começaram a pensar e levantar suposições de como resolver um problema, criando argumentos válidos para que se justificassem a resolução. Considerando as respostas da Figura 5 e da Figura 6, houve uma observação de que a água é cobrada por faixas. É uma primeira apreensão de uma função definida por várias sentenças, mesmo que intuitivamente. As conjecturas são essenciais para o pensamento matemático e estabelecem experiências em se levantar suposições e convencimentos.

Na próxima etapa da ficha os educandos passaram a fazer suas revisões para a verificação de algo errado ou mesmo a ampliação de suas respostas.


Revisão: (certificação)
- Conferimos os valores das faixas - OK
- Conferimos a multiplicação - OK
- Acho que também pode ser multiplicado por 2 conforme fosse multiplicando as faixas

2x 17,91 = 35,82 (até 10 de consumo)
2x 10 x 2,50 = 50,00 (entre 11 e 20)
2x 2 x 3,31 = 13,24 (entre 21 e 30)
} 99,06

Figura 7 - Revisão da situação-problema.

De acordo com Mason, Burton e Stacey (1982), quando os sujeitos alcançam uma resolução satisfatória, é essencial rever o trabalho. Analisando a solução dada ao problema, de forma a aprimorar e ampliar as habilidades mentais para resolvê-lo, e para tentar ajustar a resolução. Para os autores, é neste momento que os alunos envoltos de um sentimento de liberdade, valorizam as pequenas coisas como: tentativas e erros, dúvidas e porquês.

Joana – Vocês viram que tem uma revisão? Vamos então para a revisão...(pausa) Tá, pegamos os valores dados no problema, multiplicamos de acordo com as taxas da nossa conta...(pausa)...percebemos que o valor a pagar depende do quanto consumimos...a conta está correta? Vamos fazer outra vez?

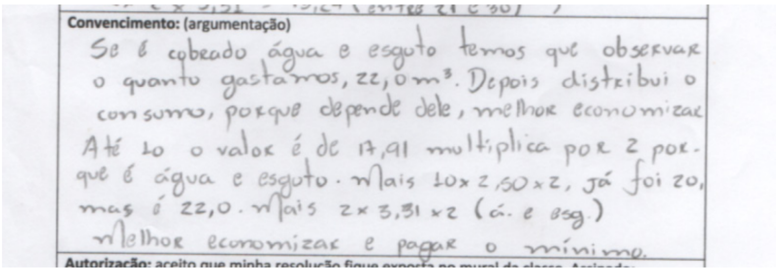
Carlos – Que engraçado! (Risos) Essa revisão! Agora tudo ok! Acho que tenho que sempre fazer revisão nas atividades que faço, porque sempre esqueço alguma coisa, fico afobada para terminar rápido.

André – Sim. É para ver se não esquecemos alguma conta ou de algum dado importante. Então vamos lá!

Carlos – Então, agora, temos que ter um bom argumento para convencê-las do que pensamos está correto.

Figura 8 - Conversa sobre o campo *Revisão*.

Constatamos na análise desta etapa de *Revisão*, que os alunos conferiram suas operações e seus dados e ampliaram suas respostas. Para a última etapa da ficha, *Convencimento*, os alunos se colocaram da seguinte forma:



Convencimento: (argumentação)
Se é cobrado água e esgoto temos que observar o quanto gastamos, 22,0 m³. Depois distribui o consumo, porque depende dele, melhor economizar
Até 10 o valor é de 17,91 multiplica por 2 porque é água e esgoto. Mais 10x 2,50 x 2, já foi 20, mas é 22,0. Mais 2x 3,31 x 2 (á. e esg.)
Melhor economizar e pagar o mínimo.

Figura 9 - Etapa Convencimento.

Neste passo os sujeitos deveriam argumentar para convencer os amigos e externalizar o que parece óbvio, fornecendo razões convincentes de porque o que dizem é verdadeiro. Sempre tendo as três atividades em mente, checar, refletir e aprofundar, como proposto por Mason, Burton e Stacey (1982).

Ao terminar o passo *Convencimento* os alunos exporam suas ideias para os outros grupos e justificaram suas respostas.

“*O que achamos mais importante desta atividade foi repensar as questões de economia*”
“Sim, além de aprendemos Matemática de forma útil”
“*Percebemos na situação, que os valores a pagar das contas de água se dão de acordo com as faixas de consumo, então encontramos os valores a pagar por partes, dependendo do consumo de metros cúbicos, e por último multiplicamos por dois por se tratar do pagamento do esgoto*”.

Figura 10 - Explicação do grupo para outros alunos.

Na Figura 10 ressaltamos que os alunos observaram sobre as faixas de consumo de água e a dependência do valor a pagar e tais faixas de consumo.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da resolução apresentada concluímos que os alunos entenderam a ideia da atividade proposta e identificaram que, intuitivamente, há relações de dependência entre grandezas.

As grandezas, valores a pagar e consumo, foram compreendidas de forma que houve a associação destes elementos mesmo sem a definição de uma fórmula. Os procedimentos utilizados pelos sujeitos participantes da pesquisa para a resolução da situação-problema mostrou que houve uma visão de como estes podem fazer uma inter-relação entre as grandezas.

O processo de aprendizagem progrediu conforme os sujeitos participantes da pesquisa foram passando pelas etapas da ficha de trabalho e atingiram outro nível de abstração. Isto é, houve um progresso nas conjecturas, desde o *Rascunho* até o *Convencimento* que se edificou com um argumento matemático.

REFERÊNCIAS

BRUNER, J. **Realidade Mental, Mundos Possíveis**. Porto Alegre: Artmed, 1986.

______. A Cultura da Educação. Porto Alegre: Editora Artmed, 2001.

CYBIS, A. C. **Resolução de Problemas Multiplicativos:** análise de processos heurísticos de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Universidade Anhanguera, 2014.

EVANS J., WEDEGE T., YASUKAWA, K. Perspectives on Adults’ Mathematics Education, In: CLEMENTS, M.A., BISHOP, A.J., KEITEL C., KILPATRICK, J., LEUNG, F.K.S. (Org); **Third International Handbook of Mathematics Education Critical.** Editora Springer: EUA, 2013

FERREIRA, R. B. **O ensino de funções através da resolução de problemas na educação de jovens e adultos.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2011.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação Matemática de jovens e adultos:** especificidades, desafios e contribuições. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2012.

LEAL, L. C. Funções no terceiro ciclo do ensino básico – uma possível abordagem. **Educação Matemática**, 1990. 5-15.

LEÃO, A. S. G.; BISOGNIN, V. Construção do conceito de função no ensino fundamental por meio da metodologia de resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista**, 1, n. 10, 2009.

LIMA, R. N. **Equações algébricas no ensino médio:** uma jornada por diferentes mundos da Matemática. Tese de doutorado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically**. London: Addison-Wesley, 1982.

OLIVEIRA, M.K. **Jovens e Adultos como sujeitos de aprendizagem**. Revista Brasileira de Educação: ANPED – Associaçao Nacional de Pesquisa e Pós-graduação em Educação, n. 12, 1999, p. 59-73.

SINCLAIR, N.; HEALY, L.; SALES, C. O. R. **Time for telling stories:** narrative thinking with dynamic geometri. ZDM Mathematics Education, Berlim, 41, 2009. 441-452.

VELOSO, D. S. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental:** análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto. 2012.

CAPÍTULO 17

UMA ANÁLISE SEMIÓTICA DE FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

Jessica da Silva Miranda
Universidade Estadual de Campinas
Campinas – São Paulo

Felipe Antonio Moura Miranda
Instituto Federal de São Paulo
Salto – São Paulo

Maurício de Moraes Fontes
SEDUC
Belém – Pará

RESUMO: O Ensino de função do primeiro grau é parte integrante do saber Matemático e como tal possui muitas aplicações dentro da matemática (Cálculo, Geometria Analítica, etc.,) assim como fora dela, como por exemplo (Movimento Retilíneo Uniforme – na Física, etc.,). O presente trabalho tem por objetivo analisar descritivamente as cinquenta atividades de função do primeiro grau em um livro didático do primeiro ano do ensino médio, levando em consideração a teoria de registro de representações semióticas, e verificar o tipo de problemas que as caracterizam (aberto ou fechado), o tipo de tratamento predominante (algébrico, gráfico ou numérico), as conexões com outras áreas de ensino e finalmente as conversões e tratamentos presentes em cada questão. A amostra foi intencional tendo em vista que analisamos todas as questões que envolvem função do primeiro grau no livro do primeiro ano do Ensino Médio recomendado pelo PNLD. A Metodologia utilizada foi qualitativa com estudo descritivo. Os resultados mostram uma predominância de problemas abertos e da conversão da linguagem natural para o algébrico.

PALAVRAS-CHAVE: Semiótica. Livro-Didático. Função do 1ºgrau. PNLD.

1 I INTRODUÇÃO

A matemática é uma das principais disciplinas estudadas durante a vida escolar de um estudante. Tal matéria é de suma importância uma vez que se faz presente no cotidiano de todos os seres humanos, seja na contagem das horas e minutos do dia ou até mesmo no troco recebido ao comprar uma mercadoria. A matemática prepara o cidadão para a vida como nenhuma outra disciplina, pois é a ciência que fornece o melhor instrumental para qualquer profissional ser bem-sucedido em qualquer carreira escolhida.

Segundo Messias (2006) “Quando se aborda o conceito de função em matemática, muitos professores da área de exatas tratam o assunto de forma muito simplista, pois consideram o tópico de seu programa escolar como uma troca de variáveis entre x e y". Dessa forma, tais professores não utilizam os livros que abordam o assunto de maneira eficaz para que o aluno obtenha êxito em aprender a matéria, já que os próprios educadores não oferecem a devida atenção ao conteúdo função.

Contudo a construção do conceito de função no ambiente escolar é muito importante para os alunos, uma vez que este é abordado em todos os níveis de ensino, de maneiras diretas e indiretas, sendo fundamental na busca do entendimento ou explicação de muitos fenômenos. Levando em consideração a relevância do conceito de função, Rêgo (2000) destaca que:

> "[...] O conceito de Função constitui-se um dos principais pré-requisitos para grande parte dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Superior, uma vez que inúmeros problemas de Ciências Exatas, da Tecnologia, da Saúde e Ciências Sociais e Aplicadas podem ser modelados e estudados utilizando-se funções de uma ou várias variáveis." (p. 20)

O conceito de função potencializa além das conexões internas à própria Matemática, a descrição e o estudo, por meio da leitura, interpretação e construção de gráficos, do comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1999).

De acordo com Pereira (2013)

> "A matemática é sem dúvida, junto com as demais ciências, uma ferramenta de transformação da sociedade. Mesmo com esta inegável contribuição, a matemática ainda é uma das disciplinas mais odiadas pelos alunos e a aprendizagem dos seus conhecimentos e de suas formas de raciocínios está aquém do que é demandado pela sociedade contemporânea." (p.2)

Considerando que muitas práticas pedagógicas, hoje, são organizadas tendo como recurso exclusivo o livro didático (Brasil, 1998), desenvolvemos a pesquisa deste trabalho, enfocando a análise de questões de função do primeiro grau. Para tanto optamos em analisar o livro didático utilizado por professores das escolas públicas da Educação Básica, investigando como são propostas as atividades referentes ao conceito de função afim.

A análise do livro didático selecionado para a pesquisa foi guiada seguindo o modelo da pesquisa de Maggio e Soares (2009), obedecendo os seguintes critérios: a) classificação das atividades em problemas abertos e problemas fechados; b) articulações entre os campos da Matemática e/ou conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento e com situações do cotidiano; c) tratamento explorado e a forma; d) conversões exploradas e enfatizadas;

Dessa forma este trabalho tem como objetivo analisar descritivamente as cinquenta atividades de função do primeiro grau em um livro didático do primeiro ano do ensino médio recomendado pelo PNLD e dessa forma verificar qual a melhor maneira que o docente pode utilizar esse livro didático em sala de aula, de modo que os alunos tenham uma aprendizagem significativa sobre o assunto.

2 I SEMIÓTICA COMO REFERENCIAL TEÓRICO

Utilizamos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) como fundamentação desse trabalho, pois o foco do estudo é a aquisição e organização de conhecimento matemático.

O termo semiótica tem origem grega *semeion*, que quer dizer signo, ou seja, semiótica é a ciência dos signos. Um dos principais pesquisadores desta área e que serviu de apoio teórico nessa pesquisa foi Raymond Duval. Autor de várias pesquisas, ele trata do funcionamento cognitivo, implicando, sobretudo na atividade matemática e nos problemas de aprendizagem.

Duval (2003) acredita que cada objeto matemático tem sua respectiva representação, contudo não podemos confundi-los, uma vez que, a cada confusão feita, existe uma perda de compreensão e os conhecimentos absorvidos tornam-se inutilizáveis, portanto a distinção entre um objeto e sua representação é a melhor maneira de compreender a matemática.

Para Duval (2003), os objetos trabalhados nas aulas de matemática são abstratos, ou seja, não estão diretamente acessíveis à percepção com o auxílio de instrumentos como microscópios e telescópio. Sendo necessário para sua apropriação, uma forma de representação, portanto, dizemos que no ensino da matemática, todo comunicação é baseada em representações, e apenas através destas é que os conceitos matemáticos serão apropriados pelos alunos, ou seja, estas são essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.

Duval (1993) acredita que existem três tipos de representações: as mentais ou subjetivas, que caracterizam um anexo de imagens, conceitos e crenças que uma pessoa pode ter por um objeto ou uma situação. O segundo tipo de representação são as internas ou computacionais, estas são reconhecidas pela execução automática de uma atividade, ou seja, são internas, porém não conscientes do sujeito. E finalmente as representações semióticas que são externas e conscientes do sujeito. E através destas que o aluno tem acesso aos objetos matemáticos.

Existem quatro tipos de representações semióticas: a língua natural, feita com associações verbais e conceituais; os sistemas de escrita (algébrico, numérico e simbólico); os gráficos cartesianos (interpolação, extrapolação) e as figuras geométricas planas.

Para Duval (2009), em matemática, as representações semióticas não são apenas indispensáveis para fins de comunicação; estas representações são de suma importância para o desenvolvimento da atividade matemática. Além disso, o autor destaca que entre estes registros existem dois tipos de transformações semióticas muito importantes, porém muito diferentes uma da outra, são estas: tratamento e as conversões.

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo, a resolução de uma equação do primeiro grau $2x - 10 = 0 \quad x = 5$. Podemos perceber que temos uma transformação do registro algébrico para o algébrico novamente.

Ao passo que as conversões são transformações de representações onde existe a troca de registro, conservando o objeto, por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação a sua representação no plano cartesiano. Portanto, realizar uma conversão, não é só trocar o modo de tratamento, é também explicar as variáveis pertinentes aos registros mobilizados numa dada conversão.

Dessa maneira, iremos fazer uma análise descritiva de cinquenta questões sobre função do primeiro grau em um livro didático do Ensino Médio aprovado no PNLD e classifica-las de acordo com a Teoria da Representação Semiótica.

3 I ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO DO ENSINO MÉDIO

A pesquisa feita no livro didático caracteriza-se como qualitativa com estudo descritivo. Na pesquisa descritiva ocorre o estudo, a análise, o registro e a interpretação dos fatos do mundo físico sem a interferência do pesquisador. Exemplos muito comuns de pesquisa descritiva são as pesquisas mercadológicas e de opinião. (BARROS e LEHFELD, 2007).

A análise foi realizada durante o mês de janeiro de 2016 em um livro recomendando pelo PNLD (Novo Olhar Matemática – 1º ano – 2013) utilizado nas salas de aula do Ensino Médio em Escolas Públicas e Particulares em todo o Brasil. O objetivo desse trabalho foi analisar descritivamente as cinquenta questões sobre o tópico de função do primeiro grau e classificá-las como mencionado anteriormente de acordo com a Teoria de Representação Semiótica.

Desse modo o professor tem a oportunidade de visualizar a maneira como os livros didáticos abordam a aplicação do assunto ‘‘função do primeiro grau’’, e então a partir dessa análise o educador poderá construir um plano de aula adequado com as questões propostas e fazer uma conexão entre a construção do conceito de função e os tipos de tratamento presentes nos exercícios.

“O livro didático constitui um elo importante na corrente do discurso da competência: é o lugar do saber definido, pronto, acabado, correto e, dessa forma, fonte única de referência e contrapartida dos erros das experiências de vida” (VESENTINI, 2007).

Seguindo a linha de pensamento do último autor citado, este apresenta o livro didático como a principal e única fonte do conhecimento em sala de aula. Em vista dos fatos mencionados acima, decidimos analisar o livro didático para uma melhor compreensão e consideração das questões presentes no mesmo.

Segundo Parterlini (2010), os problemas denominados abertos são opostos aos problemas designados fechados, e a principal distinção entre eles pode ser observada, pelo fato de que o último propõe ao aluno o que deve ser feito, ao passo que o primeiro deixa o estudante livre para compreender e perceber as relações matemáticas existentes naquele contexto.

Utilizando o conceito acima, classificamos as questões em: Problemas Abertos e Problemas Fechados. Sendo o primeiro caracterizado como atividades que envolvem o conceito de função afim em situações problemas e contextualizadas. Enquanto que o último representa questões envolvendo uma aplicação direta do conceito de função.

3. Escreva uma função afim na forma $f(x)=ax+b$, sabendo que:

a) $a=3$ e $b=10$ $f(x)=3x+10$

b) $f(-1)=5$ e $b=0$ $f(x)=-5x$

c) $f(2)=1$ e $a=\frac{1}{4}$ $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

d) $f(3)=11$ e $b=5$ $f(x)=2x+5$

e) $f(1)=3$ e $f(3)=5$ $f(x)=x+2$

f) $f(-2)=7$ e $f(0)=3$ $f(x)=-2x+3$

Figura 1: Problema Fechado.

Fonte: SOUZA, 2013, p.86.

4. Uma pizzaria oferece serviço de entrega e cobra por isso uma taxa fixa de R$ 1,50 mais R$ 0,60 por quilômetro rodado no trajeto entre o estabelecimento e o local da entrega.

a) Qual será o valor da taxa se o local da entrega for a 13 km da pizzaria? E se o local for a 8,5 km? R$ 9,30; R$ 6,60

b) Escreva uma função que permita calcular o valor *t* da taxa de entrega em função da distância *d* percorrida. $t(d)=1,5+0,6d$

Figura 2: Problema Aberto.

Fonte: SOUZA, 2013, p.86.

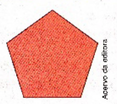
Levando em consideração o primeiro critério de classificação, o número de problemas fechados no livro é dezoito, equivalente a 36% do total de questões existentes no capítulo, enquanto que o número de problemas abertos existentes no livro é trinta e dois, equivalente a 64% do total de questões. Percebemos que existe uma diferença significativa em relação ao número de problemas, uma vez que o número de problemas abertos é quase o dobro comparado aos fechados. Isso possibilita ao professor explorar os dois tipos de questões em suas aulas.

Na figura 1 temos um exemplo clássico de problema fechado, onde o aluno não precisa interpretar a questão para obter o resultado, apenas substituir os valores dados e encontrar a resposta. Ao passo que na figura 2, temos uma questão onde o estudante necessitará compreender a situação – problema, interpretar os valores e construir a lei da função para assim encontrar os valores solicitados na letra a da questão de número 4.

e linear e linear

2. A seguir está indicado o perímetro de um pentágono regular em função da medida, em centímetros, de seu lado.

Medida do lado do pentágono (cm)	Perímetro (cm)
2	10
4	20
5,5	27,5
8	40



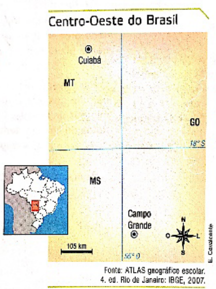
a) Dado um pentágono regular de lado 13 cm, determine seu perímetro. 65 cm

b) Qual fórmula a seguir permite calcular o perímetro *p* do pentágono regular em função da medida ℓ do seu lado? $p(\ell)=5\ell$

- $p(\ell)=\frac{1}{5}\ell$
- $p(\ell)=5+\ell$
- $p(\ell)=5\ell$

Figura 3 :Questão envolvendo área.

40. O mapa representa parte da região Centro-Oeste do Brasil.



a) Qual função permite calcular a distância real em quilômetros *R*, em linha reta, entre as cidades, por meio das distâncias *d* em centímetros representadas no mapa? $R(d)=100d$

b) Quantos quilômetros tem a distância real, em linha reta, entre as cidades de Campo Grande e Cuiabá, sabendo que a distância, no mapa, entre essas cidades é de 5,58 cm? 558 km

Figura 4: Questão conectando matemática

com outras Ciências.

Fonte: SOUZA, 2013, p.86. Fonte: SOUZA, 2013, p. 105.

7. Um técnico em informática, que presta serviços a empresas, realizou um trabalho em 3h e cobrou R$ 185,00. Sabendo que esse técnico cobra R$ 45,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva uma função que represente o preço p que ele cobra por t horas de trabalho. $p(t) = 45t + 50$

8. Júlio trabalha como vendedor em uma loja e seu salário mensal é calculado da seguinte maneira: uma quantia fixa de R$ 900,00 mais 4% do valor das vendas que ele efetuar no mês.
   a) Escreva uma função que permita calcular o salário s de Júlio em função do valor das vendas v efetuadas por ele. $s(v) = 900 + 0{,}04v$ TA
   b) Se em determinado mês Júlio vender o equivalente a R$ 20 000,00 em produtos, qual será o valor de seu salário? R$ 1 700,00
   c) Em certo mês, Júlio recebeu R$ 1 556,00 de salário. Quantos reais ele vendeu nesse mês? R$ 16 400,00

9. Sandra possuía R$ 100,00 e, para fazer uma viagem no final do ano, ela guardou, a partir de janeiro,

Funções

Figura 5: Questão com situação-problema de Matemática.

Fonte: SOUZA, 2013, p. 87.

Em relação ao segundo critério de classificação, este verificou as situações do cotidiano, conexões internas a Matemática e também as ligações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Contabilizamos vinte e duas questões (44% do total) que envolvem situações do cotidiano do aluno como por exemplo a conta feita para determinar o valor do salário de um funcionário envolvendo uma taxa fixa e mais uma porcentagem nos preços das vendas na Figura 5.

Na figura 3 temos um exemplo de questão com conexões internas na matemática, pois além do aluno desenvolver a habilidade de construir a lei da função ele precisa aplicar o conhecimento prévio de perímetro. O total de questões com esse critério de classificação é vinte e uma questões representando 42% das atividades.

No que tange as conexões da Matemática com outras ciências, o livro analisado deixa a desejar, pois apenas sete das 50 atividades (que representam 14% do total) necessitam a utilização da função afim abrangem ligações com outras áreas, tais como: a Física e a Biologia, sendo que duas dessas conexões são com a Física, uma com a Biologia, três com a Geografia, envolvendo mapas e plano cartesiano e por fim mais uma com a Economia. Como podemos exemplificar na figura 4.

O terceiro critério buscou explorar o tipo de tratamento utilizado nas questões do livro didático. O tratamento algébrico pode ser observado em trinta e três das cinquenta questões, representando 66% do total de questões. Esse tratamento é caracterizado pela construção de equações algébricas a partir de situações-problemas propostas nas questões de função. Sendo este o tipo de tratamento dominante nas atividades, podemos observar um exemplo na Figura 6. Enquanto que o tratamento numérico está presente em oito das cinquenta questões simulando 16% da totalidade das questões. Este tipo de tratamento é caracterizado pela objetividade das atividades e suas respectivas soluções. Como podemos visualizar um modelo na Figura 7.

7. Um técnico em informática, que presta serviços a empresas, realizou um trabalho em 3h e cobrou R$ 185,00. Sabendo que esse técnico cobra R$ 45,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva uma função que represente o preço p que ele cobra por t horas de trabalho. $p(t) = 45t + 50$

Figura 6: Tratamento Algébrico

Fonte: SOUZA, 2013, p.87.

7. Um técnico em informática, que presta serviços a empresas, realizou um trabalho em 3h e cobrou R$ 185,00. Sabendo que esse técnico cobra R$ 45,00 por hora de trabalho mais um valor fixo, escreva uma função que represente o preço *p* que ele cobra por *t* horas de trabalho. $p(t)=45t+50$

Figura 6: Tratamento Algébrico

Fonte: SOUZA, 2013, p.87.

29. Estude o sinal de cada função.

a) $f(x)=3x+6$
$f(x)=0$ para $x=-2$; $f(x)>0$ para $x>-2$; $f(x)<0$ para $x<-2$

b) $f(x)=-x-5$
$f(x)=0$ para $x=-5$; $f(x)>0$ para $x<-5$; $f(x)<0$ para $x>-5$

c) $f(x)=\frac{x}{2}-3$ $f(x)=0$ para $x=6$; $f(x)>0$ para $x>6$; $f(x)<0$ para $x<6$

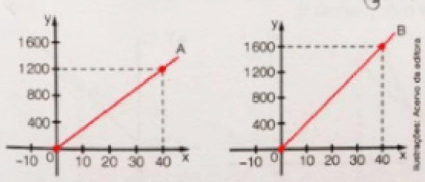
d) $f(x)=-3x+7$

Figura 7: Tratamento Numérico

Fonte: SOUZA, 2013, p. 102.

O último tratamento analisado nas questões são os gráficos. Estes somam apenas nove do total de cinquenta questões simulando 18% destas. De acordo com os PCN'S (1999), um dos alvos da Matemática é proporcionar ao estudante uma aprendizagem autêntica e significativa da leitura, interpretação e construção de gráficos, uma vez que a sociedade atual exige constantemente. Podemos visualizar um exemplo desse tipo de questão na Figura 8 abaixo.

15. Os gráficos representam as funções que relacionam o número de torcedores que vão a determinado ginásio de basquete e a arrecadação em reais obtida com a venda dos ingressos. A função *A* representa a arrecadação obtida com a venda dos ingressos nas cadeiras, e a função *B*, a arrecadação obtida com a venda dos ingressos dos camarotes.



a) O que é possível afirmar em relação ao coeficiente linear de ambas as funções representadas pelos gráficos? Resposta no final do livro.

b) Escreva a lei de formação das funções *A* e *B*.
$A(x)=30x$ e $B(x)=40x$

Figura 8: Tratamento Gráfico

Fonte: SOUZA, 2013, p.93.

O último critério analisado foram os tipos de conversões e tratamentos presentes nas atividades de função do 1° grau. A tabela 01 abaixo ilustrará os números das situações que abrangem os processos e de que modo eles ocorreram.

Análise das 50 questões

AlgébricoNatural	SimbólicoAlgébrico	NaturalAlgébrico	GráficoAlgébrico
1	4	22	7
GráficoNatural	AlgébricoAlgébrico	NaturalNatural	NaturalGráfico
1	13	1	1

Tabela 01: Tipos de Conversões e Tratamentos presentes no Livro Didático analisado.

Fonte: Próprios Autores, 2016.

No livro analisado conversões que envolvem o registro natural e algébrico da função afim são as mais explorados, sendo destacadas as conversões no sentindo Natural Algébrico, que totalizam 44% das questões. Cabe ressalta que, no livro explorado, o número de conversões é muito maior quando comparado com o número de tratamentos, que somam apenas 28% do total.

O número expressivo de conversões em específico no sentindo Natural Algébrico, ocorre em razão do livro abordar várias atividades que envolvem situações problemas do cotidiano em problemas abertos, e para resolvê-las o autor aponta a necessidade da conversão do registro natural para o algébrico. O que induz o aluno a ler a questão, interpretá-la e finalmente fazer as conversões necessárias.

Após analisarmos as cinquentas questões do livro didático levando em consideração a semiótica, nosso trabalho buscou considerar a importâncias das 18 figuras presentes nos comandos das questões analisadas. Tendo em vista o fato do livro didático ainda ser muito usado em sala de aula, apesar das tecnologias presentes atualmente. Portanto devemos explorá-los da maneira mais eficaz possível.

Dentre as 18 imagens presentes nas questões dos livros, treze delas (72,22%) tem alguma relevância na hora da resolução e irão auxiliar o estudante para um melhor entendimento da mesma. Um exemplo disso pode ser observado na Figura 9. Onde a figura presente irá ajudar o aluno na construção da função do primeiro grau.

24. Determinado restaurante *self-service* cobra R$ 28,00 por quilograma de alimento. No entanto, para pratos com mais de 700 g de alimento, o preço da refeição é fixado em R$ 17,60.

a) Quanto custará um prato com 730 g de alimento nesse restaurante? E com 300 g? R$ 17,60; R$ 8,40

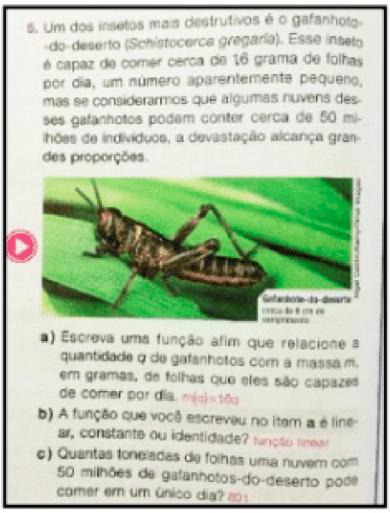
b) Determine a função que permite calcular o preço *p* do prato, em reais, em função da massa *m*, em quilogramas, de alimento. Resposta no final do livro.

c) Construa o gráfico da função e determine os intervalos em que ela é crescente, decrescente ou constante. Resposta no final do livro.

Figura 9.

Fonte: SOUZA, 2013, p.27.

Ao passo que, cinco das figuras restantes que representam 27,77% do total não possuem nenhum valor didático-pedagógico na hora da resolução da atividade, portanto a presença da imagem na questão não irá atribuir nenhum valor significativo na aprendizagem do aluno. Como podemos visualizar na Figura 10.



5. Um dos insetos mais destrutivos é o gafanhoto--do-deserto (*Schistocerca gregaria*). Esse inseto é capaz de comer cerca de 16 grama de folhas por dia, um número aparentemente pequeno, mas se considerarmos que algumas nuvens desses gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação alcança grandes proporções.

a) Escreva uma função afim que relacione a quantidade q de gafanhotos com a massa m, em gramas, de folhas que eles são capazes de comer por dia. $m(q) = 16q$

b) A função que você escreveu no item **a** é linear, constante ou identidade? função linear

c) Quantas toneladas de folhas uma nuvem com 50 milhões de gafanhotos-do-deserto pode comer em um único dia?

Figura 10.

Fonte: SOUZA, 2013, p.86.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

No referido artigo, desenvolveu-se uma análise do livro didático selecionado, utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Durval (2003), tendo como foco investigativo o modo como são propostas as atividades relacionadas à função do primeiro grau.

De acordo, com o modelo de pesquisa utilizado por Maggio e Soares (2009), tendo como base os critérios de análise já mencionados, a análise do livro didático permitiu a constatação que o autor se preocupa com a contextualização dos conhecimentos matemáticos, tendo em vista que, aborda 64% das 50 atividades analisadas como "problemas abertos".

Além disso, o autor busca envolver o aluno com situações do cotidiano e com conexões internas a própria matemática, porém, deixa uma lacuna na conexão entre a matemática com outras áreas do conhecimento, destinando apenas 14% das 50 atividades para esse critério.

Além do mais, o livro enfatiza o tratamento algébrico associado com situações-problema, correspondendo 66% das 50 atividades, um ponto positivo, pois, o tratamento numérico é caracterizado pela objetividade das atividades, nesse caso deixa em segundo plano com apenas 16% das 50 atividades. O livro não explora de maneira significativa os registros relacionados ao gráfico da função afim, somando apenas 18% das 50 atividades, o que não possibilita uma aprendizagem significativa dos alunos de um registro tão presente no cotidiano dos educandos.

Assim, considerando que a maioria dos professores tem como base, principalmente, os livros didáticos para planejar e conduzir suas aulas observamos que o livro analisado, ajudará nas dificuldades em trabalhar com situações-problema, contudo o professor precisa estar atento para os registos gráficos, uma vez que estes foram pouco explorados pelo autor, tendo em vista, que o livro irá refletir no ensino da matemática na sala de aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto.** Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática - Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

_______. **Ministério da Educação e do Desporto.** Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática - Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

BARROS, Aidil Jesus da Silveira & LEHFELD, Neide Aparecida de Souza. **Fundamentos da Metodologia Científica.** 3º Ed. Editora: Makron. 2007.

DUVAL, Raymond. **Registre de représentation sémiotique et foucionnement cognitif la penséé. Annales de Didactique es de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP. 1993.

_______, Raymond. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, p. 11-33, 2003.

_______, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** Trad. Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosane Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física. 2009.

MAGGIO, Pedroso Deise & SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Registros de Representação Semiótica e Função Afim: Análise de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio.** In: ENCONTRO GAUCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10. (X EGEM). Ijui – RS. 2009.

MESSIA, Andre Luiz dos Santos. **O uso de função em física e no cotidiano.** Projeto TEIA DO SABER. São Paulo; 2006

PATERLINI, Roberto R. **Aplicação da Metodologia Resolução de Problemas Abertos no Ensino Superior**. UFSCAR. São Paulo. 2010

PEREIRA, Cícero da Silva. **Aprendizagem em trigonometria contribuições da teoria da aprendizagem significativa;** ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11. (XI ENEM); Curitiba; 2013.

RÊGO, Rogeria Gaudencio do. **Um Estudo sobre a Construção do Conceito de Função.** Tese (Doutorado em Educação) UFRGN, Natal, 2000.

VESENTINI, José William. **A questão do livro didático no ensino da Geografia Novos caminhos da Geografia in Caminhos da Geografia**. Ana Fani Alessandri Carlos(organizadora). 5.ed.,1ªreimpressão- São Paulo: Contexto,2007.

CAPÍTULO 18

O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA E O CONTEÚDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA ANÁLISE DO LIVRO DE MATEMÁTICA-CURSO MODERNO 2ª SÉRIE, SANGIORGI (1966)

Célio Moacir dos Santos
Secretaria do Estado da Educação do Espírito Santo – SEDU

RESUMO: Escolhemos analisar o conteúdo sistemas de equações lineares, presente no livro "*Matemática Curso Moderno-Volume 2*", de Osvaldo Sangiorgi, por considerarmos um autor significativo dentro do Movimento da Matemática Moderna. Como abordagem teórico-metodológica, apoiamos a nossa pesquisa na proposta de Laurence Bardin, apontando o processo de categorias para a realização dessa investigação e no texto de André Chervel "*História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*" com o intuito de observar o comportamento de um conteúdo escolar em um determinado período. Como resultado, percebemos uma forte influência do Movimento da Matemática Moderna, relacionada ao conteúdo de sistemas de equações, trazendo como linguagem marcante a teoria de conjuntos.
PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de equações lineares; Osvaldo Sangiorgi; Movimento da Matemática Moderna.

ABSTRACT: We chose to analyze the content systems of linear equations, present in the book "Mathematics Course Modern-Volume 2", by Osvaldo Sangiorgi, because we consider a significant author within the Modern Mathematics Movement. As a theoretical-methodological approach, we support our research in the proposal of Laurence Bardin, pointing out the process of categories for this research and André Chervel's text "History of School Disciplines: Reflections on a Field of Research" in order to observe the behavior of a school content in a given period. As a result, we perceive a strong influence of the Modern Mathematical Movement, related to the content of systems of equations, bringing as a striking language the set theory.
KEYWORDS: Systems of linear equations; Osvaldo Sangiorgi; Movement of Modern Mathematics.

1 I INTRODUÇÃO

Pesquisamos o livro de Osvaldo Sangiorgi, "*Matemática Curso Moderno-Volume 2*", de 1966. O tópico de nossa pesquisa é sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas. Escolhemos esse autor, por entendermos as suas consideráveis contribuições para o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Valente (2008) prestigiava Sangiorgi por estar sempre atento às discussões internacionais de

Matemática e por trazer esses ideais de modernização para educação brasileira.

Partindo do referencial teórico-metodológico, iniciaremos a análise do livro didático, baseando-nos na proposta de Bardin (2011), abordando a importância do processo de classificação por categorias nesse tipo de investigação. “A maioria dos procedimentos de análise organiza-se, no entanto, ao redor de um processo de categorização” (BARDIN, 2011, p.147). Esse processo distribui os elementos e os agrupa seguindo critérios previamente definidos.

Os elementos examinados no livro serão:

- introdução do conteúdo de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas (como o autor inicia o tópico: com definições, exemplos com exercícios ou com problemas que envolvem uma situação real, se existe alguma abordagem histórica);

- métodos de resolução utilizados nos exemplos e em problemas e exercícios propostos (algébrico/geométrico);

- exercícios/problemas (problemas ligados ao cotidiano estimulando o aluno a discutir sobre o assunto ou com uma finalidade essencialmente matemática com o intuito de buscar os conhecimentos prévios do aluno; ou exercícios com o intuito de memorização dos procedimentos de resolução).

Concordamos com Onuchic (1999) e Onuchic & Allevato (2004) em que ressaltam o problema em matemática como sendo algo que não temos compreensão de como fazer, mas que estamos interessados em fazer.

Já para os exercícios, Romanatto (2012) vem nos dizer que eles demandam aplicação de fórmulas e aplicação de algoritmos.

Para os itens de introdução do conteúdo, métodos de resolução e exercícios/problemas, temos critérios estabelecidos com o intuito de observar as características presentes no livro didático. É imprescindível estarmos atentos a estes pontos, para elencarmos as possíveis mudanças ocorridas nos materiais no período avaliado.

Ao mencionarmos essa discussão sobre problemas/exercícios percebemos o quão importante é para os discentes resolverem atividades que realmente os desafiem. Para essa análise vamos ao encontro de Chervel (1990) quando ele diz que os exercícios são essenciais para o triunfo na aprendizagem do conteúdo. “O sucesso das disciplinas depende fundamentalmente da qualidade dos exercícios aos quais elas podem se prestar” (CHERVEL, 1990, p.204).

Desta forma, diante dos nossos referenciais teóricos e metodológicos, baseando-se nesses princípios, realizamos nossas análises no livro selecionado.

2 | O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA NA SEGUNDA METADE DO

SÉCULO XX NO BRASIL

Búrigo (1989) nos diz que, já havia indícios do Movimento da Matemática Moderna (M.M.M) aqui no Brasil, no final dos anos 50 e início dos anos 60. E ainda de acordo com essa autora, muitos Estados já partilhavam dos ideários modernistas, tendo em vista importantes acontecimentos, como em 1959, com o 3º Congresso de Educação Matemática, realizado no Rio de Janeiro, que fortaleceu ainda mais os indícios de ocorrências do movimento.

Soares (2005) afirma que, foi uma das alterações curriculares que mais se tornou conhecida, com uma discussão bem difundida e empenhada, com ampla divulgação, embora não tivesse um caráter legislativo.

> A resposta à pergunta "porque a Matemática estava na linha de frente de uma reforma pedagógica" era pronta: "ela é a base de uma cultura geral voltada para a ciência e a tecnologia". ***Moderna.*** Esta foi a palavra-chave, a palavra guia, a palavra mágica, com toda a sua carga afetiva, mas também com toda a sua ambiguidade... (PIRES, 2000, p.20, grifo do autor).

Destacamos o surgimento do primeiro grupo de estudos, GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), organizado em São Paulo, em 1961, com sede na Universidade de Mackenzie, tendo como presidente o professor Osvaldo Sangiorgi. Este grupo foi um dos primeiros a atuar na cidade de São Paulo com foco no aperfeiçoamento de professores para disseminar as ideias do movimento.

Segundo Búrigo (1989), outra atuação também importante desse grupo foi na elaboração de livros didáticos, com os novos conteúdos a serem trabalhos nos sistemas educacionais. Em 1962, foi lançado pela Companhia Editora Nacional, o primeiro livro específico para se aplicar os princípios do M.M.M., em que Sangiorgi encarregou-se de colaborar na confecção do mesmo.

Com o MMM, os livros didáticos sofreram mudanças significativas, integrando uma axiomatização e estruturação algébrica, com uma forte predominância da teoria de conjuntos.

> Veiculada principalmente nos livros didáticos, sem adequada preparação dos educadores nem suficiente discussão de seus propósitos, a Matemática Moderna surgiu entre nós como substituta definitiva da velha Matemática, como a qual parecia não manter relação alguma. (PIRES, 2000, p.31).

De acordo com Búrigo (1989), esses anseios, por mudanças educacionais, ocorreram com vistas à modernização e a introdução no país da necessidade de uma escola com uma visão de avivamento do processo modernista. Buscavam-se, na Matemática, essas características, com enfoques em conteúdos novos, substituindo abordagens clássicas, conferindo uma maior importância a aspectos lógicos e estruturais da Matemática.

3 I OS SISTEMAS LINEARES NO LIVRO DE MATEMÁTICA – CURSO MODERNO DE OSVALDO SANGIORGI (1966)

Escolhemos esse autor, por entendermos a sua importância nas contribuições para o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Valente (2008) informa esse mérito de Osvaldo Sangiorgi, ressaltando que, demostrou-se em estar sempre atento às discussões internacionais de Matemática. Sendo que, através do III Congresso Nacional de Matemática, realizado no Rio de Janeiro em 1959, toma a dianteira das propostas de modernização no Brasil.

Ainda de acordo com Valente (2008), Sangiorgi se valeu da mídia para promover e difundir esse movimento, e seus livros se tornaram referência para outros escritores. Assim, se justifica a nossa análise por um livro desse autor, com o objetivo de verificar quais as possíveis modificações ocorridas no conteúdo sistema de equações, em relação a esse movimento de modernização.

O livro *Matemática – Curso Moderno Volume 2,* do autor Osvaldo Sangiorgi, editado pela Companhia Editora Nacional, impresso em 1966 em sua 2ª edição, tem um total de 272 páginas, sendo treze referentes aos assunto de sistemas. Percebemos que o autor tenta estabelecer um diálogo com o estudante, proporcionando uma linguagem mais simples. Não deixando de reforçar também, a figura do professor, que segundo Sangiorgi (1966) é um profissional de suma importância para o aprendizado do aluno.

Em um olhar geral é importante salientarmos que nessa edição, o livro apresenta uma aparência visual com cores mais fortes, esquemas acompanhado de figuras e quadros explicativos, no qual o autor chama de "*Lembrete Amigo*", na intenção de propiciar uma melhor aproximação entre estudante e livro. Também vislumbramos uma linguagem mais acentuada com relação à teoria de conjuntos.

O livro trás um programa para o ensino de Matemática intitulado de "*Programa para um Curso Moderno de Matemática*", em que garante estar de acordo com os "*Assuntos Mínimos*" e em consonância com os órgãos legisladores da época.

> [...] os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 e as sugestões para desenvolvimento da Matemática, da 2ª Série Ginasial, publicadas pelo Departamento de Educação de São Paulo (Diário Oficial de 19/1/65). (SANGIORGI, 1966. v. 2, 3ª ed., Programa para um Curso Moderno de Matemática).

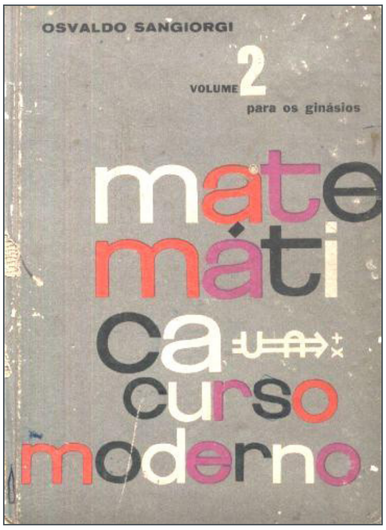


Imagem 1 - Capa de Matemática Curso Moderno Volume 2

Como, neste livro, Osvaldo Sangiorgi tem uma abordagem voltada para os princípios da Matemática Moderna, há uma grande utilização de simbologia, focalizando os quantificadores ($\forall, \vee, \exists, \nexists$), inclusive temos um capítulo do livro dedicado a essas notações.

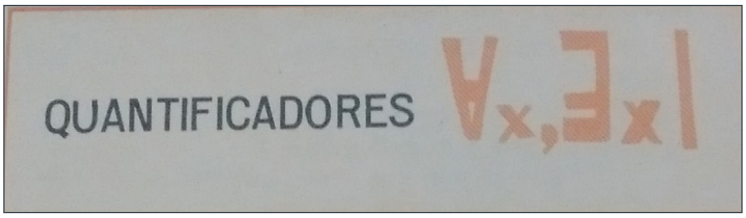
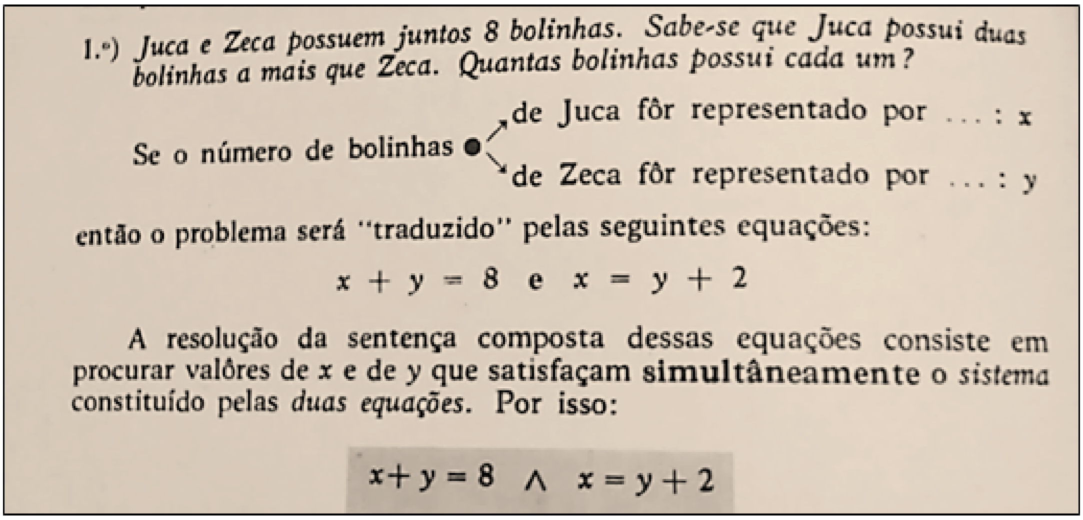


Imagem 2 – Capítulos do livro, Sangiorgi (1966, p.210)

Na introdução do capítulo sobre sistemas de equações o autor inicia a discussão com um problema. Nessa discussão são atribuídas variáveis aos personagens do problema.

Juca sendo representado pela variável x.

Zeca sendo representado pela variável y.



1.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui duas bolinhas a mais que Zeca. Quantas bolinhas possui cada um?*

Se o número de bolinhas ● de Juca fôr representado por . . . : x
de Zeca fôr representado por . . . : y

então o problema será "traduzido" pelas seguintes equações:

$$x + y = 8 \quad e \quad x = y + 2$$

A resolução da sentença composta dessas equações consiste em procurar valôres de x e de y que satisfaçam **simultâneamente** o *sistema* constituído pelas *duas equações.* Por isso:

$$x + y = 8 \ \wedge \ x = y + 2$$

Imagem 3 – Introdução do assunto sistema de equações, Sangiorgi (1966, p.242)

Cada equação é determinada por um conjunto verdade (V_1 e V_2) e a solução (V) é a interseção das duas equações.

Sendo $V_1 : x + y = 8$

$V_2 : x = y + 2$

$$Solução: V = V_1 \cap V_2$$

Como: $V = V_1 \cap V_2$, vem:

$V = [(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), \ldots] \cap [(2,0), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4), \ldots]$

ou $V = [(5,3)]$

Portanto: a *solução* do sistema proposto é o par: (5,3), e a resposta é: Juca tem 5 bolinhas e Zeca, 3.

Prova: n.º de bolinhas de Juca: 5
n.º de bolinhas de Zeca: 3 — diferença: 2 (Juca tem a mais)
soma: 8

Imagem 4 – Resolução sistema de equações, Sangiorgi (1966, p.244)

Vejamos outro exemplo de como o autor encontra o resultado de um sistema de duas equações.

2.º) *Juca e Zeca possuem juntos 8 bolinhas. Sabe-se que Juca possui o triplo das bolinhas de Zeca. Quantas possui cada um?*

o sistema simultâneo seria:

$$x + y = 8 \quad \wedge \quad x = 3y$$

cujas equações traduzem *duas condições* **distintas** e **compatíveis.** Como:

$V_1 = [(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), \ldots]$

e $V_2 = [(0,0), (3,1), (6,2), (9,3), \ldots]$

temos: $V = V_1 \cap V_2 = [(6,2)]$

Sendo (6,2) o *único par,* segue-se que: Juca possui 6 bolinhas e Zeca, 2.

Porém, se fôssem enunciados os seguintes problemas:

Imagem 5 – Discussão de um sistema usando teoria de conjuntos, Sangiorgi (1966, p. 245)

Notamos que o autor utiliza pares ordenados, que representam as possíveis soluções de cada equação separadamente, sendo que, ao final, o autor faz uma interseção entre os resultados para descobrir a solução comum, denotando assim, uma nova maneira de resolver o sistema.

O autor dá uma ênfase muito grande ao método da resolução por substituição, reservando cinco páginas para sua apreciação. Esse item, "*Técnica Operatória. Método de substituição de Variáveis*" (SANGIORGI, 1966, p.247), são apresentados cinco exemplos resolvidos para que o leitor possa ter uma razoável compreensão dessa forma de resolução.

Ao todo, no segundo volume da Matemática Curso Moderno, encontram-se quarenta e cinco exercícios e problemas sobre sistemas de equações. Sangiorgi (1966) subdivide as suas atividades em dois grupos, a primeira, apenas de trinta exercícios e, depois, em um segundo grupo, temos quinze problemas.

Traremos uma representatividade dos exercícios/problemas dispostos nesse livro, bem como procuraremos encontrar elementos que nos remetam aos ideais do movimento da apregoada "modernidade" da Matemática.

Alguns exercícios/problemas do livro de Sangiorgi:

1. (SANGIORGI, 1966, p.247) problema nº 1/1º - Resolver os seguintes problemas por intermédio de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis: Dorotéia e Sílvia possuem juntas 6 bonecas. Sabe-se que Sílvia possui duas bonecas a mais que Dorotéia. Quantas bonecas possui cada uma?

2. (SANGIORGI, 1966, p.252, grifo do autor) exercício nº 1/1º e 8º - Resolver os seguintes sistemas simultâneos de duas equações do primeiro grau com duas variáveis, usando a *técnica de Substituição de Variáveis.*

$$1º)\quad x + y = 10 \qquad \wedge \qquad x = y + 6$$

$8º)\ x = 3(y-1) \quad \wedge \quad x = \frac{y+14}{2}$ (Sugestão: basta igualar os valores de x ...)

3. (SANGIORGI, 1966, p.252,) exercício nº 2/7º - "Discutir os sistemas." 7º)

$$7º)\begin{cases} a + b = 8 \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 4 \end{cases}$$

4. (SANGIORGI, 1966, p.253) problema nº 6 - A soma das idades de dois alunos é 20. Daqui 3 anos o mais velho terá 6 anos mais que o mais moço. Qual a idade atual de ambos?

Sugestão: Representando a idade de um dos alunos por x ...

e a idade do outro por $\ldots y$

temos: $x + y = 20$ (1ª equação do sistema)

Como daqui a 3 anos, um será : $x + 3$ e o outro : $y + 3$, a 2ª equação do sistema, relativa à segunda parte do problema, será:

$$x + 3 = 6 + (y + 3)$$

Agora é só resolver o sistema...

Análises acerca dos exercícios e problemas.

- Desenvolvimento e utilização de uma linguagem dentro da teoria conjuntos;

- Preocupação por parte do autor em trabalhar com problemas contextualizados para que o estudante possa resolver usando sistemas; (Ver exercício 1 selecionado do livro de Sangiorgi)

- A ênfase e direcionamento se encontram unicamente na técnica de substituição em detrimento das demais, com cinco páginas dedicadas integralmente a esse método e grande quantidade de exercícios;

- Uso de simbologias;

- Existência de algumas sugestões para a resolução dos problemas, que direcionam o equacionamento;(Ver exercício 2 e 4 selecionado do livro de Sangiorgi)

- O número de exercícios em relação à edição anterior foi bastante reduzido.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o Movimento da Matemática Moderna, percebemos grandes alterações relacionadas aos conteúdos presentes nos livros didáticos. Mudanças significativas na forma como os assuntos eram abordados, uma axiomatização e estruturação algébrica, com uma forte predominância da teoria de conjuntos.

Ressaltamos a importância de se analisar uma obra de Osvaldo Sangiorgi, por ser um autor de grande relevância nas contribuições para o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.

O conteúdo de sistemas de equações lineares comparece trazendo novas simbologias e termos como conjunto verdade, interseção das soluções, pares ordenados, entre outros. Essa linguagem diferenciada é uma característica marcante desse movimento constatada em todo o conteúdo de sistemas, seja na introdução, seja na maneira de resolução e até mesmo nos exercícios.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. Análise de Conteúdo. Lisboa, Portugal; Edições 70, LDA, 2009.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CHERVEL, Andre. **História das disciplinas escolares**: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria e Educação. Porto Alegre, n ° 2, p. 177-229, 1990.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de Matemática:** da organização linear à idéia de rede. FTD, 2000.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática Curso Moderno**. 2ª Série. 1966.

SOARES, Flávia. Os congressos de ensino de Matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a Matemática Moderna. Disponível em: < http://www.ime.usp.br/~sphem/documentos/sphem-tematicos-5.pdf >. Acesso em 03 de Set. 2016.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Osvaldo Sangiorgi:** um professor moderno. Annablume, 2008.

CAPÍTULO 19

A (NÃO) EXISTÊNCIA DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO: UMA ANÁLISE SOBRE AS IMAGENS CONCEITUAIS DE ESTUDANTES EM UM CURSO DE CÁLCULO

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias
Universidade Federal do Pará (UFPA)

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará (UFPA)

RESUMO: Objetivamos com esse trabalho levantar discussões acerca de dificuldades que estudantes apresentam sobre o conceito de limite de uma função. Nossas considerações sobre tais dificuldades são baseadas em pesquisas anteriores realizadas nesse âmbito, em nossas experiências na docência da disciplina *Cálculo I* e, também, em nossas investigações acerca dessa temática, cujas análises foram realizadas com o intuito de inquirir sobre as *imagens conceituais* dos sujeitos pesquisados no que concerne ao conceito de limite. Nesse artigo, elucidamos as *imagens conceituais* de dois estudantes de um curso de Cálculo materializadas por meio das relações que eles efetivaram entre a (não) existência do limite, (des) continuidade e indeterminações. Para isso, destacamos e analisamos trechos de entrevistas realizadas com os sujeitos investigados. Dentre as dificuldades evidenciadas na investigação, ressaltamos aquelas voltadas para as evocações dos sujeitos que condicionaram a existência do limite à continuidade e à ausência de indeterminação.

PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades; Conceito de Limite; (Não) Existência do Limite; Indeterminações; (Des) continuidade de Funções.

ABSTRACT: Our aim with this paper was to raise discussions related to students' dificulties in learning the concept of limit of a function. Our considerations about such difficulties were based on previous researches, in our experiences as Calculus teachers, as well as our investigations about this theme, whose analysis were made with the aim of inquire about the investigated subjects' concept images concerning to the limit concept. In this paper, we show the concept image of two students, materialized through the relation they established between the (non)existance of the limit, (dis)continuity and indeterminations. For that, we present and analyze parts of the interviews that were made with these students. We observed difficulties related to evocations that conditioned the limit existence to the continuity of the function and to the absence of indeterminations.

KEYWORDS: Difficulties; Concept of limit; (non)existence of the limit; indeterminations; (dis)continuity of functions.

1 I INTRODUÇÃO

As dificuldades inerentes ao processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de Cálculo têm sido objeto de investigação, sobretudo a partir da década de 80, de diversas pesquisas em Educação Matemática no segmento superior de ensino, tanto no Brasil quanto no exterior, isso porque tais dificuldades desencadeiam altos índices de reprovação nas disciplinas voltadas para essa área de conhecimento (OLIMPIO, 2007).

Frente a esse cenário e, também, mediante experiências próprias na docência em Cálculo, temos nos dedicado – ao longo dos últimos cinco anos – ao estudo mais aprofundado acerca das dificuldades de aprendizagem dos conceitos envolvidos no âmbito do Cálculo, em especial, do conceito de limite de uma função, por considerarmos que:

> Entender o conceito de limite é crucial para estudantes de Cálculo, haja vista que ele estabelece a base para o desenvolvimento dos conceitos de continuidade, derivada e integral. Apesar da importância do entendimento do conceito de limite ser reconhecida, a introdução do mesmo, devido à sua complexidade, causa sérias dificuldades (ÇETIN, 2009, p. 5, tradução nossa).

Dentre as principais dificuldades relacionadas ao entendimento do referido conceito, fazem-se presentes – de maneira expressiva – aquelas voltadas para a compreensão da correlação entre as noções intuitiva e formal de limite (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2015), fato que tem influenciado a percepção de muitos estudantes no que se refere às suas interpretações sobre a existência ou não existência do limite. Aliado a isso, ressaltamos a preocupação por demasiado com o ensino de técnicas para o cálculo de limites e de manipulações algébricas, em detrimento de discussões que fomentem reflexões acerca do conceito em si. Nessa perspectiva, estamos em acordo com Olimpio (2007) no sentido de que:

> (...) calcular o limite de uma função num ponto , nos casos mais "interessantes", resumir-se-á em descobrir uma maneira de "substituir o em $f(x)$" sem que tal procedimento implique na emergência de irritantes quocientes com denominador nulo. Em outras palavras, a ideia de aplicar truques adequados de manipulação algébrica que permitirão "eliminar" tais inconveniências. *A questão da existência do limite, ou mesmo do que ele significa, ficará ainda nebulosa* (...) (OLIMPIO, 2007, p. 44, grifo nosso)

Em síntese, admitimos que o entendimento do conceito de limite seja de grande importância para a compreensão de outros conceitos – como o de derivada e integral – e assumimos que para compreender o conceito de limite de uma função, é preciso refletir sobre ele, buscar a abstração matemática mediante a mobilização de representações, generalizações e sintetizações provenientes de experiências anteriores de aprendizagem, materializadas pelas *imagens conceituais* dos estudantes e por isso, temos dedicado nossas investigações ao estudo dessas mobilizações com o intuito de identificá-las e, em um momento posterior, utilizá-las como suporte para a elaboração de instruções de ensino que auxiliem na formação de *imagens conceituais* coerentes com a *definição conceitual formal* de limite de uma função.

Nesse trabalho, optamos por levantar discussões acerca de algumas das *imagens conceituais evocadas* por estudantes que já estavam cursando a disciplina Cálculo I em duas universidades públicas no estado do Pará sobre como avaliam a (não) existência do limite em determinado ponto em situações em que haja indeterminações e/ou a função seja descontínua, de maneira a responder ao seguinte questionamento: *Quais elementos compõem a imagem conceitual dos sujeitos da pesquisa no que se refere à relação entre a (não) existência do limite, (des) continuidade de funções e indeterminações?*

2 | BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL[1]: ESTABELECENDO UM *LINK* COM NOSSO OBJETO DE ESTUDO

Uma *imagem conceitual* referente a um conceito é formada por associações não verbais efetivadas na mente de um indivíduo, como por exemplo, suas impressões e experiências de aprendizagem que são acumuladas ao longo do tempo e que, em geral, são traduzidas em formas verbais – ou seja, *definições conceituais pessoais*[2] – que são utilizadas para especificar esse conceito.

Nessa perspectiva, uma *imagem conceitual* pode ser constituída mediante qualquer representação de experiências vivenciadas em um ou mais contextos de aprendizagem. Uma representação visual de um sujeito, por exemplo, pode corresponder – de maneira parcial ou global – à sua interpretação de um dado conceito, levando-o a aquisição do mesmo por meio de seu entendimento acerca dessa interpretação.

Em outras palavras, assumimos que *adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual sobre ele* (VINNER, 1991), sendo que essa *imagem conceitual* não é – necessariamente – coerente com a *definição conceitual formal*[3] de determinado conhecimento matemático, dado que pode ter sido constituída por propriedades e/ou interpretações contraditórias ao longo das experiências de aprendizagem vivenciadas pelo indivíduo (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2015).

Tendo como suporte teórico os estudos de Vinner (1991) sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual*, temos realizado investigações referentes ao entendimento de estudantes acerca de conceitos no âmbito do Cálculo, especialmente, o de limite de

---

1 Sugerimos a leitura de Brandemberg (2010) e Messias (2013) – destacadas nas referências desse trabalho – para maiores esclarecimentos sobre os referidos termos e a teoria que os engloba.

2 Segundo Vinner (1991), é a forma em palavras que um sujeito utiliza para descrever um conceito; é uma fraseologia própria do indivíduo; não equivale, necessariamente, à definição formalmente concebida/reconhecida pela comunidade acadêmica.

3 Terminologia utilizada por Vinner (1991) para denominar uma definição formal.

uma função. Nesse sentido, temos identificado múltiplos elementos que compõem as *imagens conceituais* de estudantes relativas a esse conceito. Dentre os quais, destacamos nesse trabalho, uma discussão concernente às *imagens conceituais evocadas* por estudantes de um curso de Cálculo sobre a (não) existência do limite em determinado ponto, confrontando-as com apontamentos de outras pesquisas que, também, alinharam-se aos nossos objetivos e complementaram o referencial teórico de nosso estudo.

3 | REVISÃO DE LITERATURA

Dedicamos esse subtópico à descrição de algumas pesquisas que buscaram – assim como a nossa – entender mais profundamente percepções e/ou dificuldades de estudantes relacionadas ao conceito de limite de uma função.

Çetin (2009) realizou um estudo, no qual objetivou investigar como acontece o processo de apreensão do conceito de limite de uma função por parte de 25 estudantes de um curso de Cálculo em uma universidade na Turquia, de maneira que seus resultados pudessem subsidiar instruções de ensino que possam tornar a aprendizagem do referido conceito mais efetiva. Os sujeitos investigados na pesquisa vivenciaram experimentações no laboratório de informática, responderam questionários e participaram de entrevistas semi - estruturadas que foram analisadas conforme o quadro teórico da teoria APOS, permitindo que o autor identificasse como os indivíduos da pesquisa desenvolvem o entendimento do conceito de limite de uma função, tanto de uma perspectiva informal quanto por meio da interpretação da definição formal e que dificuldades apresentam na transição de uma abordagem informal para uma abordagem formal do referido conceito. Pois, segundo o autor:

> A noção de limite de uma função é fundamental para o entendimento em Cálculo e é a base que tudo o que segue nesse campo de conhecimento. Diferenciação e integração, o núcleo do estudo em Cálculo, são construídas a partir do conceito do limite (...) estudantes tem dificuldades em entender o conceito de limite (...) ***a maioria tem uma ideia intuitiva de limite e poucos conseguem alcançar um real entendimento da definição*** (ÇETIN, 2009, p.6, tradução nossa, grifo nosso)

Como resultados, Çetin (2009) identificou que a maioria dos sujeitos investigados enxerga o limite de f em a como $f(a)$, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Além disso, apesar de muitos entenderem intuitivamente o significado de limite, poucos conseguem alcançar o real entendimento da definição formal, haja vista que os quantificadores se apresentam como fatores de conflito em potencial e ocasionam múltiplas mobilizações nos estudantes no que se refere à esse conceito. Tais mobilizações influenciam, na maioria das vezes, na formação de *imagens conceituais* que não se fazem coerentes com a *definição conceitual formal* de limite de uma função.

Em seu estudo, Domingos (2009) investigou as dificuldades de estudantes de engenharia e matemática em relação ao entendimento do conceito de limite. Para isso, observou aulas de cálculo e, em seguida, estabeleceu – através de entrevistas semi-estruturadas – três *níveis* de imagens conceituais: incipiente, instrumental e relacional. Dentre as atividades, o autor solicitou que os sujeitos explicassem, primeiramente, o significado de $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Em seguida, solicitou que os mesmos sujeitos interpretassem esse limite por meio do gráfico da função. Por fim, pediu que os sujeitos verbalizassem a relação entre a definição formal de limite com o exemplo apresentado.

Domingos (id.) observou que alguns sujeitos conseguiram verbalizar poucas partes da definição, sem conseguir relacioná-la com o exemplo. Conforme classificação na pesquisa, esses sujeitos apresentaram *imagem conceitual incipiente*. Estão incluídos nessa primeira classificação aqueles que interpretaram a indeterminação emergida do cálculo de $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ como fator determinante para a não existência do limite quando $x \to 1$. Aqueles que conseguiram verbalizar algumas partes da definição e que, também, estabeleceram relação com a representação gráfica, apresentaram *imagem conceitual instrumental* e, por fim, os que conseguiram representar o conceito simbolicamente, bem como verbalizar seu significado, caracterizaram-se por uma *imagem conceitual relacional*. É importante ressaltar que, grande parte dos sujeitos investigados, tiveram dificuldades em relacionar suas *imagens conceituais* com a representação simbólica do conceito de limite.

Em Nair (2010), observamos *imagens conceituais* de estudantes de Cálculo relativas aos conceitos de função racional, assíntotas, limites e continuidade. A autora buscou identificar que conexões entre os referidos conceitos os sujeitos investigados apresentavam. Sua pesquisa constituiu-se de uma entrevista, na qual as imagens conceituais identificadas subsidiaram a elaboração de planos de aula que nortearam os episódios de ensino realizados ao longo de sua investigação.

No que se refere à relação entre os conceitos de *limite* e *continuidade*, Nair (2010), os sujeitos investigados acreditavam que o limite não existe em determinado ponto se a função não estiver definida naquele ponto. Além disso, *evocaram* que o $\lim_{x \to a} f(x)$ deve ser, obrigatoriamente, igual a $f(a)$, caso contrário, o limite não existirá. A autora observou também que, para os estudantes, o limite não existirá se o cálculo implicar na emergência de indeterminações[4] e salientou a dificuldade em calcular limites envolvendo o infinito.

Messias e Costa (2010) apresentam parte dos resultados de um estudo diagnóstico, no qual investigaram as principais dificuldades que 53 estudantes concluintes do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública no estado do Pará apresentaram ao resolverem questões envolvendo aspectos conceituais e operatórios de limite de uma função. Dentre os resultados obtidos, foi destacado que os sujeitos definiram limite como uma aproximação em torno de um ponto sem, no entanto, "alcançá-lo". As mobilizações dos sujeitos foram pautadas na

4 A autora refere-se somente às indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$. Demais casos não foram discutidos na pesquisa.

ideia de que $f(x) \neq L$. Nessa caso, observamos que os sujeitos desconsideraram os casos em que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, fator que garante a continuidade no ponto . Essa noção de constante aproximação em torno de um ponto sem "alcançá-lo" remete às interpretações dinâmicas do conceito de limite de uma função, conforme destacado em Messias (2013) e Messias e Brandemberg (2014). Aliado a isso, as autoras observaram em seus resultados que – para os sujeitos investigados – se uma função apresenta um *salto*, então a função será descontínua e – consequentemente – o limite não existirá.

Os resultados obtidos em Çetin (2009), Domingos (2009), Nair (2010), Messias e Costa (2010), dentre outros estudos que não foram apontados nesse artigo, mas que também se constituíram como suporte teórico para nossos estudos como um todo, fomentaram a elaboração de hipóteses voltadas para as possíveis *imagens conceituais* a serem *evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa no que concerne às relações entre a (não) existência do limite, (des) continuidade de funções e indeterminações. Tais hipóteses nos permitiram delinear a coleta de dados junto aos sujeitos e nortearam toda a análise de nossos resultados. Destacamos, no quadro 1, as considerações dos referenciais teóricos que nos levaram à elaboração dessas hipóteses.

<table>
<tr><th>Referencial Teórico</th><th>Resultados Obtidos</th><th>Hipóteses</th></tr>
<tr><td>Çetin (2009)</td><td>$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$</td><td rowspan="4">1. Os sujeitos investigados evocam – em suas imagens conceituais – que a existência do limite está condicionada à continuidade da função.

2. "A emergência de indeterminações implica na não existência do limite" é uma das mobilizações que compõem a imagem conceitual dos sujeitos investigados.</td></tr>
<tr><td>Domingos (2009)</td><td>Indeterminações implicam na não existência do limite</td></tr>
<tr><td>Nair (2010)</td><td>Limite não existe quando $x \to a$ se o ponto a não estiver definido no domínio da função;
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Descontinuidade implica na não existência do limite</td></tr>
<tr><td>Messias e Costa (2010)</td><td>Limite é uma aproximação em relação a um ponto sem, no entanto, alcançá-lo;
$f(x) \neq L$
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Saltos ➡ função descontínua ➡ limite não existe</td></tr>
</table>

Quadro 1 - Implicações do referencial teórico para a formulação de nossas questões de pesquisa

Uma vez estabelecidas as hipóteses da pesquisa, realizamos algumas reflexões sobre *como* poderíamos estruturar os momentos de investigação junto aos sujeitos investigados, com o intuito de identificar se os mesmos evocariam imagens conceituais semelhantes àquelas destacadas em nosso quadro de referências, sendo possível –

consequentemente – validar nossas hipóteses.

4 I REFLEXÕES SOBRE A OBTENÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

O levantamento bibliográfico, aliado à nossa experiência na docência, levou-nos a identificar que muitos estudantes apresentam dificuldades relacionadas ao entendimento do conceito de limite de uma função. E, conforme mencionado anteriormente, temos realizado estudos – ao longo dos últimos cinco anos – voltados para essa problemática, sendo que nesse artigo apresentaremos discussões acerca de algumas dificuldades de estudantes de um curso de Cálculo em verificar a existência de determinado limite.

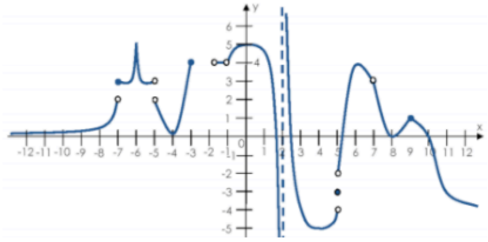
Reiteramos que este trabalho apresenta uma parte dos resultados obtidos em nossas investigações voltadas para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função. Portanto, destacaremos somente a parte de nossos instrumentos de coletas de dados que nos permitiu obter informações acerca das relações materializadas nas *imagens conceituais* dos sujeitos investigados sobre (des) continuidade, indeterminações e a (não)existência do limite.

Para fins de viabilizar a organização desse artigo, consideremos dois Temas de Discussão (TD): o TD1, intitulado *(Des)continuidade implica na não existência do limite?* E o TD2, intitulado *indeterminações implicam na não existência do limite?* As perguntas que constituem o título de ambos os TDs são extensões das hipóteses apresentadas no quadro 1. Para cada TD, elaboramos um roteiro que foi seguido durante as entrevistas. No entanto, não desconsideramos a possibilidade de realizar outros questionamentos aos sujeitos investigados – em caso de necessidade – para complementar nossas análises acerca das *imagens conceituais evocadas*.

Destacamos, a seguir, os roteiros elaborados e os objetivos traçados para cada um deles. Ressaltamos que, *a posteriori*, destacamos a análise das *imagens conceituais* de dois dos sujeitos investigados na pesquisa.

Roteiro de entrevista TD2 – (Des) *continuidade implica na (não) existência do limite?*

1. Mostrar o gráfico da função abaixo:



- Observe esse gráfico e responda:
  - O $\lim\limits_{x \to -7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 5$? Justifique.
  - O $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 9$? Justifique.
- Caso seja mobilizada a ideia de que o limite existe se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, perguntar:
  - Então, o limite da função em determinado ponto deve ser igual ao valor da função nesse ponto? (aguardar resposta). E se não for?
  - Devemos, portanto, considerar o domínio da função como um fator decisivo para evidenciarmos a (não) existência do limite?
  - Então quando o limite de uma função existe?
  - Escreva uma definição para $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.
- Caso o sujeito responda corretamente o primeiro tópico, solicitar as seguintes situações:
  - Quando o limite existe?
  - Escreva uma definição para $\lim f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.

Figura 1 – Roteiro referente ao TD1. Fonte: Messias (2013)

Com o TD1, objetivamos investigar e explorar junto aos sujeitos investigados da pesquisa suas *imagens conceituais* sobre a existência do limite em casos em que a função fosse descontínua. Nesse sentido, voltamo-nos para a hipótese de que os estudantes poderiam mobilizar a ideia de que o limite de uma função existe se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ (conforme ressaltamos no quadro 1).

Roteiro de entrevista TD2 - *Indeterminações implicam na não existência do limite?*

1. Os limites das seguintes funções existem? Justifique.
   - $\lim_{x\to\infty} 5+\frac{1}{x}$
   - $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$
   - $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x^3}$

2. O que faz você concluir que o limite de determinada função não existe?
   - Em caso de respostas que evoquem a ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite, perguntar ao sujeito:
     - A presença de *indeterminações* representa sempre um ponto de descontinuidade na função?
     - Em caso de resposta afirmativa, perguntar:
       - Então, eu posso dizer que o ponto de descontinuidade influencia na questão da existência do limite? Explique.
     - Em caso de resposta negativa, pedir que explique o que as *indeterminações* representam; solicitar exemplos.

3. Você poderia escrever uma definição para limite de função e, em seguida, explicá-la?

Figura 2 – Roteiro referente ao TD2. Fonte: Messias (2013)

O TD2 é composto por questionamentos que levantam a discussão acerca da influência de indeterminações na (não) existência do limite, além de verificar junto aos indivíduos se eles mobilizavam a ideia de que uma indeterminação representa sempre um ponto de descontinuidade.

5 I ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados apontados nesse artigo contemplam a análise das entrevistas realizadas com dois estudantes de um curso de Cálculo. Destacamos, portanto, a descrição de alguns trechos concernentes às discussões estabelecidas, analisando-os conforme o referencial teórico e as hipóteses levantadas. Mais uma vez, ressaltamos que apesar de termos elaborado um roteiro para cada TD, não descartamos a realização de outros questionamentos, levando em conta, evidentemente, as particularidades das *imagens* conceituais dos sujeitos investigados.

No caso do TD1, identificamos que estudante E1 mobilizou em sua *imagem conceitual* a ideia de que a existência do limite em determinado ponto não está obrigatoriamente atrelada à continuidade nesse ponto (ver figura 3).

P:[...] (mostra o gráfico do roteiro), e aí eu queria saber se o $\lim_{x \to -7} f(x)$ *existe.*
(depois de algum tempo)
E1: Não.
P: Por quê?
E1: Porque tem esse salto... por isso não existe.
P: E quando $x \to 5$*?*
E1: Também não existe.
P: E quando $x \to 7$*?*
E1: O limite é $f(7)$*.*
P: E quando $x \to 9$*?*
E1: Quando $x \to 9$*, o limite é* $f(9)$*.*

Figura 3 – Trecho 1: Entrevista estudante E1. Fonte: Messias (2013)

Da figura 3, observamos que o sujeito relaciona a não existência do limite quando $x \to -7$ e $x \to 5$ e à existência do *salto* no gráfico. Aparentemente, ele não relacionou o fato de $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ à não existência do limite (MESSIAS;COSTA, 2010). Nesse caso, a parte da *imagem conceitual* que foi ativada para responder essa pergunta foi suficiente para que ele identificasse que solucionasse a questão (VINNER, 1991). No entanto, essa interpretação de que o "contínuo" está relacionado ao sentido coloquial de não ter "saltos", pode se configurar como um *fator de conflito em potencial*, além de não ser suficiente para verificar a existência do limite em outros casos.

Ressaltamos, também, que o estudante – ao avaliar os limites quando $x \to 7$ e $x \to 9$ – não se atentou ao fato de que $f(7)$ e $f(9)$ e não existem e afirmou que os limites assumiriam, respectivamente, tais valores. Mais uma vez, o sujeito não mencionou os limites laterais, porém, a parte da *imagem conceitual* que foi *evocada* foi suficiente para solucionar a questão.

Sobre as considerações do estudante sobre quando o limite existe, consideremos a figura 4:

P: Quando o limite não existe?
E1: Seria (pausa) se tu determinas um intervalo próximo de a e um intervalo próximo de $f(a)$*. (depois de algum tempo). Tá, o limite não existe se eu tomar um intervalo próximo de a, contendo a, eu pegar algum valor desse intervalo e a imagem não pertencer ao intervalo próximo de* $f(a)$*.*
P: Então o caso do intervalo em torno de a, a tem que estar definido nesse intervalo?
E1: tem que pertencer ao intervalo.

Figura 4 – Trecho 2: Entrevista sujeito E1 . Fonte: Messias (2013)

Observamos que E1 – em contraposição aos resultados do referencial teórico – considerou, ainda que de maneira intuitiva, os intervalos $(x - \delta, x + \delta)$ e $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, utilizando-os para conjecturar acerca da existência do limite. No entanto, acreditamos que o Domínio da função pode ser um fator de conflito para o sujeito, já que afirmou que o ponto *a* "tem que pertencer ao intervalo". Esse conflito pode gerar *evocações* equivocadas sobre a relação *limite x continuidade* (NAIR, 2010).

No que concerne aos resultados obtidos no TD2, evidenciamos que o estudante E2 apresentou dificuldades em relação ao limite envolvendo infinito, conforme apresentamos no trecho a seguir:

> *P: Então, eu gostaria que você observasse essas funções e me dissesse se o limite existe em cada uma delas. No caso de não existirem, eu gostaria que você me explicasse o por quê.*
> *(depois de um tempo)*
> *E2: Bem, no caso dessas que envolvem o infinito eu tenho um pouco de dificuldade (...). No caso, o terceiro vai dar* $\frac{\infty}{\infty}$.
> *(...)*
> *P: Então o limite existe?*
> *E2:* $\frac{\infty}{\infty}$ *(pensa um pouco). Eu acho que não existiria, porque isso é indeterminação e se tá tendendo ao infinito, é porque a função não vai chegar até lá no infinito, então se ela não chegar é porque o limite não vai existir.*

Figura 5 – Trecho 3: Entrevista sujeito E2 .

Fonte: Messias (2013)

Evidenciamos que E2 assumiu ter a dificuldade em se tratando do cálculo de limites envolvendo o infinito, fato que aproxima nossos resultados aos obtidos por Nair (2010). Além disso, o sujeito *evocou* durante a entrevista as seguintes *imagens conceituais*:

- No que se refere ao cálculo de limites, resultados do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, implicam na não existência do limite (NAIR, 2010);
- O limite - quando tende ao infinito - não existe devido o mesmo nunca conseguir chegar a lugar algum;

Ressaltamos que as *imagens conceituais evocadas* por E2 estão intimamente relacionadas com sua concepção de infinito, que neste caso, configurou-se como um *fator em conflito potencial* (VINNER, 1991).

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme mencionamos anteriormente, todas as considerações apontadas nesse artigo são fruto de um estudo maior que vem sendo realizado ao longo dos últimos anos sobre ensino e aprendizagem conceitual em Cálculo. Os resultados apresentados nos subsidiaram verificar as *imagens conceituais evocadas* por dois estudantes de um curso de Cálculo sobre a (não) existência do limite e as conexões (caso eles apresentassem) com descontinuidade e indeterminações. Nesse sentido, observamos que as *imagens conceituais* dos sujeitos pautaram-se, sobretudo, nas importantes *evocações* listadas a seguir:

[E1] Saltos implicam na não existência do limite em determinado ponto.

[E2] Quando o limite tende ao infinito, ele não existe.

[E3] Indeterminação implica na não existência do limite.

Evidenciamos – mediante as *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes – os elementos que compõem essas mobilizações, permitindo-nos conjecturar acerca da apreensão do conceito de limite e dos conflitos inerentes a esse processo.

Reiteramos que os resultados que vêm sendo obtidos em nossas investigações têm sido de grande relevância no sentido de nos permitir verificar alguns dos conflitos que permeiam as *imagens conceituais* dos estudantes em relação aos conceitos envolvidos nos cursos de Cálculo. Nesse sentido, nossas discussões estão subsidiando, atualmente, uma pesquisa de doutorado, na qual intencionamos desenvolver instruções de ensino que possam viabilizar a aprendizagem desses conceitos, permitindo uma aprendizagem efetiva dos mesmos, na tentativa de permitir aos estudantes a formação de *imagens conceituais* consistentes com as *definições conceituais formais*.

REFERÊNCIAS

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física (ED), 2010.

ÇETIN, I. **Students' understanding of limit concept:** an APOS perspective. 247f. Tese (Doutorado em Filosofia em Educação Computacional e Tecnologia Instrumental) - Middle East Technical University, Turquia, 2009.

DOMINGOS, A. Learning advanced mathematical concepts: the concept of limit. *In: proceedings of CERME 6,* 2009, p. 2266-2275.

MESSIAS, M. A. V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função**. 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MESSIAS, M.A.V.F; BRANDEMBERG, J.C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. **BOLEMA,** Rio Claro (SP), v. 29, p. 1224-1241, dezembro, 2015.

MESSIAS, M.A.V.F; COSTA, A.C. Limite de Função: Conceito Imagem x Conceito Definição. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Bahia. Educação Matemática, cultura e diversidade, 2010.

NAIR, G. S. **College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions**. 2010. 276f. Tese (Doutorado em Filosofia) – College of Education and Human Ecology, Ohio State University, 2010.

OLIMPIO, A.J. Primeiro ano num curso de matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de cálculo. **BOLEMA.** Rio Claro (SP), Ano 20, n.28, pp. 39 a 67, agosto, 2007.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 65 – 81.1991.

CAPÍTULO 20

APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE VETOR POR ESTUDANTES DE ENGENHARIA – ANÁLISE DE REGISTROS

Viviane Roncaglio
UNIJUÍ – GEEM roncaglioviviane@gmail.com
Cátia Maria Nehring
UNIJUÍ – DCEEng – PPGEC -GEEM catia@unijui.edu.br

RESUMO: Este artigo apresenta resultados da pesquisa desenvolvida no Mestrado da primeira autora, com orientação da segunda, que teve por objetivo analisar registros produzidos por estudantes de Engenharia em atividades de tratamento e conversão, considerando o conceito de vetor trabalhado em uma disciplina de GAV - Geometria Analítica e Vetores a partir da Teoria dos RRS[1]. A pesquisa foi realizada com uma turma de Engenharia sendo analisadas questões da primeira e última avaliação, a transcrição de questões propostas em monitoria e avaliações, o caderno de um estudante e listas de exercícios. Concluímos que os estudantes apresentam dificuldades em realizar conversões quando um dos registros envolvidos é o registro figural, há falta de entendimento em relação aos elementos de formação do vetor, falta de compreensão em relação ao sentido da operação e dificuldade em aplicar o conceito de vetor em situações que exigem a mobilização das propriedades operatórias.

PALAVRAS-CHAVE: Conceito de Vetor; Ensino em Engenharia; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Argumento de Estudantes.

1 I INTRODUÇÃO

Os currículos dos cursos de Engenharia apresentam disciplinas Matemáticas que exploram conceitos fundamentais necessários à formação do engenheiro. Um desses conceitos, trabalhado em praticamente todos os cursos de Engenharia, é o de vetor, estudado nos primeiros semestres do curso. Geralmente, este conceito é explorado nas disciplinas de GAV ou de Álgebra Linear. Em nossa pesquisa, (RONCAGLIO, 2015), o conceito de vetor foi trabalhado na disciplina de GAV, na qual foram considerados elementos fundamentais mediante a utilização da estrutura vetorial no tratamento de conceitos como, segmento de reta orientada, distâncias, ângulos, áreas, volume, equação da reta e equação do plano.

O conceito de vetor relaciona-se ao de grandeza quando esta considera a ideia de módulo, sentido e direção. Por essa razão, apresenta-se como fundamental para os engenheiros. Por exemplo, na Engenharia Civil, que entendam grandezas como força, torque e velocidade, ou seja, são grandezas vetoriais presentes no cotidiano da futura profissão. Ademais, cálculos envolvendo vetores são utilizados em situações como dimensionamento de vigas e treliças, elevadores, guindastes, carregamentos, reações de apoio, nas quais existem forças envolvidas. Na Engenharia Elétrica, o vetor é utilizado para determinar a existência de campo elétrico. Ao mover uma carga elétrica em um campo elétrico ela fica sujeita a diversas e diferentes intensidades de força elétrica. Já na Engenharia Mecânica, os conceitos básicos utilizados são espaço, tempo, massa e força que, sendo força uma grandeza vetorial, necessita, consequentemente, do conceito de vetor.

A maioria dos estudantes, desconhecem a importância de tal conceito para a sua formação, ou a sua aplicação em diferentes situações da sua futura profissão, e apresentam dificuldades em sua utilização, perspectiva reforçada em pesquisas como a de Castro (2001), Karrer (2006) e França (2007). Disciplinas de GAV e Álgebra Linear são apontadas como aquelas que contribuem para o alto índice de reprovação e desistência dos estudantes ao longo do curso de Engenharia. Apontam a dificuldade que os estudantes possuem em relação a essas disciplinas, mais especificamente em relação ao conceito de vetor. A pesquisa de Castro (2001), afirma que dentre as dificuldades encontradas pelos estudantes, a maior delas consiste justamente na atividade de conversão em que um dos registros envolvidos é o registro figural. Essa dificuldade é ainda maior quando tal registro é o de chegada. Esta dificuldade pode ser compreendida a partir dos elementos teóricos dos Registros de Representação Semiótica no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

A Teoria dos RRS[2], desenvolvida por Duval (2003), tem sido utilizada, principalmente, em pesquisas que visam à aquisição de conhecimentos matemáticos e à organização de situações de aprendizagem. O autor defende a ideia de que para o aluno aprender Matemática é preciso que ele tenha acesso a ela, e que saiba coordenar as diferentes representações provenientes de distintos registros. As Representações Semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (Duval, 1993 apud Damm, 2012, p. 176). Para o autor a comunicação em Matemática ocorre por meio de representações semióticas. Desse modo, é imprescindível que ao aprendê-la, os estudantes não confundam os objetos e suas respectivas representações, pois uma coisa é o objeto matemático, e outra é a sua representação. Por exemplo, os números, as funções, as retas etc, são os objetos matemáticos, sendo suas representações, as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, as tabelas (DUVAL, 2009, p. 14). As representações semióticas são fundamentais para que os sujeitos elaborem a construção do seu conhecimento, uma vez que elas possibilitam o desenvolvimento de funções cognitivas essenciais ao pensamento humano.

A Teoria dos RRS considera a mobilização de uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Neste sentido, Duval (2003, p. 14) enfatiza que "[...] a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação". A compreensão da grande variedade de registros de representação utilizados em Matemática determina o seu ensino e sua aprendizagem.

De acordo com Duval (2009), a aprendizagem de conceitos matemáticos constitui um campo de estudo privilegiado para análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas, e mesmo a compreensão de textos. Essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação que vão além da linguagem natural ou das imagens, ou seja: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que adquirem o *status* de linguagem, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Para analisar a atividade Matemática numa perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval (2003) afirma ser necessária uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações, consideradas fundamentais para esta análise: os tratamentos e as conversões de registros de representações semióticas. Por meio deles é possível analisar as atividades Matemáticas desenvolvidas pelos alunos em uma situação de ensino. Duval (2003, p. 16) define os tratamentos como sendo:

> [...] transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. [...] As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados; por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação a sua representação gráfica.

A compreensão em Matemática, portanto, implica na capacidade do sujeito mudar de RRS. A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível. Ou seja, "o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado" (DUVAL, 2003, p. 22). Passar de um registro a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é preciso também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A produção dessa escrita se baseou em Roncaglio (2015), tendo por centralidade nesta escrita foram os argumentos explicitados por estudantes de Engenharia, a partir de situações de ensino, considerando o conceito de vetor e suas operações, trabalhados na disciplina GAV. Buscou-se aprofundar o estudo em relação ao processo de aprendizagem do conceito de vetor, objetivando analisar os registros produzidos por estudantes de Engenharia em atividades de tratamento e conversão. Considerou-se, para tanto, o conceito de vetor e suas operações e a Teoria dos RRS de Duval (2003, 2009), na perspectiva da apreensão conceitual. A problemática da pesquisa foi delimitada a partir das seguintes questões: Considerando a análise de atividades de tratamento e conversão realizadas por estudantes de Engenharia, na disciplina de GAV, a partir da intervenção de uma professora, o que é possível identificarmos em termos de apreensão conceitual na argumentação dos estudantes em procedimentos utilizados no desenvolvimento de questões envolvendo o conceito de vetor? A partir destes argumentos é possível identificarmos lacunas ou sustentação para a apreensão do conceito?

Os procedimentos metodológicos utilizados são caracterizados como qualitativos e configuram-se como um estudo de caso, a partir da análise de registros de representação produzidos por um grupo de acadêmicos de cursos de Engenharia. O ambiente natural desta pesquisa são aulas da disciplina de GAV, ministradas por uma professora de Matemática, uma turma envolvendo os cursos de Engenharia Elétrica, Civil e Mecânica. Os instrumentos analisados nesta produção são: questões da primeira e última avaliação, a transcrição de questões propostas em monitoria, bem como, o caderno de um estudante e seis listas de exercícios.

Esta pesquisa traz elementos de uma sala de aula, sem a interferência da pesquisadora, ou seja, a aula não foi preparada para a pesquisa, ela foi pesquisada, considerando os registros produzidos pelos estudantes a partir do encaminhamento da professora responsável pela disciplina. O único elemento diferente, do que a professora realizada em outras turmas, foi a aplicação de um pré e pós-teste, mas que poderia ser considerado como um momento de avaliação diagnóstica da professora, e os encontros de monitoria, os quais são proporcionados pela instituição a partir da demanda do professor da turma.

Inicialmente o grupo era constituído por 65 estudantes, dos quais 19 realizaram o trancamento total da disciplina e 12 não compareceram a todas as aulas, restando 34 estudantes ao final do semestre. Este grupo de estudantes matriculados, (quarenta e seis) constituíram os sujeitos da pesquisa e, a partir da participação do pré-teste foram nomeados por E1, E2, E3, E4 até E46. Importante esclarecer que ao utilizar o E1, este indicará sempre o mesmo estudante, nos diferentes instrumentos de análise. A partir dos instrumentos e do referencial teórico, delimitamos os seguintes focos de análise: a conversão entre os registros envolvendo o registro figural; a geração do vetor; as operações com vetores; situações de aplicação de vetor.

2 I O CONCEITO DE VETOR E A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O estudo de vetores e suas operações é essencial para os cursos das Ciências Exatas, em especial para os de Engenharia, tem se mostrado um tema em que os estudantes de Engenharia apresentam muita dificuldade de compreensão, refletindo no desenvolvimento das operações que envolvem o vetor. Castro (2001, p. 12), apoiada em Duval (1995), destaca que, em Matemática,

> [...] as representações semióticas não são indispensáveis apenas para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da própria atividade matemática. De fato, a possibilidade de realizar tratamentos nos objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema semiótico de representação. [...] A utilização de representações semióticas parece primordial para a atividade matemática e parece ser intrínseca a ela.

Dada a natureza não real dos objetos matemáticos, os RRS possibilitam o acesso a esses objetos. Duval (2003) aponta para três tipos de registros de representação semiótica: o registro figural, o simbólico e o da língua natural, cujas representações apresentam dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado). Com base em Castro (2001) e Duval (2003), apresentam-se os registros de representação utilizados nesta pesquisa. A representação do vetor pode ser realizada de diferentes maneiras, isto é, no plano e no espaço, mas sempre por meio dos registros de representação semiótica.

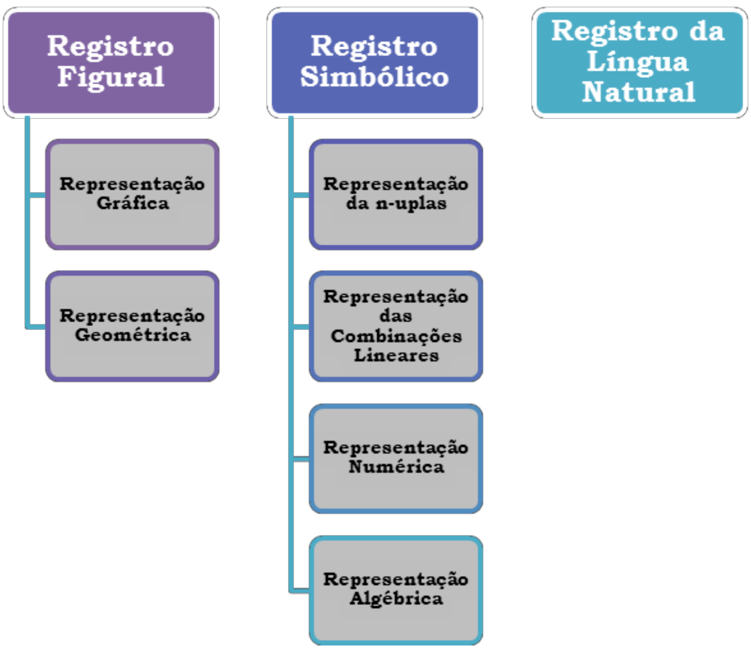


Gráfico 1 - Tipos de registros de representação do vetor.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 64.

O Registro de Representação Figural considera as representações gráficas cartesianas (ou no plano cartesiano) e a sua representação geométrica. O Registro de Representação Simbólica possui as seguintes representações: a Representação da n-uplas – expressa em forma de par ordenado e ternas; a Representação das Combinações Lineares – expressa a partir da adição entre os vetores unitários da base canônica; a Representação Algébrica – expressa em forma de expressão e/ou equação algébrica, ou ainda, em forma de identificação de um vetor, como por exemplo, ; e a Representação Numérica – expressa em forma de valores numéricos. O Registro da Língua Natural é utilizado para descrever situações matemáticas na forma de definição, argumentação, associações verbais ou enunciados. Este tipo de registro é encontrado em livros, tanto nas definições, na descrição da resolução de questões, em teoremas, propriedades de conceitos, como nos enunciados de questões – situações problema. Para além disso, o registro de representação da língua natural é o principal elemento utilizado pelo professor, na condução do ensino, questão tratada por outros membros do Grupo de Estudos em Educação Matemática – GEEM/Unijuí, sob orientação da segunda autora.

3 I DISCUSSÃO DOS DADOS

Com o intuito de responder a nossa problemática de pesquisa a partir dos instrumentos de dados e do referencial teórico, delimitamos os focos de análise: a conversão entre os registros envolvendo o registro figural; a geração do vetor; as operações com vetores e as situações de aplicação de vetor.

A conversão entre os registros envolvendo o registro figural

A partir das análises realizadas nas listas de exercícios propostos, identificou-se que: os exercícios propostos não privilegiam o registro figural. Dos cento e nove exercícios propostos nas listas, apenas sete deles envolvem atividades de conversão com o registro figural, número não significativo comparado a quantidade de exercícios que envolveram a conversão entre o registro da língua natural e o simbólico – cento e dois exercícios. Já considerando os registros produzidos pelos estudantes pode-se apontar que: os estudantes não conseguiram realizar de forma satisfatória a conversão do registro simbólico para o gráfico. Essa dificuldade apresentada pelos estudantes pode ter relação com o trabalho desenvolvido em sala de aula, no qual a ênfase privilegiava os registros da língua natural e o simbólico. De acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a compreensão apenas ocorre quando o estudante for capaz de mudar de registro. Os exercícios propostos nas listas exigiam do estudante, na maioria das vezes, a conversão entre os registros da língua natural e o simbólico, sendo que o registro figural foi exigido em apenas sete dos cento e nove propostos. Contudo, se o estudante possui dificuldade em realizar a conversão envolvendo o registro figural, isso significa que o mesmo não se apropriou do conceito. Deste modo,

> [...] as representações semióticas – ou, mais exatamente, a diversidade dos registros de representação – têm um papel central na compreensão. A compreensão requer a coordenação dos diferentes registros. Ora, uma tal coordenação não se opera espontaneamente e não é consequência de nenhuma "conceitualização" a-semiótica. A maioria dos alunos, ao longo de seu currículo, permanece aquém dessa compreensão. Daí as dificuldades recorrentes e as limitações bastante "estreitas" em suas capacidades de aprendizagem matemática. Os únicos acertos que lhes são possíveis se dão em monorregistros (registros monofuncionais), muitas vezes privados de "significado" e inutilizáveis fora do contexto de suas aprendizagens (DUVAL, 2003, p.29).

A teoria de Duval (2003) tem como pressuposto que a aprendizagem ocorre quando o estudante adquire a capacidade de mudar de registro e, além disso, consegue diferenciar um objeto de suas representações. Na atividade de conversão, é normal que o estudante encontre dificuldade, pois é nesse momento que ele precisa decidir qual e entre as representações, e escolher a que melhor se adapta a situação – em termos de tratamento – e, então, fazer a transformação para o registro requerido no enunciado da questão.

Geração do vetor

As análises realizadas a partir do caderno do estudante, E37, indicaram que: as anotações feitas pelo estudante do conceito de vetor é resumida. Não foi possível identificar uma anotação que apresente o vetor como uma grandeza, consequentemente não fez a distinção entre as grandezas escalares e vetoriais. A anotação do estudante não traz a noção de reta orientada, de segmento orientado, tampouco a ideia de equipolência é considerada. Essas relações são estruturantes para a compreensão conceitual do estudante.

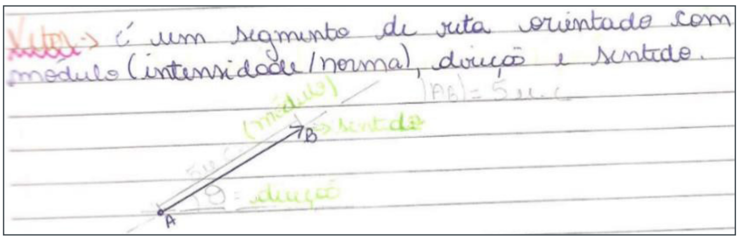


Figura 1 - Imagem do conceito de vetor registrado pelo E37.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 101.

A definição das características do vetor – módulo, sentido e direção não são registradas no caderno, de forma a explicitar seus significados. As análises em relação aos argumentos dos estudantes em procedimentos realizados nos exercícios propostos em avaliações e em monitoria apontaram: a falta de significado atribuído às características elementares de formação de um vetor. Os estudantes usam as palavras dos três elementos de formação de vetor: sentido, direção e módulo, entretanto, apresentam dificuldades em relação ao significado de cada um dos elementos, principalmente no sentido e na direção de um vetor, como podemos observar nos Quadros 1 e 2 a seguir.

Pesquisadora: *E que é o sentido de um vetor?*

E37: *Horizontal e vertical.*

Pesquisadora: *Não. Vamos olhar para o vetor que está representado aqui (*aponta para a representação na questão da prova*). Qual é o sentido deste vetor?*

E37: *Aluno pensando.*

Pesquisadora: *Se eu sair daqui da Universidade e for para o centro, onde está a "origem" e a "extremidade" nesta situação?*

E37: *A origem aqui na universidade e a extremidade o centro onde você quer ir.*

Pesquisadora: *Isso, muito bom. Então qual é o sentido?*

E37: *Da origem para a extremidade? Daí ficaria da universidade para o centro, é isso?*

Pesquisadora: *Isso, da origem para a extremidade.*

Quadro 1 - Argumentos do E37 em relação ao exercício 2 da última avaliação.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p.111.

Pesquisadora: *O que significa cada uma dessas características? O módulo?* **_E3:_** Estudante pensando... **_Pesquisadora:_** *O que é o módulo de um vetor?* **_E3:_** *Não é um ponto né?* **_Pesquisadora:_** *Não, vamos olhar para esse vetor que está representado aqui (*apontando para o vetor AB representado na questão*), qual é o módulo dele?* **_E3:_** Estudante pensando... **_Pesquisadora:_** *O vetor possui três características de formação, módulo, sentido e direção. Como você mesmo respondeu antes, mas o que são esses elementos? Vamos analisar este aqui (*apontando novamente para o vetor AB representado na questão*). O que ele possui? A origem aqui no ponto A. A extremidade aqui no ponto B...* **_E3:_** *Tá! Acho que sei. É o tamanho, é isso né?* **_Pesquisadora:_** *Isso, é o tamanho, o módulo de um vetor é o tamanho dele. E o sentido?* **_E3:_** *Deve ser o ponto B, aqui da flecha, é isso?* **_Pesquisadora:_** *Não, sentido não é isso, mas possui relação com a flecha, sim, o sentido de um vetor é dado pelo sentido da flecha, e é indicado da origem para a extremidade.* **_E3:_** *Eu me lembro disso, acho que fiz isso em algum exercício das listas.* **_Pesquisado:_** *E direção de um vetor, o que é?* **_E3:_** *Não sei, eu sei que o vetor tem três características, mas não sei o que é a direção.*

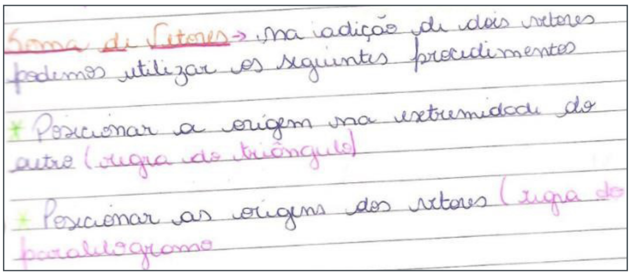
Quadro 2 - Argumentos do E3 em relação ao exercício 2 da última avaliação.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 113-114.

O estudante não conseguiu definir, de forma correta, por exemplo, o que é a direção de um vetor. As dificuldades apresentadas pelos estudantes podem ter relação com o conceito de vetor como um segmento de reta orientado com módulo, sentido e direção. Não apresenta, contudo, a definição desses elementos de formação, apenas os trazem indicados em uma representação geométrica do vetor.

Operações com vetores

As análises referentes a este foco, o qual marca as dificuldades dos estudantes de Engenharia em relação ao desenvolvimento de operações com vetores, de adição, multiplicação de um escalar por vetor, produto escalar, produto vetorial e produto misto, apontaram que: não houve utilização do registro figural na representação geométrica na adição de vetores, conforme observamos na Figura 2 a seguir.



Soma de Vetores → na adição de dois vetores podemos utilizar os seguintes procedimentos

* Posicionar a origem na extremidade do outro (regra do triângulo)
* Posicionar as origens dos vetores (regra do paralelogramo

Figura 2 - Imagem da definição da operação da adição de vetores registrada pelo E37.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 103.

As definições anotadas pelo estudante E37 são breves e não exploram o RRS figural, podendo desencadear dificuldade conceitual, pois não apresentam uma definição para a operação e não trazem a representação geométrica, fundamental para a sua compreensão. Considerando as análises realizadas nos procedimentos e argumentos dos estudantes, identificamos que: os estudantes não conseguiram identificar a operação de produto misto durante a argumentação, o que marca a falta de significado que esta operação representa ao estudante, tanto do produto misto quanto do produto vetorial. O Quadro 3 a seguir apresenta os argumentos em relação ao exercício 2 proposto em monitoria aos estudantes E3 e E12.

Pesquisadora: *Ok. Letra c, se o produto vetorial de u por v for o vetor nulo, então um dos vetores é nulo, ou os vetores são colineares, verdadeiro ou falso?*
E3*: Verdadeiro.*
E12: *Eu acho que é falso.*
Pesquisadora: *Por que E3? O que você acha que é verdadeiro?*
E3: Estudante pensando...
Pesquisadora: *E você E12. Porque você acha que é falso?*
E12: Estudante pensando...
Pesquisadora*: O que é produto vetorial gente? (*Estudante pensando*) O que o produto vetorial gera? (*Estudantes pensando*) O que significa esse resultado? (*Estudante pensando*) Gera um número ou um vetor?*
E3*:Como é mesmo o produto vetorial, é aquele que tem o i, j, k?*
E12: *Que faz o determinante?*
Pesquisadora: *Sim é aquele que utiliza o i, j e o k. O que ele gera?*
E3: *É um vetor ne?*
E12: *Acho que não, não é um número?*
E3: *Agora não sei mais, porque tem um que calcula o determinante e que da um número.*
Pesquisadora: *Gente o produto vetorial é desse formato aqui. (*pesquisadora escreve no quadro e coloca a forma geral do produto vetorial*).O que ele gera?*
E3: *Um vetor. Eu disse que gerava um vetor.*
Pesquisadora: *Gera um vetor. E o que esse vetor significa? (*Estudantes pensando*) Porque eu uso produto vetorial? Para calcular o que?*
E12*: Módulo.*
E3: Não.
Pesquisadora: *Para que então?*
E3 e E12*: (*Pensando*).*
Pesquisadora*: Para que eu calcule o produto vetorial?*
E3*: Para achar um vetor.*
Pesquisadora*: Sim eu vou encontrar um vetor. E qual a relação deste vetor com os vetores dados? O que vocês utilizariam para calcular? (*Estudantes pensando*) Quando eu uso produto vetorial?*
E3 e E12*: (*Pensando*).*
Pesquisadora: *O produto vetorial é utilizado para o cálculo da área de um paralelogramo, e para o que mais? (*Estudantes pensando*) Para encontrar um vetor simultaneamente ortogonal a u e v. O que isso significa então? Se eu pegar esse vetor resultante e fizer o produto interno com u ou v, esse produto da quanto?*
E12*: Zero.*
Pesquisadora*: Isso. Precisa dar zero. Então, voltando à letra c, esta é verdadeira ou falsa?*
E3: *Verdadeira.*

Quadro 3 - Argumentos do E3 e E12 em relação ao exercício 2 proposto em monitoria.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 116.

Na argumentação indicada no quadro 3 acima, os estudantes tiveram dificuldades em compreender o resultado do produto vetorial. A pesquisadora acabou, em muitos momentos, respondendo ao próprio questionamento realizado, pois os estudantes não apresentavam reação diante das questões levantadas. As dificuldades apresentadas pelos estudantes indicam que há falta de apreensão dos conceitos, assim como há falta de sentido nas argumentações realizadas. Isso pode estar diretamente relacionado com a forma como os conceitos e definições foram trabalhados em sala de aula e a não utilização de argumentos pelos estudantes no processo de ensino e aprendizagem.

Situações de aplicação de vetor

Este foco de análise se apresentou como uma fragilidade no processo de ensino e aprendizagem, nos exercícios propostos, tanto nas listas de exercícios como nas avaliações. Não foi possível identificar a proposição de aplicação do conceito de vetor em situações da Engenharia nos diferentes exercícios trabalhados em aula e nas provas. Os exercícios e problemas propostos são basicamente de situações matemáticas, não mudando o contexto, o que pode gerar a falta de sentido e sentidos para o estudo de vetor e a futura atuação profissional na engenharia.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para que o estudante compreenda o conceito, ele precisa diferenciar as grandezas escalares e vetoriais, de modo que os elementos que estruturam o vetor sejam trabalhados a partir do que efetivamente os estudantes já conhecem. Os dados da pesquisa indicam que, afirmar para o estudante o que é módulo, sentido e direção, não garante mobilizar este entendimento. De modo geral, pode-se afirmar que, apesar da importância do entendimento do conceito de vetor, assim como de suas operações pelos estudantes de Engenharia, grande parte dos estudantes que cursaram a disciplina não consegue significar os elementos de formação do vetor. Além disso, considerando os exercícios propostos nos instrumentos analisados, poucos deles exploraram o registro figural, revelando um enorme nível de dificuldade. Como analisado nas argumentações, ao se depararem com o registro figural, alguns abandonam o desenvolvimento do exercício. Considerando os resultados obtidos por meio desta pesquisa, acredita-se que o presente estudo possa abrir caminho para outras propostas, como, por exemplo, para o desenvolvimento de uma sequência de ensino que explore de forma mais efetiva o registro figural, utilizando, talvez, um software gráfico, como o Geogebra, bem como, priorizar situações de aplicação na Engenharia. Para as aplicações o trabalho com metodologias ativas, problematização, modelagem, situações baseada em problemas, poderia ser uma estratégia de ensino.

REFERÊNCIAS

CASTRO, Samira Choukri de. **Os Vetores do Plano e do Espaço e os Registros de Representação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2001.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias

Alcântara. **Educação Matemática: Uma (nova) Introdução.** 3. ed. – São Paulo: EDUC, 2012.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registro Semiótico e Aprendizagens Intelectuais.** Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.** Campinas – São Paulo: Papirus, 2003.

FRANÇA, Michele Viana Debus de. **Conceitos Fundamentais de Álgebra Linear: Uma Abordagem Integrando Geometria Dinâmica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2007.

KARRER, Monica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: Um Estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2006.

RONCAGLIO, Viviane. **Registros de Representação Semiótica – Atividades de Conversão e Tratamento em Vetores e suas Operações a partir da Argumentação de Estudantes de Engenharia.** Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – 2015.

CAPÍTULO 21

AS CONTRIBUIÇÕES DA VISUALIZAÇÃO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES DERIVADAS EM CÁLCULO I

José Cirqueira Martins Júnior
Universidade do Estado da Bahia – UNEB.
Barreiras – BA.

Frederico da Silva Reis
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP.
Ouro Preto – MG.

RESUMO: Este artigo aborda o ensino e a aprendizagem na disciplina de Cálculo I, em relação aos aspectos proporcionados pela visualização. Propomos investigar algumas contribuições de atividades exploratórias que envolveram gráficos de funções Derivadas com professores que utilizaram o *software* GeoGebra. A pesquisa foi Qualitativa que procurou compreender a visão que tais professores tiveram dessas atividades, as formas utilizadas para a coleta dos dados foram os registros de gravações em áudio, das atividades exploratórias e questionários. Nesse contexto, eles fizeram uma experimentação relacionando as atividades com as principais definições que foram sugeridas pelo livro didático utilizado como suporte para a sua elaboração. O estudo aponta que o *software* GeoGebra contribui para que o professor reflita sobre a sua prática pedagógica quando faz uso das demonstrações e exemplos com gráficos de funções Derivadas, oportunizando aos alunos uma melhor interação e aprofundamento dos principais conceitos que envolvem os gráficos de funções Derivadas.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino e Aprendizagem em Cálculo I. Derivadas. Atividades Exploratórias. Visualização. *Software* GeoGebra.

ABSTRACT: This article board the teaching and learning in discipline of Calculus I, about relation to the aspects provided by visualization. We propose to investigate some contributions of exploratory activities that involved graphs of Derived functions with teachers who used GeoGebra *software*. The research was Qualitative that sought to understand the vision that such teachers had of these activities, the forms used to collect the data were records of audio recordings, exploratory activities and questionnaires. In this context, they did an experimentation relating the activities to the main definitions that were suggested by the didactic book used as support for their elaboration. The study points out that GeoGebra *software* contributes to the teacher's reflection on his pedagogical practice when he uses the demonstrations and examples with graphs of Derivative functions, giving the students a better interaction and deepening of the main concepts that involve the graphs of Derivative functions.

KEYWORDS: Teaching and learning in Calculus I. Derived. Exploratory Activities. Visualization.

GeoGebra *Software*.

1 I INTRODUÇÃO

A pesquisa em Cálculo I tem se tornado crescente no âmbito da Educação Matemática no Ensino Superior. O ensino de Cálculo apresenta dificuldades epistemológicas (SAD, 1998; REZENDE, 2003) e problemas como: a falta de conhecimentos prévios de Matemática por parte de muitos alunos, altos índices de reprovação, turmas muito cheias (MARTINS JÚNIOR, 2015; REZENDE, 2003), entre outros, que ainda merecem atenção de pesquisas para serem melhor compreendidos.

Apesar de existir uma tensão devido ao rigor no trabalho feito com essa disciplina (REIS, 2009), acreditamos que a sala de aula pode ser modificada por aquilo que o professor faz, associando, dessa maneira, o uso da tecnologia computacional ao ensino e, assim, apresentar um diferencial para a sua forma de trabalho e para a aprendizagem dos alunos.

Apresentamos atividades exploratórias que utilizam a visualização como aspecto teórico principal utilizado em sua realização (ARCAVI, 2003; MARTINS JÚNIOR, 2015; TALL, 1991), sendo elas um componente indispensável para a concretização desse trabalho.

Essas atividades foram elaboradas e adaptadas com base em outras atividades contidas no livro didático de Flemming e Gonçalves (2006). Optamos por escolher este livro pelo fato de ser utilizado em muitos cursos superiores brasileiros e, também, por ser adotado como referência de trabalho para muitos professores em outros países.

Neste trabalho, utilizamos a pesquisa Qualitativa em que os dados foram coletados a partir dos registros das atividades realizadas, questionários e pela gravação, em áudio, do diálogo entre os professores e, tal diálogo, serviu como registro para verificar se as atividades ofereciam contribuições no ensino e na aprendizagem com gráficos de funções Derivadas pela percepção desses professores de Cálculo I.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O uso das tecnologias computacionais tem proporcionado muitas oportunidades para se observar e experimentar o que está acontecendo com muitos conteúdos que são trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a possibilidade de visualização e a múltipla representação dessas informações são exemplos disso. Nesse artigo, descrevemos uma pesquisa que ocorreu a partir de representações gráficas de funções Derivadas com professores da disciplina de Cálculo I ou disciplinas semelhantes.

Nesta pesquisa, iremos tratar da visualização que é proporcionada pelo uso do computador. O processo de visualização tem sido muito utilizado para realizar pesquisas, em especial no âmbito da Educação Matemática, possuindo elementos que são necessários aos processos de ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos em todos os níveis.

Mesmo sendo importante nos processos de ensino e na aprendizagem, a visualização ainda representa um assunto secundário em relação a muitos aspectos da Matemática, como por exemplo, os processos algébricos e geométricos, mas a sua utilização tem se tornado uma oportunidade para o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática (ARCAVI, 2003; COSTA, 2002; PRESMEG, 2006; TALL, 1991; VILLARREAL, 1999).

Observando algumas definições gerais sobre a visualização elencamos, inicialmente, a que aparece no dicionário Aurélio (FERREIRA, 2004, p. 2069) em que a "visualização é o ato ou efeito de visualizar; transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis; processo de visualizar". Os conceitos abstratos ou mentalmente visíveis estão ligados aos aspectos cognitivos, ou seja, à mente humana e, também, ao que acontece durante a formação das imagens realizadas pelos mais diferentes indivíduos. Desse modo, não temos como desatrelar a visualização de algo relacionado à cognição pelo fato de possuir aspectos direcionados aos estudos de Psicologia e, em especial, aos processos de ensino e aprendizagem. Com isso, Presmeg (2006, p. 206, tradução nossa) afirma que "assim, a visualização inclui processos de construção e transformação, tanto imagem visual mental e todas as inscrições de natureza espacial, que podem ser implicadas no fazer Matemática". Notamos que, no fazer Matemática, a visualização está diretamente vinculada a esses processos e ao que pode acontecer no cérebro humano e, bem como, à construção de imagens que podem ser formadas durante a aprendizagem de conteúdos ligados a essa disciplina, sendo isso o que se justifica para usá-la.

Também como complementação a essas ideias, apresentamos a definição dada por Arcavi (2003) para quem:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

Nessa definição, notamos uma abrangência de aplicação da visualização e de como ela pode beneficiar o ensino e a aprendizagem. Também aparecem elementos que são característicos para um melhor desenvolvimento dos processos mentais e de como essas ideias podem se tornar aliadas para a compreensão de conteúdos matemáticos.

Quando tais imagens, oriundas de uma percepção ou abstração, são formadas no cérebro, elas começam a tomar forma na mente humana. Presmeg (2006) esclarece sobre a imagem visual e ainda caracteriza a pessoa que pode utilizá-la, da seguinte forma: "[...] uma *imagem visual* é tida como uma construção mental que representa a informação visual ou espacial, e um *visualizador* é uma pessoa que prefere usar métodos visuais quando existe essa opção" (PRESMEG, 2006, p. 207, tradução nossa, grifo da autora).

Enfatizamos que a visualização está relacionada com o ato de ver e está diretamente ligada ao pensamento e a função cerebral. Mesmo que muitos professores não valorizem a visualização como uma oportunidade de aprendizagem para os alunos, é inegável que ela contribui para isso. Porém, essas oportunidades variam de acordo com as propostas que podem ser feitas para os alunos e quais pensamentos eles podem mobilizar. No uso da cognição, trabalhando com processos mentais, os professores e alunos desenvolvem o pensamento matemático e, dentro desse componente, temos o pensamento visual-espacial, definido por Costa (2002, p. 263) como "o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objectos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas".

Dessa forma, ao usar o pensamento visual é possível fazer operações intelectuais sobre o material perceptivo-sensorial e de memória, relacionando-as com a manipulação e transformação de ideias e, bem como, na tradução e comunicação dos métodos e conceitos que são utilizados para a exploração desse pensamento.

3 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a obtenção dos dados, a metodologia utilizada foi a da pesquisa Qualitativa, que tem sido um eixo norteador de trabalhos dentro da Educação e, consequentemente, em Educação Matemática (BORBA; ARAÚJO, 2012; FIORENTINI; LORENZATO, 2012; LÜDKE; ANDRÉ, 2015).

Neste trabalho os dados foram coletados a partir das atividades realizadas, questionários e pela gravação, em áudio, do diálogo entre os professores e, tal diálogo, serviu como registros para verificar se as atividades oferecem contribuições no ensino e aprendizagem com gráficos de funções Derivadas pela percepção destes professores de Cálculo I.

As atividades exploratórias foram indispensáveis para a coleta dos dados, bem como, foi um fator decisivo para uma melhor realização dessas propostas. Desse modo, relatamos que Martins Júnior (2015) as representa como um:

> Conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem. (MARTINS

JÚNIOR, 2015, p. 58-59).

Essas atividades exploratórias auxiliaram, conjuntamente com o dinamismo que o *software* GeoGebra proporciona, na exploração de conteúdos com gráficos de funções Derivadas de uma função e variável real.

4 I DESCRIÇÃO E DISCUSSÃO A PARTIR DA PRODUÇÃO DA ATIVIDADE EXPLORATÓRIA

A realização dessa atividade exploratória ocorreu no laboratório de Educação Matemática na UFOP num período de 14:00 às 15:30h. Para a sua realização tínhamos um computador com o *software* GeoGebra instalado e um gravador em áudio para capturar o diálogo que ocorreu entre os professores. A Dupla A recebeu todos os materiais necessários para fazer algum rascunho ou cálculos de algum item da questão como folhas de papel em branco, lápis, caneta e borracha.

A pesquisa foi desenvolvida com 04 professores de Cálculo I, todos com nível de Mestrado e com experiência nessa disciplina. Optamos por dividi-los em duplas. A primeira dupla de professores passou a ser chamada de Dupla A, pois realizaram a primeira atividade, sendo formada por um professor que tinha mais tempo de experiência em sala de aula com o outro que tinha menos tempo e, em seguida, a Dupla B que recebeu a segunda atividade. Trouxemos neste artigo a resolução de 01 dessas atividades exploratórias que foi extraída do livro de Flemming e Gonçalves (2006) e depois adaptada para a participação da Dupla A, que é a única dupla que faremos algumas descrições e análises e, para maiores detalhes das outras atividades desenvolvidas consultar Martins Júnior (2015). Os principais conteúdos das funções Derivadas nessas atividades envolveram domínio, imagem, raízes, pontos críticos, extremos, crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas.

Os critérios utilizados para a escolha dos professores que participaram de nossa pesquisa foram: trabalhar com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; possuir Mestrado na área de Matemática Pura ou de Educação Matemática; ser professor em uma Instituição de Ensino Superior Pública ou Privada; e disponibilizar-se a participar da pesquisa no Laboratório de Educação Matemática da UFOP para realização das atividades exploratórias.

Eles escolheram quem ficava manuseando o *software* GeoGebra e quem ficava com os rascunhos e, com isso, facilitou a dinâmica da pesquisa. Desse modo, a atividade usada nesse experimento está disposta a seguir, bem como, alguns de seus gráficos construídos e diálogos durante o experimento. Os diálogos aparecem em ordem crescente como em D_1 que representa o primeiro diálogo que achamos interessante analisar e, para os outros, também obedecem a essa mesma sequência.

MODELO DA ATIVIDADE EXPLORATÓRIA 1A

Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o **domínio** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a **imagem** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as **raízes** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os **pontos críticos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de **extremos** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de **crescimento e decrescimento** da função:

Sugestão:

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a **concavidade** da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de **pontos de inflexão** da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os **limites no infinito** da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de **assíntotas**:

Sugestão:

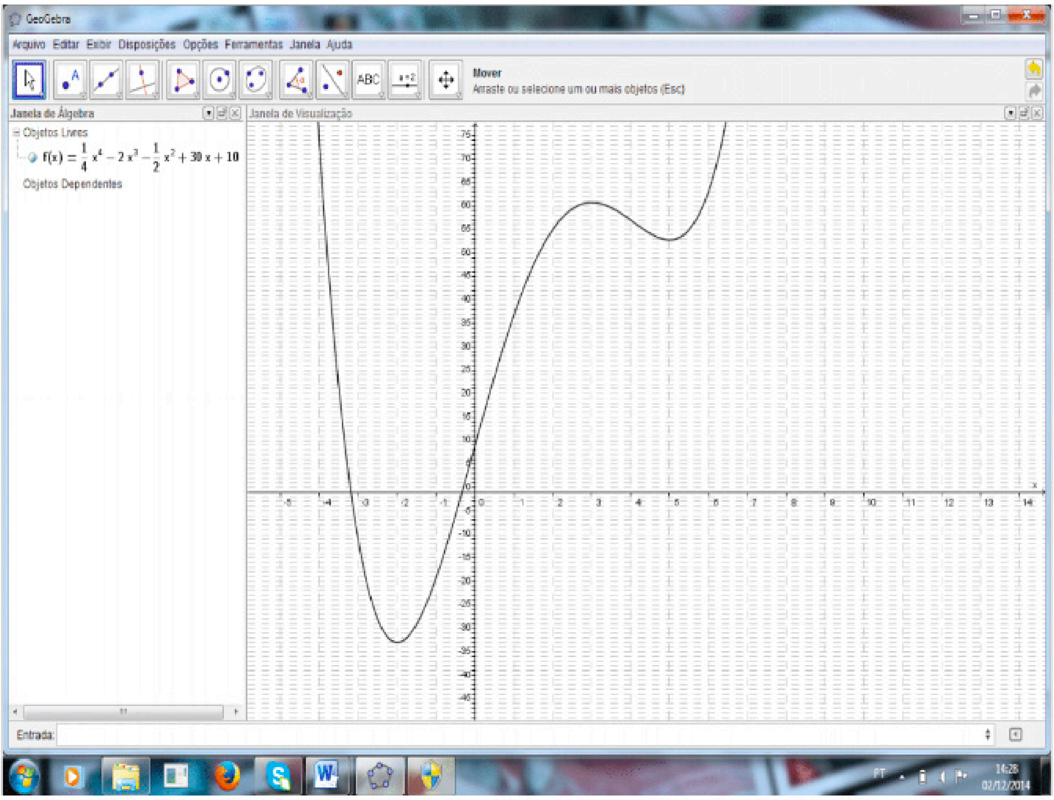
a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

Após uma breve leitura da atividade, os professores plotaram a função polinomial no *software* GeoGebra e acabou na representação gráfica, conforme a figura 1. Os professores foram resolvendo as questões no *software* GeoGebra e no rascunho e, na medida do possível, tentavam se aproximar do contexto da sala de aula para produzir um parecer a respeito da contribuição dessas atividades para as demonstrações com gráficos de funções Derivadas. Trouxemos um dos diálogos que ocorreram durante a solução de alguns itens das questões, que estão numerados de forma sequencial. Na solução do item 1, que pediu o domínio da função:

> Notamos que existe uma tendência dos alunos para olharem o gráfico nas proximidades de sua origem e esquecem que existem infinitos pontos que podem ser percorridos pela função para tentar verificar se tem algum problema e, talvez devido aos exemplos construídos em anos anteriores onde os professores ao construírem o gráfico de uma função mais simples no quadro trabalhavam as informações mais próximas de sua origem ou simplesmente, como é polinomial então $x \in \mathbb{R}$ e isso ainda acontece até hoje, assim, temos como ver um pouco que $x \in \mathbb{R}$ e, desse modo, o *software* está ajudando a dar uma melhor dinâmica para saber o que está acontecendo com a função no decorrer das mudanças dos valores de x. Você concorda, colega? Sim, o *software* GeoGebra está dando uma melhorada nisso aí. Entretanto, iremos passear até quando para saber que o domínio são os reais? Podemos perder muito tempo só com esse item da questão e nesse momento é necessário fazer menção do algébrico que também é muito importante. Perguntamos aos alunos: vocês conseguiram ver o domínio completo da função? Então, é por isso que vamos usar a Álgebra para completar o nosso entendimento. (D_1 da Dupla A).

Figura 1. Gráfico de $f(x)$ na atividade 1A.



FONTE: MARTINS JÚNIOR (2015, p. 68).

Percebemos, nesse diálogo, uma dificuldade que muitos alunos ainda trazem de anos anteriores no estudo do domínio de funções, que a localização destas, geralmente, está próxima da origem do sistema cartesiano. Desse modo, o *software* GeoGebra está gerando uma possibilidade de ampliação do que ocorreu com o domínio da função polinomial e o motivo dele pertencer aos reais.

O *software* usado é bastante dinâmico e, caso o professor que o manuseie, não tome cuidado com o tempo de exploração dos itens das questões que são propostas, pode perder tempo durante o processo de ensino e dificultar a aprendizagem dos alunos. Como sugestão, eles mencionam que é indispensável o uso do aspecto algébrico, que é uma característica bastante usada por professores durante as aulas de Cálculo I; o que completa o uso do *software* GeoGebra é justamente a visualização que ele permite associada ao aspecto algébrico desenvolvido pelos professores, seja na sala de aula ou no laboratório de Educação Matemática.

Prosseguindo agora para o item 4 da atividade que solicitava a análise dos pontos críticos da função, os professores apagaram o ponto B da resposta anterior e construíram a reta tangente, fixando nela o ponto A e exploraram a função, subindo ou descendo, tentando perceber o que acontecia ao deslocá-la. Fizeram isso no *software* e dava para ver que existiam três pontos críticos; a respeito do que aconteceu, afirmaram:

> Conseguimos ver quando a reta tangente está em cima dos pontos críticos, ela fica

praticamente horizontal ao eixo x e é essa a definição que usamos para mostrar aos alunos que existem os pontos críticos, sendo eles máximos ou mínimos, podendo ainda ser locais ou absolutos. Ao verificar a posição quando a reta fica em cima deles, temos os seguintes pontos encontrados: temos um ponto de mínimo que é absoluto e está localizado em $(-2, -32)$, depois um máximo relativo em $(3;\ 61{,}75)$ e, por último, um mínimo relativo em $(5; 53{,}75)$. Desse modo, conseguimos verificar algebricamente quando derivamos a função e igualamos a zero, ou seja, $f'(x) = 0$. Isso fica interessante quando podemos fazer uma conexão daquilo que o GeoGebra mostra com aquilo que pode ser construído na sala de aula com os alunos: as definições e a visão que o *software* proporciona que são os dois aspectos que precisam ser levados em consideração e associados na hora de se utilizar algum *software* de Matemática nas aulas de Cálculo. (D_3 da Dupla A).

Existe a definição da inclinação da reta tangente que é usada pelos professores na determinação dos pontos críticos de uma função, quando ela permanece totalmente horizontal no eixo das abscissas, então, fornece um valor que pode ser um valor de mínimo ou de máximo em uma função. Notamos neste diálogo, que os professores pelas suas experiências, relataram que a utilização do *software* GeoGebra daria para fazer a comprovação das definições que são usadas nas fases de demonstração do conteúdo ou a parte teórica. Ele funciona como um recurso que apoia o processo de ensino para os professores e ajuda os alunos na aprendizagem, proporcionando uma melhor compreensão do que representam esses valores encontrados, que são confrontados com a parte algébrica que é utilizada pelos professores durante a solução de questões como essas com seus alunos.

Após a realização das questões dessa atividade, finalizamos pedindo aos professores que dessem o seu parecer em relação às possíveis contribuições, eles mencionaram que:

> Para mim, contribuem sim. Elas permitem ver o que está acontecendo com a função, conseguimos ver o seu deslocamento ou o movimento do ponto, da reta e das derivadas encontradas, os motivos para compreender o que representa aquele ponto de máximo ou de mínimo, onde a função muda a sua concavidade, o porquê da função ir para o infinito, podendo entender os motivos de aproximação das assíntotas e nunca tocá-las e essa é a oportunidade de justificar as definições já realizadas e tudo em tempo real, em que a mídia tradicional seria difícil para se trabalhar nas aulas de Cálculo I. Já para mim, a principal contribuição é justamente a facilidade para se trabalhar esses conteúdos que, para os alunos iniciantes ou repetentes são difíceis, as coisas são mais dinâmicas e, mesmo se errar ou coisa parecida, dá para você rever as definições e colocar outros exemplos mais simples ou complexos, tentando associá-los à intuição que os alunos precisam ter para aprender. Podemos aproveitar aquilo que os alunos estão enxergando para inserir as definições e os exemplos. Essas atividades favorecem a aprendizagem, mas antes disso o professor precisa trabalhar as definições e as demonstrações que também são necessárias e suficientes. (D_8 da Dupla A).

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Olhando para os nossos dados coletados, percebemos evidências que se tornaram possíveis de estabelecer conexões que relacionam aspectos que envolvem a visualização no ensino e na aprendizagem de gráficos com funções Derivadas. As impressões dos professores foram válidas pelo fato de terem contato com os alunos e, ao estabelecer a conexão entre o ensino e a aprendizagem, extraímos os seus relatos para encontrar as possíveis contribuições.

Entre algumas dessas contribuições encontramos que essas atividades: auxiliam no processo de demonstrações das principais definições que são usadas para os gráficos com funções Derivadas; agiliza o trabalho do professor na exploração da intuição e da visualização que é proporcionado pelo *software* GeoGebra, oferecendo aos alunos um melhor entendimento para os conteúdos que estão sendo demonstrados; facilita a confrontação do aspecto algébrico com o aspecto visual, para trazer um momento oportuno de usá-los tanto no ensino do professor como na aprendizagem para os alunos; dinamiza o desenvolvimento das aulas e proporciona ao professor trabalhar as demonstrações com mais facilidades relacionando os aspectos abstratos com os que podem ser mais concretos para a aprendizagem dos alunos.

Chamamos a atenção para a possibilidade de "verificação visual" do *software* que nos remete a aspectos da imagem visual, retomando algumas ideias de Arcavi (2003), que conseguiu relacionar tais aspectos aos processos algébricos e, estes por sua vez, estão intrínsecos na relação dos conteúdos de Cálculo I. Este autor conseguiu permear a possibilidade de visualização usando representações algébricas ou algorítmicas, sendo que essa relação é bastante importante no ensino para completar o entendimento e proporcionar uma compreensão necessária para a formação e a construção de alguns conceitos matemáticos. Nesse sentido, ele aponta que a "visualização pode acompanhar um desenvolvimento simbólico, desde que uma imagem visual, mostre o seu valor concreto [...]" (ARCAVI, 2003, p. 220, tradução nossa).

Enfatizamos que a visualização depende de uma experiência anterior e se aprimora conforme as etapas vão sendo construídas, isto contribui tanto para professores como para os alunos alcançarem um nível cognitivo mais avançado. Aqui, faz necessário entrar em cena o professor que conecta as informações visuais e as algébricas, para mostrar aos alunos como a utilização de atividades exploratórias pode ser usada para oferecer subsídios que se tornam indispensáveis no processo de ensino para a aprendizagem de definições de gráficos com funções Derivadas.

Acreditamos que a sala de aula pode ser modificada por aquilo que o professor faz, podendo tornar um diferencial para a sua forma de trabalho e para a aprendizagem de seus alunos.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 215-241, 2003.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 23-29.

COSTA, M. C. M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. **Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. PONTE, J. P. (Org.). Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 257-274, 2002.

FERREIRA, A. B. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 3. ed. 2. impres. Curitiba: Positivo, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: EPU, 2015.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: BOERO, P.; GUTIÉRREZ, A. (Orgs.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**. Roterdã: Sense Publishers, p. 205-235, 2006.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009, p. 81-97.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo: São Paulo, 2003.

SAD, L. A. **Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1998.

TALL, D. Intuition e rigor: the role of visualization in the Calculus. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs.). **Visualization in teaching and learning Mathematics**. Washington: Mathematical Association of America, p. 105-119, 1991.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1999.

CAPÍTULO 22

UNIDADE DE ENSINO POTENCIALMENTE SIGNIFICATIVA NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Rafaela Regina Fabro

Esse artigo apresenta uma proposta de pesquisa elaborada durante o Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, com o objetivo de construir uma dinâmica para a aprendizagem significativa de Geometria Analítica. Com a mesma, buscamos relacionar a geometria e a álgebra, através de diferentes atividades, visando à construção de conceitos que sejam significativos para o estudante. A proposta possui embasamento teórico em Ausubel (2003), Dewey (1959) e Moreira (2011b) que sugerem que o estudante deve ser o condutor de sua aprendizagem, capaz de desenvolver o próprio conhecimento e tendo o educador como um mediador do processo. A proposta trabalhará com um Material Potencialmente Significativo pré-elaborado pela docente, a fim de conduzir o processo de construção do conhecimento, com atividades que envolvam utilização de softwares matemáticos, localizações através do GPS e uso de materiais manipulativos. Pretendemos investigar as possíveis contribuições significativas na utilização destes recursos, procurando também avaliar possibilidades, desafios e limitações na sua utilização.

PALAVRAS-CHAVE: Aprendizagem Significativa; Geometria Analítica; Recursos tecnológicos; Unidade de ensino potencialmente significativa.

INTRODUÇÃO

Não é mais necessário realizar um estudo aprofundado para saber que o uso de tecnologias está cada vez mais presente no nosso dia a dia, seja em pequenos afazeres em casa, no estudo ou no trabalho. De fato, a integração de novas mídias como computador e Internet pode ser uma aliada, também na sala de aula, pois poderá contribuir para a criação de novas estratégias de ensino e aprendizagem. Desta forma, o estudante deve ser estimulado a construir o próprio conhecimento, sendo ele, incentivado pelo professor, com os recursos necessários, partindo da sua realidade e buscando dar significado à sua aprendizagem. A proposta aqui descrita vem ao encontro das ideias de Ausubel (2003) e sua Teoria de Aprendizagem Significativa, que defende que a aprendizagem além de ser baseada no interesse, pode ser realizada por descoberta:

> [...] por outro lado, na aprendizagem pela descoberta, o aprendiz deve, em primeiro lugar, descobrir este conteúdo, criando proposições que representem soluções para os problemas suscitados, ou passos

> sucessivos para a resolução dos mesmos. Ausubel (2003, p.5)

Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, Moreira (2011b) propôs uma sequência didática, denominada Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), composta por etapas durante as quais o estudante é levado a construir o próprio conhecimento. Recomenda que este material seja elaborado e organizado de forma a prender a atenção dos estudantes, através de situações reais, de forma que os mesmos sintam-se desafiados a avançar as etapas construindo a sua aprendizagem.

Com base nessas ideias de construção da aprendizagem, buscamos uma proposta para o ensino de Geometria Analítica, conforme sugerida nos PCNS:

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométrica via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas [...] (BRASIL, 2006. p.77).

Acreditamos que a falta destas conexões no ensino da Geometria Analítica, não só no contexto da matemática, mas também no contexto do cotidiano do estudante, seja um dos principais motivos da aprendizagem deficiente da Geometria Analítica.

Diante disso, buscamos construir cinco UEPS que contemplem a construção do Plano Cartesiano e seus pontos, o estudo da reta, o estudo da circunferência com a utilização de softwares matemáticos numa abordagem que contempla resolução algébrica, intepretação geométrica, resolução de problemas e materiais manipulativos. Esperamos que, com isso, além das tecnologias digitais e partindo de situações práticas o aluno seja levado a construir a sua aprendizagem.

REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico desta pesquisa está aqui apresentado com base em três autores. Primeiramente, em relação à aprendizagem baseada no interesse do estudante, estamos de acordo com John Dewey (1959) que defende a ideia da aprendizagem ativa, com base na qual, o indivíduo só aprende o que lhe interessa e a construção de bons materiais pode influenciar nessa aprendizagem.

Dewey (1959) afirma que ninguém chega à escola como uma lousa limpa na qual os professores podem escrever as lições, o que vem ao encontro das ideias de Ausubel (2003) quanto à importância dos conhecimentos prévios na aprendizagem. Daí a necessidade de considerarmos o que aprenderam nossos estudantes, ao invés de supormos que em algum momento alguém os ensinou. Sendo assim:

> O único meio de fazer com que os alunos aprendam mais é ensinar, verdadeiramente,

> mais e melhor. Aprender é próprio do aluno: só ele aprende, e por si; portanto, a iniciativa lhe cabe. O professor é um guia, um diretor; pilota a embarcação, mas a energia propulsora deve partir dos que aprendem. Quanto mais conhecer o professor as experiências passadas dos estudantes, suas esperanças, desejos, principais interesses, melhor compreenderá as forças em ação que lhe cabe dirigir e utilizar, para formar hábitos de reflexão (DEWEY, 1959, p. 43-44).

Outra relação entre esses autores está ancorada na ideia de Dewey (WESTBROOK, 2010, p.18) de que a aprendizagem só poderá gerar interesse se apresentada de forma que os estudantes sejam desafiados a resolver situações problemas que exijam conhecimentos teóricos e práticos na esfera científica, histórica e artística, Ausubel (2003) por sua vez, afirma que aprendemos a partir do que já sabemos e aprendemos se queremos.

Sendo assim, a questão que motivou a realização desta pesquisa, pode ser expressa nos seguintes termos: "o que pode despertar o interesse do estudante para as atividades de sala de aula e relacionar essa aprendizagem com situações reais do seu cotidiano? " Seguindo em direção a esse interesse, surgiu então, a utilização do GPS como recurso tecnológico nas aulas de matemática, buscando integrar esse fascínio pela tecnologia com o conteúdo de Geometria Analítica. Nas palavras de Hermínio e Borba:

> Quando um aluno decide investigar certo tema, inicialmente pensando em satisfazer o professor e acaba percebendo que tem muito prazer e interesse em estudar aquele assunto, voltando a sua atenção totalmente para o trabalho e não mais para o professor. (HERMINIO, BORBA apud QUARTIERI, 2011, p.87).

Sendo assim, buscamos, ao longo da pesquisa, que o estudante seja estimulado a construir seu conhecimento, motivando-o com alternativas presentes no seu dia a dia, e que muitas vezes são deixadas de lado por nós, professores. Assim, cada vez mais, faz-se necessária essa ligação entre o interesse dos estudantes e a aprendizagem. Ao elaborarmos essa proposta, temos a consciência da importância do pensamento e do papel do interesse na execução das atividades.

Outra teoria que constitui nosso referencial teórico baseia-se na construção do conhecimento, fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel (2003). Este autor defende a importância da aprendizagem significativa para a construção do conhecimento e apoia a construção de materiais potencialmente significativos para a aprendizagem.

É em um contexto de mudança que surge a Teoria da Aprendizagem Significativa pensada por Ausubel (2003), que prega a valorização dos conhecimentos prévios dos educandos, pois, segundo ele, cada estudante carrega consigo uma bagagem de conhecimento que não deve ser deixada de lado. Com relação aos conhecimentos prévios, Moreira (1999), baseado nas ideias de Ausubel, afirma:

> O fator isolado que mais influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe (cabe ao professor identificar isso e ensinar de acordo). Novas ideias e informações

> podem ser aprendidas e repetidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos. (MOREIRA, 1999, p.152)

Ainda, com relação à aprendizagem significativa, duas condições para a sua ocorrência são destacadas por Ausubel. A primeira condição refere-se ao material a ser aprendido, que deve estar relacionado à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. Ou seja, para que a aprendizagem significativa ocorra é importante que o aprendiz tenha os subsunçores adequados disponíveis em sua estrutura cognitiva.

A outra condição é que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar de maneira adequada ao novo material, potencialmente significativo a sua estrutura cognitiva. Com efeito, segundo Ausubel, não importa o quão potencialmente significativo seja o material a ser aprendido, se a intenção do aprendiz for simplesmente a de memorizá-lo; nesse caso, tanto o processo de aprendizagem como o seu produto serão mecânicos (ou automáticos).

Podemos então, inferir que independente de quão disposto para aprender estiver o indivíduo, nem o processo nem o produto da aprendizagem serão significativos, se o material não for potencialmente significativo.

A pergunta chave da teoria de Ausubel (2003) faz parte de um questionamento como professora sobre como facilitar a aquisição de conhecimentos pelos estudantes, com significado, em situações de ensino. Para Valadares:

> O papel do educador deverá ser o de facilitador, mediador e orientador na evolução cognitiva e do desenvolvimento global que vai ocorrendo no educando, proporcionando-lhe experiências de aprendizagem que revelem a necessidade de modificar e fazer evoluir os seus significados, bem como o de construir novos significados acerca do que está envolvido nessas experiências. (2009, p.33)

Assim sendo, apresentamos a proposição didática de elaboração de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas de Moreira (2011a) como uma possibilidade que requer a construção de materiais potencialmente significativos, materiais estes, que devem primeiramente fazer sentido ao estudante (auxiliar na compreensão do conteúdo) além de serem bem organizados e possuir um desencadeamento lógico.

Moreira (2011b), que é seguidor das ideias de Ausubel, infere que o material, se bem elaborado, deve levar em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes. Somente dessa forma ele será relacionável à estrutura cognitiva do sujeito que aprende e, assim, possibilitará a construção de significados por parte do mesmo.

A aquisição de novos conhecimentos envolve principalmente a apresentação de materiais potencialmente significativos para o aprendiz. Para que um material seja considerado potencialmente significativo, deve satisfazer duas condições. Segundo Ausubel:

> (1) que o próprio material de aprendizagem possa estar relacionado de forma não arbitrária (plausível, sensível e não aleatória) e não literal com qualquer estrutura cognitiva apropriada e relevante (i.e., que possui significado 'lógico') e (2) que a estrutura cognitiva particular do aprendiz contenha ideias ancoradas relevantes, com as quais se possa relacionar o novo material. (2003, p.01)

Sendo assim, um dos objetivos das UPES é a construção de materiais que contribuam para um aprendizado de maior qualidade, que se distancie do aprendizado mecânico.

Podemos definir uma unidade de ensino potencialmente significativa como uma sequência fundamentada teoricamente, voltada para a aprendizagem significativa. Segundo Moreira (2011), "são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula".

Uma UEPS objetiva a apresentação de conteúdos, seguindo uma série de etapas. Para a sua elaboração são propostas oito as etapas, por Moreira (2011b). São elas:

1. *Definição do tema*
2. *Investigação de conhecimento*
3. *Situação problema introdutório*
4. *Diferenciação progressiva*
5. *Complexidade*
6. *Reconciliação Integrativa*
7. *Avaliação da aprendizagem na UEPS*
8. *Avaliação da própria UEPS*

E importante salientar a que busca de evidências de aprendizagem significativa por meio das unidades de ensino deve ocorrer ao longo de sua implementação e não somente na avaliação somativa, pois a aprendizagem significativa é progressiva. A aprendizagem significativa consiste em proporcionar ao estudante, condições para que ele pense e compreenda o conteúdo que está sendo ministrado; sendo assim, se o professor busca promover a aprendizagem, deve também organizar o planejamento da aula levando em conta a elaboração de situações de aprendizagem que instiguem o estudante a vivenciar a busca, a exercitar as possibilidades de resposta e principalmente a desenvolver seu pensamento.

Uma das principais finalidades da UEPS está fundamentada no fato de ser uma sequência didática que busca a ocorrência da aprendizagem significativa, utilizando-se de distintas estratégias de ensino com a participação ativa do estudante.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Tomando as UEPS como uma ação educativa que não pode ser um sinônimo de transferência do conhecimento e sim uma ação ativa e permanente no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, esta pesquisa se enquadra numa abordagem do tipo qualitativa. Segundo Gerhardt e Silveira (2009 p.31), “não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização”, ou seja, buscamos um aprofundamento e uma qualificação no processo de ensino e aprendizagem de forma significativa no conteúdo de Geometria Analítica, não importando apenas dados numéricos.

Quanto à sua natureza, esta pesquisa será do tipo aplicada, a qual, conforme Gerhardt e Silveira (2009 p.35), “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática, dirigidos à solução de problemas específicos. ” E, quanto a seus objetivos, trata-se de uma pesquisa exploratória, pois se baseia em uma pesquisa de campo, da qual se realizou a coleta de dados de um determinado grupo de alunos com respaldo em fundamentação teórica realizada através de pesquisa bibliográfica.

Com relação aos procedimentos técnicos, essa pesquisa é considerada como uma pesquisa participante. A pesquisa participante, segundo Gerhardt e Silveira (2009 p.40), “caracteriza-se pelo envolvimento e identificação do pesquisador com as pessoas investigadas”, neste caso os estudantes. Ainda se utiliza a observação como técnica para identificar problemas e leva-se em consideração que pesquisadores e participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo o na pesquisa.

Este projeto será desenvolvido em etapas que buscam ser aprimoradas à medida que forem realizadas. Num momento inicial construímos uma proposta didática, baseada em unidades de ensino potencialmente significativas. Elaboramos pequenos “manuais” na disciplina de Tópicos de Geometria do mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Estes manuais foram aplicados aos colegas da disciplina que juntamente com as professoras sugeriam algumas melhorias para a aplicação.

As UEPS propostas foram programadas de acordo com o tema a ser abordado. Sendo assim, apresentamos, na Tabela 1, os temas definidos para cada uma das mesmas.

	UEPS 1 – PLANO CARTESIANO	UEPS 2 – ESTUDO DO PONTO	UEPS 3 – ESTUDO DA RETA	UEPS 4 – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA	UEPS 5 – UTILIZAÇÃO DE SOFTWARES MATEMÁTICOS
PASSO 1 – DEFINIÇÃO DO TEMA	História da Geometria Analítica; Plano Cartesiano: identificação de eixos Ortogonais no plano (abscissas e ordenadas); Identificar pares ordenados no Plano Cartesiano bem como os seus respectivos quadrantes; Problemas envolvendo situações práticas;	Estudo do ponto; Distância entre dois Pontos; Ponto Médio; Baricentro; Mediana; Condição de Alinhamento de três pontos.	Estudo da Reta Coeficiente Angular e Linear; Equação Reduzida da Reta; Equação geral da reta; Pertinência de um ponto a reta; Posições relativas de duas retas no plano; Ângulo formado entre duas retas; Ponto de intersecção entre duas retas; Distância do ponto a reta; Área de um triângulo;	Equação da Circunferência Circunferência – raio e diâmetro; Equação reduzida da circunferência Equação geral da circunferência Posições relativas entre ponto e circunferência Problemas envolvendo situações práticas;	Geometria Analítica; Coeficiente Angular e Linear; Equação Reduzida da Reta; Equação geral da reta; Pertinência de um ponto a reta; Posições relativas de duas retas no plano; Ângulo formado entre duas retas; Ponto de intersecção entre duas retas; Distância do ponto a reta; Área de um triângulo; Intervalos de variação.

Quadro 1– Definição dos temas das UEPS

Fonte: Elaboração da autora (2017)

Num segundo momento, foi realizado um projeto piloto, no mês de maio de 2017, com uma sequência didática em Geometria Analítica somente para o estudo da Equação da Circunferência (UEPS 4), relacionando o conteúdo com a prática da utilização do GPS. Esta atividade foi realizada com uma turma de 3º ano de Ensino Médio, com 15 estudantes, numa escola pública de Ensino Médio do município de Farroupilha e demandou oito períodos de aula para a sua execução. A análise desse projeto serviu para aperfeiçoar a construção da UEPS. Durante essa aplicação, a coleta de dados ocorreu por meio da observação e avaliação das atividades realizadas pelos estudantes. Também foi utilizado um diário (caderno) no qual foram registradas algumas informações, como a data das atividades, as técnicas utilizadas para atingir os objetivos propostos, algumas falas importantes dos estudantes, os passos do método desenvolvido, além de aspectos positivos ou a serem melhorados nas estratégias utilizadas. Cabe destacar que, nas avaliações dos estudantes, tivemos o cuidado de ser imparcial e reforçar o caráter qualitativo dos desempenhos, ou seja, analisamos o percurso e não apenas os resultados das avaliações.

Figura 1 – Estudantes desenvolvendo a atividade de triangularização proposta na UEPS 4.
Fonte: Acervo da Autora (2017)

Posteriormente, como etapa principal da pesquisa, a aplicação da proposta em outra turma de 3º ano de Ensino Médio, com 30 estudantes, será feita numa escola pública de Ensino Médio do município de Farroupilha, da qual a pesquisadora é a professora titular de matemática. Essa proposta se desenvolverá de março a maio de 2018, com duração aproximada de 3 meses. Semanalmente a escola tem 4 períodos de Matemática de 57 minutos.

Serão elaborados pequenos "manuais" na forma de conversa com o estudante, a fim de que tenha condições de ler e, sem intervenção da professora-pesquisadora, procure construir o próprio conhecimento. Nesses "manuais" já estarão disponíveis exercícios e atividades que servirão como um diagnóstico de como "anda" a aprendizagem do mesmo.

O estudo está sendo organizado de forma a contemplar todo o conteúdo de Geometria Analítica, dividido em cinco módulos, buscando sempre relacionar o conteúdo com situações práticas do dia a dia, de forma que o estudante identifique aplicações do mesmo. Para tais atividades pretendemos utilizar variadas práticas metodológicas e diferentes recursos (manual, software, dentre outros), buscando um maior interesse dos estudantes pela aprendizagem.

Cada manual contém os objetivos de aprendizagem, as atividades elaboradas com o propósito de que sejam potencialmente significativas e relacionadas a atividades práticas, a fim de promover a participação, com colaboração, respeito e consideração às ideias de outros para o desenvolvimento da autonomia.

RESULTADOS

Ao construir uma sequência didática para a aprendizagem significativa de

Geometria Analítica, tínhamos como propósito investigar se os estudantes seriam receptivos a uma nova metodologia de aprendizagem, reagindo de forma positiva, e se as atividades poderiam ser consideradas potencialmente significativas envolvendo os estudantes e promovendo construção de conhecimentos.

Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel será realizado um questionário inicial a fim de verificarmos conhecimentos prévios dos estudantes. A análise desses resultados servirá de subsídio para a construção dos manuais.

Para a coleta de dados serão utilizados os tais manuais, pois nos mesmos constam exercícios de aprendizagem que podem ser verificados, um diário de campo (caderno) com anotações diárias das observações realizadas e fotografias das atividades.

Ainda, a análise dos processos de aprendizagem é realizada na sequência das tarefas que foram desenvolvidas, incluindo os materiais produzidos pelos estudantes, como avaliações, questionários, auto avaliações, gravações, entre outros.

Primeiramente, através de um questionário verificaremos os conhecimentos prévios dos estudantes, categorizando-os em três grupos: os que possuem o conhecimento necessário, os que parcialmente possuem e os que não possuem. Essa categorização é fundamental, pois, segundo Moraes "além de reunir elementos semelhantes, também implica nomear e definir as categorias, cada vez com maior precisão, na medida em que vão sendo construídas", o que nos auxiliará na análise dos resultados e na construção das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas, com base nos mesmos.

Para investigar o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes utilizando a UEPS será necessário observar parâmetros importantes visando à identificação da evolução cognitiva dos estudantes. Para isso, a coleta dos dados será utilizada numa abordagem qualitativa e nos seguintes momentos: análise prévia, atividades na UEPS e análise final.

No quadro abaixo apresentamos, de maneira sucinta, o método de coleta dos dados a ser utilizado e como os mesmos serão registrados.

Método de coleta de dados	*Forma de registro dos dados*
Análise prévia;	✓ Questionário inicial para análise do conhecimento prévio dos estudantes; ✓ Análise do questionário dos conhecimentos prévios dos estudantes;
Atividades na UEPS	✓ Participação e envolvimento dos estudantes nas atividades; ✓ Observações e anotações realizadas pela professora pesquisadora; ✓ Registro das respostas dos estudantes às atividades contidas na UEPS;
Análise final	✓ Teste final (avaliação somativa) para análise da evolução conceitual; ✓ Análise da avaliação da UEPS pelos estudantes;

Quadro 2 – Método e forma de coleta de dados

Fonte: a autora (2017)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos resultados obtidos a partir da elaboração da proposta com os colegas e do projeto piloto já aplicado, referido anteriormente, pode-se afirmar que o uso de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas aplicada no estudo Geometria Analítica com a utilização de materiais manipulativos, softwares matemáticos e o uso do GPS como recurso para demostrar a aplicação do mesmo auxiliaram na compreensão dos conceitos envolvidos.

A aplicação da proposta mostrou-se desafiadora, pois embora os estudantes hoje em dia almejem por aulas diferenciadas os mesmos mostram-se num primeiro momento receosos em buscar por si só a construção de conceitos a partir do material disponibilizado e de questionamentos sem a intervenção da professora.

Portanto, com este trabalho buscamos aperfeiçoar a estratégia de aprendizagem construída, contando com a contribuição de outros educadores que visam promover a aprendizagem significativa em sala de aula e buscam um ensino contextualizado e distante da simples memorização. Somente através de estudos, realização de experiências e respectivas análises, conseguiremos tornar nossas aulas mais atraentes e prazerosas, para que num futuro breve, tenhamos uma educação matemática de mais qualidade em nosso país.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa.** Moraes, SP, 1982.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.** Lisboa: Plátano, v. 1, 2003.

BRASIL-MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática**.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

DEWEY, J. **Como pensamos: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo (uma reexposição).** 4. Ed. Tradução de Haydée Camargo Campos. São Paulo: Nacional, 1959.

GERHARDT, T. E. e SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa.** Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: UFRGS, 2009.

MOREIRA, M. A., MASINI SALZANO, E. F. **Aprendizagem significativa: a Teoria de David Ausubel.** Centauro. SP, 2011.

MOREIRA, M. A. **Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas** – UEPS. Aprendizagem Significativa em Revista. Porto Alegre. V. 1, n. 2, p. 43-63, 2011a. Disponível em < http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf>. Acessado em 23 de maio de 2017.

VALADARES, J.A. e MOREIRA, M.A. (2009). **A teoria da aprendizagem significativa. Sua fundamentação e implementação***.* Coimbra: Almedina.

WESTBROOK, R. B; TEIXEIRA, A., (org.). **Jonh Dewey** – Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Massangana, 2010.

SOBRE A ORGANIZADORA

Annaly Schewtschik - Mestre em Educação, Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e em Neuropsicopedagogia, Licenciada em Matemática e em Pedagogia, Professora do Ensino Fundamental e do Ensino Superior em Curso de Pedagogia e Pós-Graduação em Educação e em Educação Matemática. Atuante na área da Educação há 24 anos. Atualmente trabalha com Consultoria e Assessoria em Educação, Avaliação e Formação de Professores por sua empresa Ensinas e é Assessora Pedagógica da Rede Municipal de Educação de Ponta Grossa – Pr.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-122-0
9 788572 471220