



CAPÍTULO 1

MÉTODO DE ENSINO DE PROJETOS DE MECANISMOS COM O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

Luciano Zart Olanyk
UTFPR, Campus Curitiba, PR, Brasil

INTRODUÇÃO

A engenharia mecânica contribuí profundamente para a transformação da sociedade através do uso de ferramentas computacionais. Desde os primórdios dos computadores até as complexas simulações atuais, a tecnologia impulsiona a inovação e a eficiência na área. A não muito tempo, projetos mecânicos eram realizados de forma manual, dependente de pranchetas com um grande volume de papel e protótipos físicos e caros. Atualmente, o uso de ferramentas computacionais é uma realidade, acessível para engenheiros, projetistas e alunos de graduação. A revolução iniciou com a introdução do CAD (Computer-Aided Design), inicialmente com sistemas CAD 2D. Com o avanço do CAD 3D, a capacidade de visualização de modelos tridimensionais, tornou possível o projeto de peças e montagens complexas de máquinas. Desde então, diversos softwares permitem criar protótipos virtuais, identificar interferências e otimizar os projetos antes mesmo de qualquer fabricação física. Isso não apenas reduz os custos e o tempo de desenvolvimento, mas libera a criatividade do praticante, para se dedicar em design e soluções inovadoras em favor da sociedade. A evolução não parou no projeto mecânico. A necessidade de prever o comportamento mecânico de componentes, sob diferentes condições operacionais, levou ao desenvolvimento das ferramentas de CAE (Computer-Aided Engineering). Integradas ou complementares aos sistemas CAD, as ferramentas CAE permitem que engenheiros realizem análises complexas, como as de movimento ou análise cinemática. Neste tipo de análise, é possível determinar os esforços da interação entre componentes, como as forças de contato entre as peças. Com isto, estas análises fornecem dados para o dimensionamento dos componentes com o uso de softwares de Análise de Elementos Finitos (AEF). Paralelo às ferramentas de CAD e CAE, os softwares de cálculo numérico permitem a validação de resultados

obtidos pelas ferramentas de CAE. Software como o Matlab fornecem a base para a validação matemática dos resultados obtidos através das ferramentas de CAE. Este texto apresenta uma metodologia de solução de um exemplo clássico encontrado em livros de engenharia mecânica utilizando o software Solidworks como ferramenta CAD/CAE e o Matlab para validação matemática.

APLICAÇÃO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS EM SALA DE AULA

O uso das ferramentas computacionais no ambiente de sala de aula tem se mostrado útil para acelerar o aprendizado e a experiência de criar novas soluções. A aplicação de programas de CAD/CAE e de cálculo numérico em disciplinas baseadas em teorias repletas de equações complexas, permite ao aluno de engenharia, uma análise mais voltada para a realidade. Ao mesmo tempo, aproxima a teoria com a realidade, mesmo que virtualmente, e captura o interesse do aluno pois torna a disciplina mais atrativa. Isto é um diferencial em uma sociedade em que o desinteresse de jovens pela engenharia é cada vez mais evidente. Este texto apresenta um exemplo de aplicação dessas ferramentas na disciplina de mecanismos. Observou-se que após cinco anos de uso da metodologia, o interesse dos alunos pela disciplina aumentou e proporcionou o desenvolvimento de projetos mais reais.

MECANISMOS

Os mecanismos são dispositivos criados para realizar movimentos específicos de forma isolada ou em conjunto com outros componentes. Este assunto está no domínio do estudo de corpos rígidos. A cinemática, ou o estudo da geometria do movimento, não se preocupa com as causas que o geram - como forças ou torques - mas apenas com os deslocamentos dos componentes. Este estudo muitas vezes é denominado de cinetostática ou dinâmica inversa pois inicia a partir do movimento desejado. O uso da hipótese de corpos rígidos, permite a aplicação da análise vetorial. O estudo deste tema é fundamental para engenheiros e projetistas pois, como os mecanismos compõem as máquinas, garantem a exata execução das tarefas previamente definidas em projeto de equipamentos. Existe uma grande opção de mecanismos e muitos ainda a serem descobertos, contudo neste texto, será explorado o mecanismo de quatro barras. Isto não impede de aplicar o método apresentado a outros tipos de mecanismos como por exemplo, biela manivela e came seguidores.

O projeto de mecanismos de barras possui duas etapas bem distintas, a síntese e a análise cinemática. Na síntese são usadas técnicas específicas para a determinação do comprimento dos elos que formam o mecanismo e na análise, são verificadas as condições de funcionamento, como posições, velocidades e acelerações. Com estes resultados, é possível determinar os esforços que atuam nas conexões dos elos e usar estes valores para dimensionar os elos.

Mecanismo quatro barras – terminologias e premissas

A versatilidade dos mecanismos de quatro barras permite aplicações nas mais diferentes circunstâncias de um projeto mecânico. Desde movimentos simples, como janelas e portões basculantes até operações mais complexas como próteses biônicas de membros. O mecanismo de barras é composto por elos rígidos unidos por juntas, que podem ter de diferentes formas. Neste texto vamos explorar apenas a junta de revolução no plano com um grau de liberdade. Frequentemente utilizado em projetos mecânicos, o leitor deve estar habituado com mecanismos de barras pois frequentemente se depara com exemplo de sua aplicação, desde alicates de pressão, suspensão de automóveis que compõem um automóvel ou braços robóticos (Figuras 1).



1.a

1.b

1.c

Figuras 1 – Exemplos de mecanismo quatro barras (1.a) alicate de pressão, (1.b) suspensão duplo A utilizado em automóveis e (1.c) braço robótico.

A aplicação da hipótese de corpos rígidos permite utilizar a teoria vetorial para solução matemática. Nestes casos, os elos são representados por vetores em um diagrama cinemático (Figura 2), sendo os elos nomeados por \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , \mathbf{R}_4 e \mathbf{R}_1 e os comprimentos (módulos dos vetores) dados pelas variáveis a , b , c e d , respectivamente. Observa-se que as juntas de revolução são representadas por variações dos ângulos θ_2 , θ_3 e θ_4 . O ângulo θ_1 não aparece na figura pois, como está relacionado ao elo terra, seu valor é nulo e não varia. Os vetores representam os elos denominados como \mathbf{R}_1 - elo terra (fixo ou elo de referência), \mathbf{R}_2 - elo de entrada, \mathbf{R}_3 - elo acoplador e \mathbf{R}_4 - elo de saída. O elo 2 geralmente é denominado de elo de entrada, porque é acionado por um motor ou um atuador.

As posições das juntas são localizadas pelas letras A , B , O_2 e O_4 . Assim, podemos afirmar que, tanto os elos \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_4 realizam apenas de movimento de rotação em torno de O_2 e O_4 e o elo \mathbf{R}_3 realiza um movimento complexo (rotação e translação simultaneamente). Através desta configuração, os ângulos θ_2 , θ_3 e θ_4 são utilizados como variáveis para determinar a posição instantânea dos vetores \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 e consequentemente, dos pontos A e B .

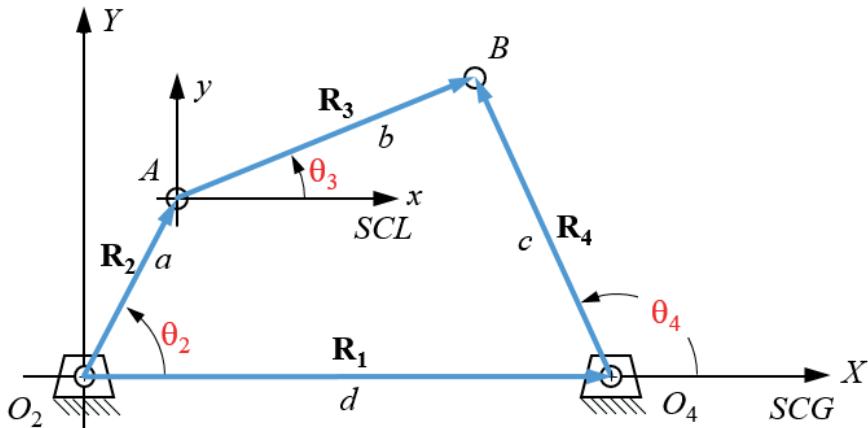


Figura 2 – Diagrama vetorial utilizado para a análise cinemática de um mecanismo quatro barras.

O processo de análise só pode ser realizado após a síntese, quando se determina o comprimento dos elos. A partir da definição do comprimento dos vetores, é possível realizar os cálculos para as possíveis posições dos pontos A e B , em função da variação do ângulo θ_2 . Neste exemplo, será inserido uma velocidade de rotação constante ω_2 no elo 2, que resulta em acelerações em pontos pertencentes aos vetores R_3 e R_4 , inclusive os pontos A e B . Tais acelerações são utilizadas para o cálculo de esforços que atuam nas juntas O_2 , O_4 , A e B .

Análise cinemática

A determinação das posições, velocidade e acelerações que o mecanismo pode alcançar são obtidas por métodos de análise cinemática. Existem dois métodos, o gráfico que utiliza técnicas de geometria descritiva e o analítico, que usa ferramentas de álgebra linear. A Figura 3 exibe o método gráfico apenas para a análise de posições (também é possível utilizar o método gráfico para análise de velocidades e aceleração). Obtén-se os resultados através da interseção das duas circunferências, com centros em A e θ_4 e raios R_3 e R_4 . Esta interseção indica as posições instantâneas dos pontos B e B' . A partir da determinação destes pontos é possível traçar duas posições, que os elos R_3 e R_4 podem assumir, para um determinado valor de θ_2 . Observe que os valores dos ângulos são medidos em relação à horizontal.

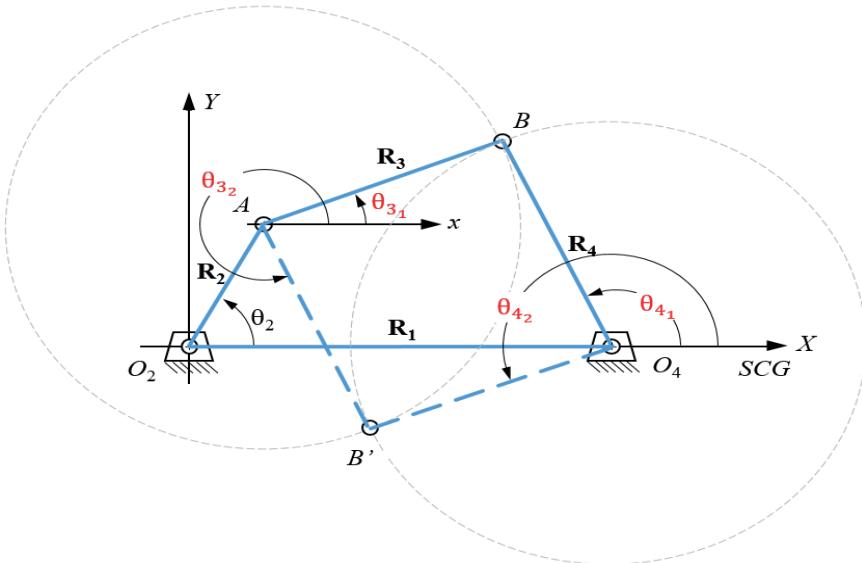


Figura 3 – Análise gráfica de posições para um mecanismo quatro barras.

Tais valores representam as duas possíveis configurações de montagem do mecanismo quatro barras. É importante notar que, ao alterar o valor de θ_2 , novos valores de θ_3 e θ_4 são obtidos. Para se conhecer a variação das posições dos pontos A e B, deveríamos repetir este desenho. Por exemplo, para uma boa precisão, seria interessante avaliar θ_2 variando de grau em grau, de 0° até 360° . Este processo seria insano, pois para cada nova posição de θ_2 , um novo desenho precisaria ser realizado.

Análise de posição utilizando simulador CAE

Uma alternativa é utilizar o recurso de análise de movimentos do software Solidworks, que permite não apenas obter as posições, mas as velocidades, acelerações além das forças que atuam nas juntas dos mecanismos. Neste texto, é demonstrado os resultados obtidos por este recurso. Antes de iniciar a simulação no Solidworks, é necessário desenhar o mecanismo a partir dos dados obtidos na etapa da síntese. Como o objetivo deste texto é apenas ilustrar os resultados da análise cinemática, os elos serão modelados a partir de um exemplo clássico, encontrados em livros textos de projeto de máquinas (Figura 4).

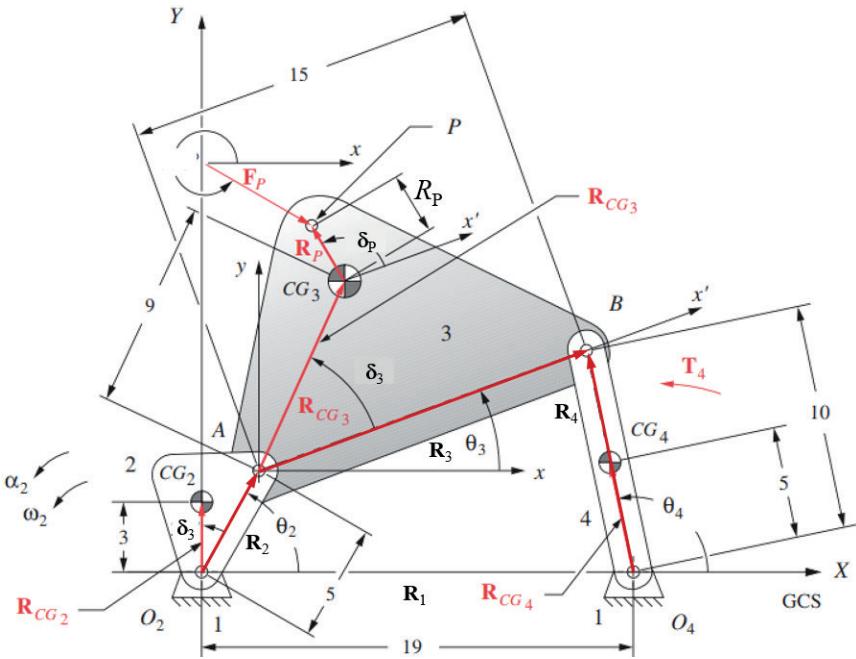


Figura 4 – Exemplo do mecanismo quatro barras (Adaptado de Norton, 2024).

Assim como na Figura 2, observe que os elos são dados pelos vetores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 , com valores de a , b , c e d dados por 5 in, 15 in, 10 in e 19 in respectivamente. Os vetores \mathbf{R}_{CG2} , \mathbf{R}_{CG3} e \mathbf{R}_{CG4} localizam os centros de gravidade de cada elo. É possível observar que o $RCG4$ é colinear a \mathbf{R}_4 porque é um elo simétrico. Já os vetores \mathbf{R}_{CG2} e \mathbf{R}_{CG3} são medidos em relação aos vetores \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 através dos ângulos δ_2 e δ_3 . Se o elo 4 fosse assimétrico, utilizariamos um ângulo δ_4 . Os ângulos θ_2 e θ_4 são medidos a partir dos vetores \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_4 em um sistema de coordenada global (SCG) com origem em O_2 . Por outro lado, o ângulo θ_3 é medido a partir de um sistema de coordenadas local não rotacional (SCLNR). O SCLNR tem origem no ponto A e, apesar de acompanhar o movimento do ponto A , mantém-se paralelo à horizontal, por isso o termo “não rotacional”. Além de ser utilizado para determinar o ângulo θ_3 , o SCLNR também é utilizado para localizar o ponto de aplicação de forças externas. Neste exemplo, o vetor \mathbf{R}_p e o ângulo δ_p localiza o ponto de aplicação da força externa \mathbf{F}_p . Todos estes valores numéricos são resumidos na Tabela 1.

	Elo 2	Elo 3	Elo 4
Comprimento [in]	5	15	10
Peso do elo [lb]	1,5	7,7	5,8
Momento de inércia I_G [lb.in.s ²]	0,4	1,5	0,8
Velocidade angular - ω [rad/s]	1,047	?	?
Aceleração angular - α [rad/s ²]	0	?	?
Forças externas F_p [lb]	0	80	0
Ângulo das forças externas F_p [°]	0	330	0
Vetores R_p [in]	0	3	0
Ângulo dos vetores R_p [°]	0	100	0
Forças externas F_p [lb]	0	80	0
Ângulo das forças externas F_p [°]	n.a.	0	120
Torques externos T [lb.in]	n.a.	0	120

Tabela 1 – Características do mecanismo e dos elos mostrados na Figura 4.

Os valores de momento de inércia são obtidos a partir da geometria dos elos e para o peso, atribui-se uma espessura e densidade de um determinado material. Neste caso utilizou-se aço carbono. O mecanismo é acionado inserindo-se um motor rotativo na junta O_2 , com velocidade angular constante ω_2 de 1,047 rad/s (10 RPM). Além disso, no elo 3, atua uma força externa de 80 lb na direção de 330° com a horizontal e no elo 4, um torque externo de 120 lb.in. A montagem do modelo no Solidworks é exibida na Figura 5. O modelo encontra-se na posição inicial, quando $\theta_2 = 0$. A direção da força externa F_p de 80 lb atua no elo 3 e foi definida por uma cunha desenhada no elo terra. Além disso, atribuiu-se no elo 4, um torque externo T_4 de 120 lb.in. Uma vez definido, é possível executar o estudo da análise de movimentos e extrair as forças resultantes nas juntas e torque T_2 necessário para que o motor, que atua no elo 2, execute o movimento. O torque T_2 representa o torque do motor atribuído ao elo 2, necessário para a execução do movimento considerando as massas, momentos de inércia, forças externas e torques externos atribuídos ao estudo.

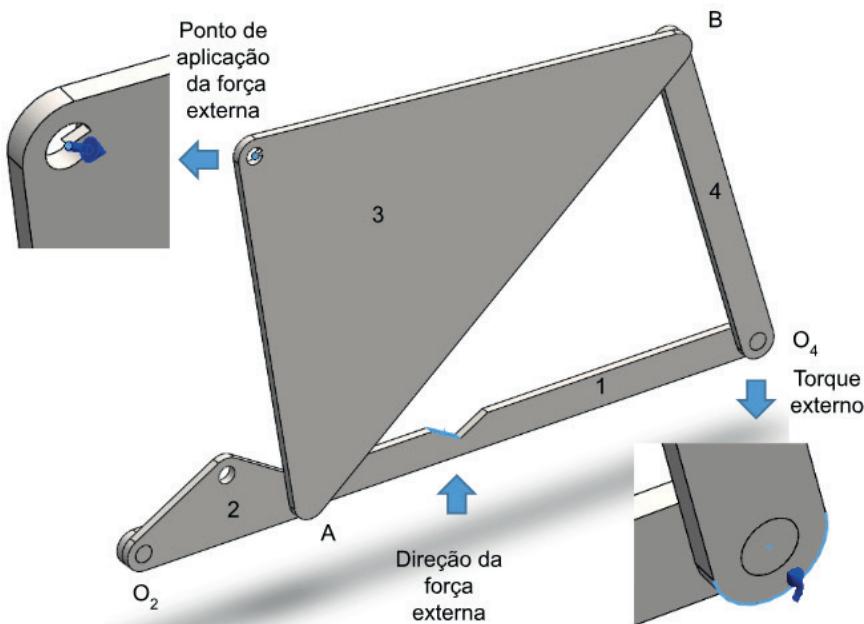


Figura 5 – Montagem do mecanismo no Solidworks com todas as características definidas na Tabela 1.

Para este exemplo, os gráficos da Figura 6, indicam a variação das forças que atuam nas juntas. A partir destes gráficos, é possível determinar valores de máximos que atuam em cada junta. No caso da junta O_2 , F_{21} máximo é de 53 lb e representa o módulo da resultante da força exercida do elo 2 sobre o elo 1 (F_{21}). Um valor próximo é observado para F_{32} (força exercida do elo 3 sobre o elo 2). Isto devido ao princípio da transmissibilidade. Já na junta B, a força que o elo 4 exerce sobre o elo 3 (F_{43}) é de 124 lb, mesmo valor é observado na junta O_4 , ou a reação do elo 1 sobre o elo 4. Estes valores podem ser utilizados para dimensionamento dos elos utilizando ferramentas CAE de simulação de AEF. Além dos esforços nas juntas, a análise cinemática retorna como resultado, um gráfico com valores para o torque T_2 , necessário para acionamento do mecanismo pelo elo 2. Este dado pode ser utilizado para dimensionamento do motor (ou atuador) necessário para acionar o mecanismo. Neste exemplo, o torque máximo encontrado foi de 175 lb.in.

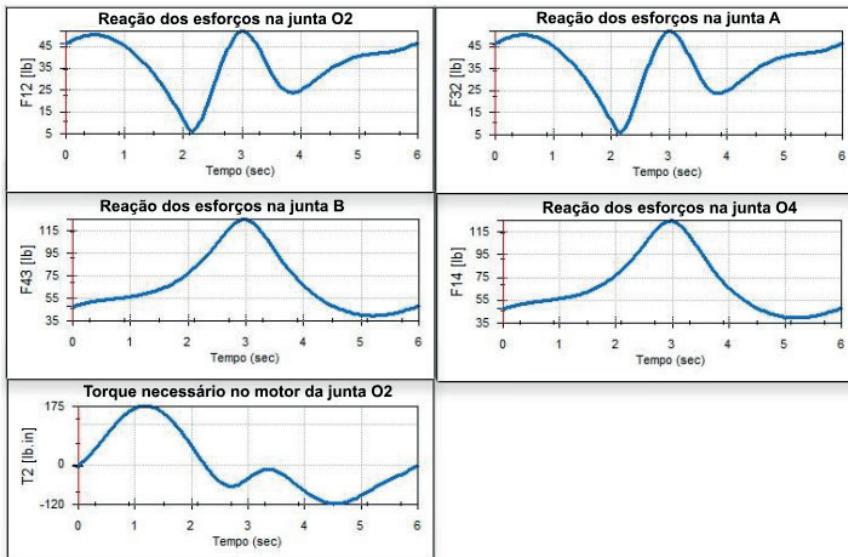


Figura 6 – Resultados das simulações de esforços nas juntas Montagem do mecanismo no Solidworks segundo as características definidas na Tabela 1.

A questão é: podemos confiar que estes resultados estão corretos? Uma forma de verificar é utilizar o método analítico tendo como ferramenta computacional o software Matlab. Antes de apresentar este método computacional, é necessário apresentar o método analítico que utiliza equações algébricas para representar o comportamento cinemático dos vetores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4

Método analítico

Como mostra a Figura 2, um mecanismo pode ser representado por vetores. Assim, equações vetoriais podem ser utilizadas para a solução de problemas cinemáticos. Neste método são deduzidas equações cujos resultados determinam as posições instantâneas para os vetores \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 e \mathbf{R}_4 . Através das primeira e segunda derivadas dessas equações também é possível obter valores para as velocidades e acelerações instantâneas. Finalmente, estimando-se massas e momentos de inércia para os elos e utilizando a segunda lei do movimento de Newton, é possível calcular os esforços nas juntas. A definição das equações algébricas de posição utiliza o método de notação de números complexos permite obter expressões na forma polar e na forma de coordenadas através da Identidade de Euler (Equação 1).

$$Re^{j\theta} = r \cos \theta + j r \sin \theta \quad (1)$$

Observe que o termo ao lado esquerdo da igualdade é uma função exponencial, que relaciona o comprimento do vetor \mathbf{R} e o ângulo θ (Figura 7). A derivada deste termo é facilmente obtida a partir da regra da cadeia. Além disso, o lado direito da igualdade apresenta duas simples relações trigonométricas de seno e cosseno, também com derivação trivial e que definem as projeções das componentes do vetor \mathbf{R} nos eixos x e y .

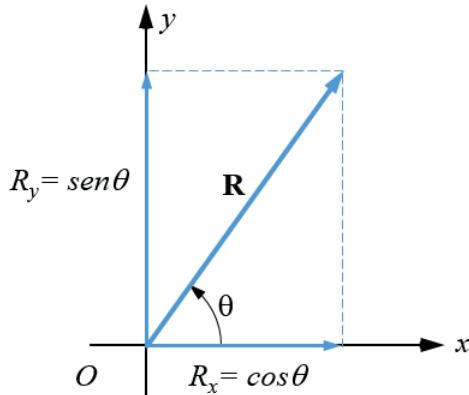


Figura 7 – Relação geométrica entre as variáveis \mathbf{R} e θ e as suas projeções \mathbf{R}_x e \mathbf{R}_y , nos eixos x e y .

A definição das equações para o cálculo dos valores dos ângulos θ_3 e θ_4 em função de θ_2 , envolve um método de soma vetorial. Para isto, observe que a soma de \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 é igual à soma de \mathbf{R}_4 e \mathbf{R}_1 . Esta relação também pode ser escrita como:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_1 \quad (2.a)$$

Ou então:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \quad (2.b)$$

Substituindo a notação polar para números complexos na Equação (2.b), obtém-se a Equação 3:

$$R_2 e^{j\theta_2} + R_3 e^{j\theta_3} - R_4 e^{j\theta_4} - R_1 e^{j\theta_1} = 0 \quad (3)$$

Substituindo a identidade de Euler na Equação (3), tem-se a Equação 4:

$$a(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) + b(\cos\theta_3 + j\sin\theta_3) - c(\cos\theta_4 + j\sin\theta_4) - d(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) = 0$$

A Equação (4) permite encontrar os valores de θ_3 e θ_4 em função de θ_2 . Para tanto, separa-se a parte sem operador j (real) da parte com operador j (imaginária). Após simplificar o operador, tem-se um sistema de duas equações reais com duas incógnitas (θ_3 e θ_4), como mostra as equações 5.a e 5.b:

$$a \cdot \cos\theta_2 + b \cdot \cos\theta_3 - c \cdot \cos\theta_4 + d \cdot \cos\theta_1 = 0 \quad (5.a)$$

$$a \cdot \sin\theta_2 + b \cdot \sin\theta_3 - c \cdot \sin\theta_4 + d \cdot \sin\theta_1 = 0 \quad (5.b)$$

Após uma série de manipulações algébricas, resolvendo o sistema de Equações 5 para θ_4 , determina-se a Equação 6:

$$\theta_{41,2} = 2atg \left[\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right] \quad (6)$$

Os termos A , B e C da Equação 6 são calculados em função de relações envolvendo os comprimentos dos elos e também, em função do ângulo θ_2 , que define a posição do elo de entrada. Após determinar θ_4 , é possível usar a Equação 7 para determinar o valor de θ_3 , deduzida da equação 5.b:

$$\theta_{31,2} = \operatorname{arcsen} \left[\frac{-a \cdot \sin\theta_2 + c \cdot \sin\theta_4}{b} \right] \quad (7)$$

Após determinação dos valores de θ_3 e θ_4 , calcula-se as velocidades angulares e lineares de qualquer ponto pertencente ao mecanismo. Sabendo que a velocidade é a variação instantânea de uma posição em relação ao tempo, deriva-se a equação 3 em relação ao tempo e obtém-se:

$$j \cdot a \cdot \omega_2 e^{j\theta_2} + j \cdot b \cdot \omega_3 e^{j\theta_3} - j \cdot c \cdot \omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \quad (8)$$

As equações de velocidades angulares para o elo acoplador (ω_3) e para o elo de saída (ω_4) são obtidas inserindo a identidade de Euler na Equação 8. Simplificando o operador j e após algumas manipulações algébricas, determina-se valores de ω_3 e ω_4 . As velocidades instantâneas dos pontos A e B , são calculadas através das Equações 9:

$$V_A = a\omega_2(-\sin\theta_2 + j \cdot \cos\theta_2) \quad (9.a)$$

$$V_{BA} = b\omega_3(-\sin\theta_3 + j \cdot \cos\theta_3) \quad (9.b)$$

O passo seguinte é calcular as acelerações lineares e angulares dos pontos A e B . Derivando-se a Equação 8, que resulta na Equação 10:

$$(a\alpha_2je^{j\theta_2} - a\omega_2^2e^{j\theta_2}) + (b\alpha_3je^{j\theta_3} - b\omega_3^2e^{j\theta_3}) - (c\alpha_4je^{j\theta_4} - c\omega_4^2e^{j\theta_4}) = 0 \quad (10)$$

Observe que surgem duas componentes de aceleração, uma para cada termo da Equação 10, que correspondem às acelerações tangencial e a centrípeta. As acelerações angulares para o elo acoplador (α_3) e para o elo de saída (α_4) são obtidas substituindo a identidade de Euler na Equação 10 e simplificando o operador j . Obtém-se assim, um sistema de duas equações. As acelerações lineares dos pontos A e B são calculadas pelas Equações 11.

$$A_A = a\alpha_2(-\operatorname{sen}\theta_2 + j \cdot \cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j \cdot \operatorname{sen}\theta_2) \quad (11.a)$$

$$A_{BA} = b\alpha_3(-\operatorname{sen}\theta_3 + j \cdot \cos\theta_3) - b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j \cdot \operatorname{sen}\theta_3) \quad (11.b)$$

A análise de esforços nas juntas considera a localização de todas as forças atuando no sistema e utiliza a segunda lei de Newton para movimento. A Equação (12.a) relaciona movimentos de translação e (12.b), de rotação.

$$\sum F = m \cdot a \quad (12.a)$$

$$\sum T = I_g \cdot \alpha \quad (12.b)$$

Este cálculo é similar a análise estática de uma estrutura fixa, tanto que se utiliza um DCL para cada elo, como mostra a Figura 8. Observe os esforços de reação que aparecem nas juntas O_2 , O_4 , A e B , mostradas na Figura 8. Devido à terceira lei de Newton, é possível afirmar que $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}$, $\mathbf{F}_{34} = -\mathbf{F}_{43}$ e $\mathbf{F}_{41} = -\mathbf{F}_{14}$. Além disso, as origens desses vetores são localizadas em relação ao centro de gravidade (CG) do respectivo elo, assim como a localização de qualquer força externa. A partir do DCL, é possível determinar o equilíbrio dinâmico de cada elo utilizando as Equações 12, que resulta em três equações de equilíbrio por elo – duas para as forças em x e y e outra para o equilíbrio de momentos.

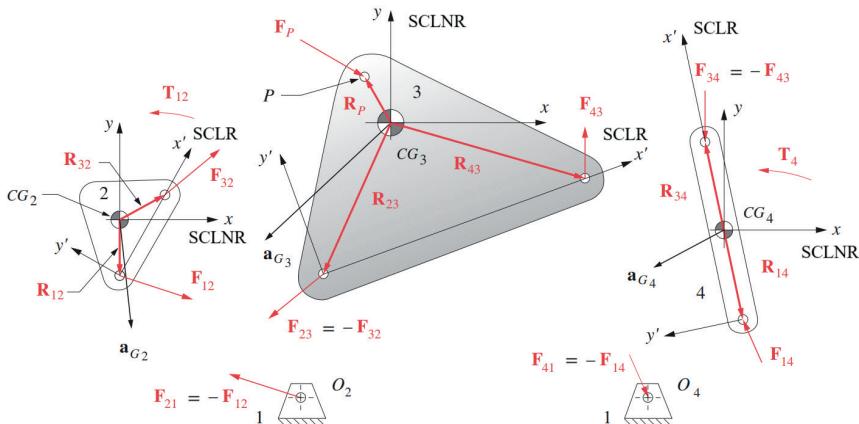


Figura 8 – Diagrama de corpo livre (DCL) de cada elo do mecanismo mostrado na Figura 4.

Contudo, como são três elos, isto resulta em um sistema de nove equações. Como os elos se movimentam acoplados por juntas, as equações também devem ser resolvidas simultaneamente como equações acopladas. As equações 13.a,b,c dizem respeito ao elo 2 (entrada), as equações 13.d,e,f ao elo 3 (acoplador) e as equações 13.g,h,i ao elo 4 (saída).

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{CG_2x} \quad (13.a)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 a_{CG_2y} \quad (13.b)$$

$$(R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + (R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) + T_2 = I_{CG_2}\alpha_2 \quad (13.c)$$

$$F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} = m_3 a_{G3x} \quad (13.d)$$

$$F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} = m_3 a_{G3y} \quad (13.e)$$

$$(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}) - (R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}) + (R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}) = I_{G3}\alpha_3 \quad (13.f)$$

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{G4x} \quad (13.g)$$

$$F_{14y} - F_{43y} = m_4 a_{G4y} \quad (13.h)$$

$$R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x} - (R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}) + T_4 = I_{G4}\alpha_4 \quad (13.i)$$

Na equação 13.c, o torque T_2 é definido como incógnita. Este sistema de nove equações pode ser resolvido simultaneamente, através da forma matricial $[A] \times [B] = [C]$, onde a matriz A representa a matriz dos coeficientes, a matriz B das incógnitas e a matriz C dos valores conhecidos. Assim, organizando o conjunto de equações 13 na forma matricial, tem a Equação 14:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \text{A} & & & \text{x} & \text{B} = & \text{C} \\
 \left(\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0
 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c}
 m_2 a_{G2x} \\
 m_2 a_{G2y} \\
 I_{G2} \alpha_2 \\
 m_3 a_{G3x} - F_{Px} \\
 m_3 a_{G3y} - F_{Py} \\
 I_{G3} \alpha_3 - R_{Px} F_{Py} + R_{Py} F_{Px} \\
 m_4 a_{G4x} \\
 m_4 a_{G4y} \\
 I_{G4} \alpha_4 - T_4
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Figura 9 – Solução matricial para o conjunto de nove equações acopladas.

Ao resolver este sistema, obtém-se uma matriz coluna (9x1), com valores correspondentes as nove incógnitas da matriz B. Ressalta-se que, esta solução é apenas para um valor de θ_2 . Para conhecer o comportamento com $0 \leq \theta_2 \leq 360^\circ$, com incremento de um em um grau, este processo teria que ser repetido 360!. Uma alternativa é usar o Matlab que, com o código adequado, executa estes cálculos em alguns segundos. O código desenvolvido para este problema possui 220 linhas de comandos. A Figura 10 exibe o início do código com os dados iniciais e a Figura 11, a parte com a solução matricial.

```
% Análise dinâmica para um mecanismo quatro barras
clear variables; clear all; clc
%Declaração dos dados de entrada
a = 5; RCG2 = 3; D2 = 30; w2 = 1.047; AL2 = 0;% AL2 = 0
b = 15; RCG3 = 9; D3 = 45; % w3 e AL3 são calculados
c = 10; RCG4 = 5; D4 = 0; % w4 e AL4 são calculados
d = 19;
Ps2 = 1.5; Ps3 = 7.7; Ps4 = 5.8; %Peso dos elos [lb]
Ig2 = 0.4; Ig3 = 1.5; Ig4 = 0.8; %Momento de inércia dos elos [lb.in.s^2]
%Força e torque aplicado nos elos 3 e 4
F3 = 80; AF3 = 330.00; %Magnitude [lb] e ângulo [°] de F3
RF3 = 3.00; ARF3 = 100; %Comprimento [in] e ângulo [°] de F3 a CG3
Torq3 = 0; %Torque aplicado no elo 3 [lb.in] (se houver)
F4 = 0; AF4 = 0; %Magnitude [lb] e ângulo [°] de F4 (se houver)
RF4 = 0; ARF4 = 0; %Comprimento [in] e ângulo [°] de F4 a CG4
Torq4 = 120; %Torque aplicado no elo 4 [lb.in]
```

Figura 10 – Parte do inicial do código com a declaração dos dados da Tabela 1.

A Figura 11 apresenta os gráficos de forças resultantes nas juntas e torques necessários para o motor que atua no elo 2 para uma rotação de 360° . Observe que os valores obtidos pelo método gráfico Solidwork (Figura 6) são confirmados pelos valores obtidos pela Matlab (Figura 11). Isto evidencia a capacidade de interação dos dois métodos com ferramentas computacionais completamente distintas para se chegar num mesmo resultado. Assim, o aluno possui ao seu dispor, duas formas para comprovação dos resultados.

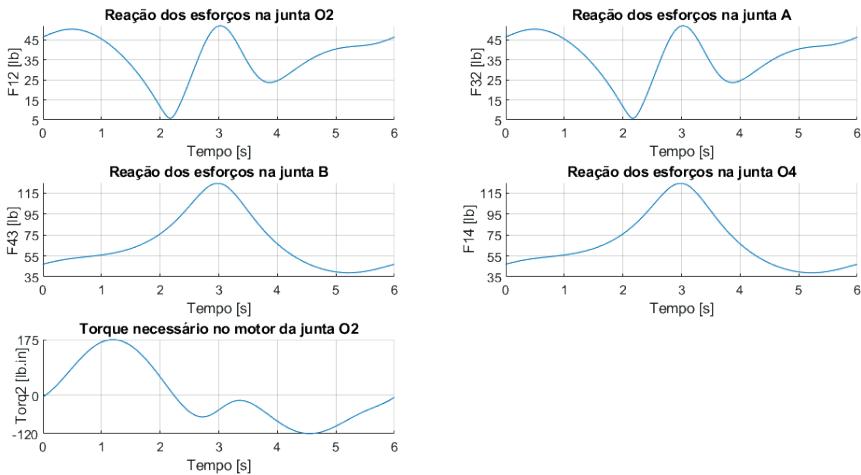


Figura 11 – Resultados de esforços nas juntas e torque obtidos pelo Matlab.

CONCLUSÃO

Diversas ferramentas computacionais estão disponíveis para uso na engenharia mecânica. Este texto apresenta uma metodologia de ensino para a disciplina de mecanismos, que possui uma ementa teórica repleta de métodos de geometria descritiva e equações algébricas. A título de ilustração, é apresentado um método aplicado em sala de aula, com o uso dos softwares Solidworks e Matlab para solução de um problema clássico envolvendo um mecanismo quatro barras. Ao introduzir ferramentas computacionais como o Solidwork e o Matlab como metodologia de ensino, observou-se aumento no interesse dos alunos pela disciplina e pelo curso de engenharia mecânica.

BIBLIOGRAFIA

CONSTANTS, E.; DYER, K. B. Introduction to Mechanism Design With Computer Applications (2018).

NORTON, R. Design of Machinery. 6º Ed. (2020).