

CAPÍTULO 9

OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO EM SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O GEOGEBRA NA FORMAÇÃO DE SUBSUNSORES EM APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA



<https://doi.org/10.22533/at.ed.579112528029>

Data de aceite: 25/08/2025

Andrea de Almeida Brito

Profa. Dra.

DEMAT, IFBA, Campus Salvador

RESUMO: Na atualidade os problemas de otimização têm várias aplicações na vida cotidiana, em especial para os estudantes que aprimoram-se nas áreas das ciências exatas, e, em especial, aos problemas inerentes à Pesquisa Operacional (PO), onde trata-se dos métodos de auxílio à tomada das melhores decisões e utilização dos recursos possíveis dentro das atuações humanas, aplicados nas diversas áreas do conhecimento, a citar ciências em geral, engenharias, economia e logística etc. Nesse sentido essa pesquisa tem por objetivo geral a análise de como os problemas de otimização contribuem para a aprendizagem significativa (ausubeliana) em funções polinomiais no ensino médio; e, como objetivos específicos a evidenciação da importância da utilização da modelagem matemática de otimização para o ensino de funções polinomiais e o desenvolvimento de uma sequência didática, com o uso do software geogebra, na formação de subsunsores sobre problemas de otimização

para serem utilizadas no ensino/estudo de funções polinomiais no nível médio. Para consolidar esses objetivos adota-se uma metodologia híbrida lastreada na revisão de literatura de cunho histórico, documental com bases nas publicações dos últimos vinte anos na área e afins, consubstanciando uma pesquisa de caráter bibliográfico com fontes primárias e secundárias com base nas palavras-chave e na fundamentação teórica da proposta pedagógica adotada. Por fim apresenta-se uma sequência didática sobre a otimização para funções polinomiais no ensino médio adotando estratégias que culminam na aprendizagem significativa do conteúdo proposto.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização. Aprendizagem Significativa; Polinômios. Pesquisa Operacional. Geogebra.

OPTIMIZATION OF POLYNOMIAL FUNCTIONS IN HIGH SCHOOL IN DIDACTIC SEQUENCE WITH GEOGEBRA IN THE TRAINING OF SUBSUMERS IN MEANINGFUL LEARNING

ABSTRACT: Nowadays, optimization problems have several applications in everyday life, especially for students who

are improving their skills in the exact sciences, and especially for problems inherent to Operational Research (OR), which deals with methods to help make the best decisions and use possible resources within human actions, applied in various areas of knowledge, such as science in general, engineering, economics and logistics, etc. In this sense, this research has as its general objective the analysis of how optimization problems contribute to significant (Ausbelian) learning in polynomial functions in high school; and, as specific objectives, the evidence of the importance of using mathematical optimization modeling for teaching polynomial functions and the development of a didactic sequence, with the use of GeoGebra software, in the training of subsumers on optimization problems to be used in the teaching/study of polynomial functions at high school level. To consolidate these objectives, a hybrid methodology is adopted based on a review of historical and documentary literature based on publications from the last twenty years in the area and related subjects, substantiating a bibliographical research with primary and secondary sources based on the keywords and theoretical foundation of the adopted pedagogical proposal. Finally, a didactic sequence is presented on optimization for polynomial functions in high school, adopting strategies that culminate in the significant learning of the proposed content.

KEYWORDS: Optimization. Meaningful Learning; Polynomials. Operational Research. Geogebra.

INTRODUÇÃO

O processo de tomada de decisões sempre foi e ainda é uma atividade essencial em diversas áreas do conhecimento humano, em especial o seu aprimoramento e automatização na atualidade, onde as demandas de tempo estão cada vez maiores, não apenas na vida profissional dos cidadãos como também, e sobretudo, na vida pessoal e em todo o cotidiano da vida moderna (Brasil, 2018).

Dessa forma o processo de ensino da matematização dessas demandas é algo cada vez mais necessário e por isso deve ser abarcado cada vez mais com profundidade nos diversos níveis do processo educacional, inclusive no nível médio, onde os processos formativos, quando tratados de forma eficaz gera aprendizagem efetiva para todo o resto da vida do individuo (Lima; Oliveira, 2020; Lopes; Silva, 2020; Moreira, 2010; Moreira, 2011).

No caso específico dos conteúdos da disciplina de matemática no nível médio, no Brasil, esse processo segue uma sequência, que pode ser considerada como sendo uma sequência didática, em etapas, e também que podem ser nomeadas em função dos seus respectivos conteúdos, a citar: compreensão do problema, estabelecimento dos objetivos, consideração das restrições envolvidas, análise das alternativas viáveis e, por fim, a escolha da solução mais adequada (Abrão, 2015; Azevedo, 2015; Brasil, 2024).

Essas etapas, quando abordadas de forma mecânica e sem conexões em desequilíbrio piagetiano não geram aprendizagem duradoura, culminando com o esquecimento ou até mesmo o aprendizado em equívoco, desdobrando-se para pouca eficácia no uso futuro ou até mesmo a percepção equivocada de todo o processo (Camargo, 2014).

Nesse cenário essa pesquisa tem como objetivo geral a análise de como os problemas de otimização contribuem para a aprendizagem significativa, em modelo ausubeliano, em funções polinomiais no ensino médio; e, como objetivos específicos a evidenciação da importância da utilização da modelagem matemática de otimização para o ensino de funções polinomiais e o desenvolvimento de uma sequência didática sobre problemas de otimização para serem utilizadas no ensino/estudo de funções polinomiais no nível médio.

Para a consolidação desses objetivos é adotada a metodologia híbrida lastreada na revisão de literatura de cunho histórico, documental com bases nas publicações dos últimos vinte anos na área e afins (Ruiz, 2018; Marconi; Lakatos, 2021).

Assim trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa de caráter bibliográfico, que, segundo Lakatos e Marconi (2003), toda pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange todo material existente a respeito do tema em questão, livros, textos, jornais, inclusive radio, gravações *etc.*

Desta mesma forma, a partir de um levantamento bibliográfico, empregando as palavras-chave: otimização, aprendizagem significativa, polinômios e pesquisa operacional; a presente pesquisa utilizará de textos, livros, artigos, revistas entre outros, fazendo uso de plataformas de pesquisa como os Periódicos do Capes, Scielo, revistas científicas e acervos acadêmicos para fundamentar todo o aporte teórico que será utilizado.

Além disso, baseado na fundamentação teórica feita, com base na teoria da aprendizagem significativa, de David Paul Ausubel, nos conhecimentos das funções polinomiais, de grau 1 e 2, adotadas no ensino médio, desenvolve-se uma proposta de sequência didática, com o uso do software de simulações Geogebra, com combinações interativas da geometria, da álgebra, do cálculo em geral e com o seu sistema algébrico computacional e com diálogos socioconstrutivista através da mediação e colaboração entre alunos e professores no processo de formação de subsunções que permitem o acesso a problemas de otimização, das mais diversas espécies de aprendizagem significativa, para ensino dessas funções polinomiais, explorando todos os possíveis aspectos matemáticos que existem, como interpretação da situação para a modelagem da função, construção e análise do gráfico, culminando com seus processos de otimização e entre outras habilidades que podem ser desenvolvidas e aguçadas visando as demandas problemáticas elencadas no escopo dessa pesquisa (Bazaraa *et. al.*, 2010; Chatgpt, 2025).

No que se refere às justificativas, a proposta da pesquisa pode-se considerar que a abordagem de funções polinomiais por meio da otimização constitui não apenas uma estratégia eficaz para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, mas também um caminho para uma aprendizagem mais contextualizada e duradoura de forma que a escolha pela aprendizagem significativa, conforme propõe David Ausubel, fundamenta-se na ideia de que o conhecimento novo deve ser ancorado em estruturas cognitivas pré-existentes do aluno, favorecendo a internalização e o uso prático do conteúdo (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980).

No aspecto pedagógico a integração entre conceitos de otimização e funções polinomiais propicia uma abordagem ativa e investigativa, estimulando o protagonismo discente na construção do conhecimento. Nesse sentido, segundo o que preconiza Moreira (2011), estratégias que promovem significância lógica e psicológica do conteúdo são fundamentais para que o aluno comprehenda o “porquê” e o “para quê” da Matemática (Lima; Oliveira, 2020; Moreira, 2010; Moreira, 2011).

Assim a utilização de situações-problema relacionadas à realidade do estudante - como maximização de lucro, economia de recursos ou minimização de trajetos - reforça a utilidade prática dos conteúdos matemáticos no cotidiano (Dantzig, 1963; Ferreira, 2017; Moreira, 2010).

Já no aspecto da vida profissional, a otimização é uma ferramenta essencial em diversas áreas como engenharia, economia, logística, agronegócio e tecnologia da informação, sendo indispensável a futuros profissionais que lidarão com a resolução de problemas reais e complexos. De acordo com Bazaraa *et al.* (2010), a modelagem e a solução de problemas de otimização compõem a base de tomada de decisões em ambientes corporativos e industriais. Com isso a introdução desses conceitos ainda na Educação Básica amplia o leque de possibilidades futuras e prepara o aluno para os desafios do século XXI.

Do ponto de vista técnico, ensinar otimização aliada às funções polinomiais estimula o pensamento algébrico, gráfico e analítico, fomentando competências associadas à resolução de problemas complexos e análise de variáveis - competências valorizadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que recomenda que o aluno comprehenda e utilize funções como ferramentas para modelar e resolver problemas em diferentes contextos (Brasil, 2018).

No que concerne à ótica das demandas sociais contemporâneas e futuras, a educação matemática precisa ser voltada para a formação de cidadãos críticos e autônomos, capazes de interpretar dados, otimizar recursos e tomar decisões informadas em um mundo cada vez mais complexo e interdependente. A alfabetização matemática com base na aprendizagem significativa contribui para que os estudantes comprehendam seu papel social e saibam agir com responsabilidade diante de desafios econômicos, ambientais e tecnológicos (D'ambrosio, 2002).

É interessante observar como constantemente pensamos em qual é a melhor decisão a ser tomada nas mais diversas e variadas situações que nos deparamos na vida. Em algumas situações essa decisão é puramente subjetiva e em outras com um pouco de cálculo e pensamento lógico, conseguimos encontrar qual seria a melhor decisão consideramos todos os aspectos que rodeiam e influenciam essa escolha (Skovsmose, 2000).

A otimização, tem como principal objetivo a determinação do ponto ótimo de uma função e os problemas como este possuem uma grande aplicabilidade em situações cotidianas, como os atos de minimização de gastos, maximização de lucros *etc* (Rocha, 2013, p. 18).

Assim, a otimização é um ramo da Matemática, mais especificamente da modelagem matemática, onde o principalmente objetivo, como bem dito por Rocha (2013) e Carmo (2014) é encontrar o ponto ótimo da função que descreve o problema ou fenômeno que estamos analisando em questão.

Dessa maneira a otimização é extremamente presente no nosso dia a dia de forma a utilizar-se desses problemas de otimização, a exemplo do cotidiano para despertar a curiosidade do estudante pelo estudo de funções, pois a base do estudo da otimização é a modelagem dos problemas através de funções.

Ademais, é fundamental pontuar que é previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCNEM (Brasil, 2004), o estudo das funções polinomiais e no documento é enfatizado a sua importante, pois é fundamental esse saber para as mais áreas do conhecimento, seja nas exatas, biológicas e até mesmo nas humanas.

Além disso, também vemos que na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensino de funções polinomiais é exigido e há diversas habilidades que focam em seu desenvolvimento.

No que se refere às justificativas pessoais para a confecção dessa pesquisa pode-se afirmar que as experiências vivenciadas nos últimos semestres da graduação, especialmente nas componentes de Estágio Supervisionado III e IV, com foco no Ensino Médio, juntamente com a atuação como monitora nas disciplinas de Introdução à Matemática, Matemática Aplicada e Cálculo I no Ensino Superior, transformaram significativamente minha perspectiva profissional (Nunes, 2022).

Essas vivências não apenas apontaram um caminho mais claro sobre a trajetória que desejo seguir após a conclusão do curso, como também despertaram diversas inquietações - algumas já conhecidas, por ter sido aluna do Ensino Médio e compartilhar pensamentos semelhantes aos dos estudantes atuais, e outras novas, oriundas da minha nova posição, como professora em formação.

Já durante o Estágio III, atuando como observadora, pude ouvir comentários recorrentes como “para que eu vou usar isso?” e presenciar o desânimo de muitos alunos diante da matemática. Não posso negar que, enquanto estudante, também me questionei dessa forma. Foi justamente esse sentimento que me motivou, desde o início da graduação, a me tornar uma professora capaz de revelar aos estudantes a beleza da matemática e sua aplicabilidade real no cotidiano, contribuindo para reduzir a distância emocional e conceitual que muitos sentem em relação a essa disciplina.

Essa motivação ganhou forma prática no Estágio IV, o mais desafiador dos quatro estágios obrigatórios do curso. Nessa etapa, fui responsável por duas turmas de 3º ano do Ensino Médio, ambas bastante desmotivadas. Em especial, uma das turmas representou um desafio pessoal, dada a clara apatia e o desinteresse dos alunos.

Durante minha regência, trabalhei com o conteúdo de funções polinomiais - um tema essencial, mas que, do ponto de vista do estudante, tende a ser percebido como

excessivamente técnico e pouco atrativo. Diante disso, questionei-me constantemente sobre como ensinar esse conteúdo de forma envolvente, buscando estratégias para captar a atenção dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo.

Paralelamente, a experiência como monitora reforçou essa preocupação. Observei uma grande defasagem entre os alunos no que se refere ao domínio de conceitos básicos de funções, sobretudo polinomiais, como divisão, fatoração e determinação de raízes. Tais lacunas, em geral, têm origem no Ensino Médio, resultado de uma construção conceitual insuficiente ou pouco significativa para os estudantes.

Foi nesse contexto que conheci o tema da otimização e passei a perceber sua presença constante em nosso cotidiano, pois, a todo momento somos levados a tomar decisões que envolvem escolhas otimizadas: qual o melhor lugar para almoçar considerando preço e qualidade, qual o trajeto mais rápido até determinado destino ou, ainda, qual item vale mais a pena durante uma promoção.

Esses são exemplos claros de como, de forma intuitiva, utilizamos o raciocínio otimizado diariamente, de forma que, ao me aprofundar nesse conteúdo, comecei a refletir sobre como os problemas de otimização poderiam ser utilizados para despertar a curiosidade dos estudantes e atribuir sentido ao aprendizado das funções polinomiais, e dai surge a demanda por essa pesquisa.

REVISÃO DE LITERATURA

Problemas de otimização e a Pesquisa Operacional

Na atualidade Pesquisa Operacional (PO) configura-se como uma ciência aplicada voltada ao desenvolvimento e à aplicação de técnicas matemáticas e analíticas que visam oferecer suporte eficiente e eficaz ao processo de tomada de decisão de forma que seu uso estende-se amplamente a governos, instituições públicas, empresas e indústrias, sendo essencial na proposição de soluções voltadas à melhoria de processos internos, à redução de custos e à maximização de lucros (Taha, 2008).

Dentre os principais campos de estudo da PO, destacam-se os problemas de otimização, que buscam encontrar o valor máximo ou mínimo de funções associadas a objetivos, como a obtenção do maior lucro ou a minimização de prejuízos (Hillier; Lieberman, 2013).

A resolução desses problemas exige, inicialmente, a modelagem matemática da situação-problema e, em seguida, a escolha e aplicação de um método apropriado e nesse estudo, adota-se o simples, pois tratando-se de polinômios estudados no nível médio tem-se apenas as funções polinomiais de grau um e dois, que representam respectivamente retas e parábolas, em especial com ênfase em sua abordagem geométrica (AG), a qual possibilita a representação gráfica das restrições por meio de retas que, em conjunto, formam um polígono convexo cujos vértices correspondem a possíveis soluções (Moreira, 2010).

Os conhecimentos prévios necessários para a aplicação da AG do método Simplex - como o domínio de equações e inequações do primeiro grau, a construção de gráficos cartesianos e a análise de interseções - fazem parte dos conteúdos do Ensino Médio, conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018). Diante disso, propõe-se a transposição didática desses saberes para o referido nível de ensino, com vistas a proporcionar uma abordagem mais compreensível e contextualizada dos conceitos envolvidos na programação linear.

Para tal, será desenvolvido uma análise numérica ou gráfica no sentido de permitir a construção dinâmica de gráficos e com isso facilitar a visualização do conjunto de soluções viáveis e a localização da solução ótima, evidenciando seus pontos de máximo e mínimo bem com as respectivas fronteiras onde se objetiva promover uma aprendizagem ativa e visual, estimulando o raciocínio matemático dos estudantes e favorecendo sua participação crítica e engajada no processo de resolução de problemas (Alves; Oliveira, 2020).

As bases legais do nível médio no Brasil e as funções polinomiais estudadas

Merce considerar que a educação básica no Brasil é regida por um conjunto de normas legais que visam garantir a formação integral dos estudantes e seu preparo para o exercício da cidadania. Dentre essas normas, destaca-se a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394/1996, que estabelece, em seu artigo 35, que o ensino médio, etapa final da educação básica, tem como finalidade “a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando; e o desenvolvimento do educando como pessoa humana” (Brasil, 1996).

Além da LDB, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018, define as competências e habilidades essenciais que devem ser desenvolvidas pelos alunos em cada etapa da educação básica (Brasil, 2018).

No que se refere à Matemática no Ensino Médio, a BNCC propõe uma organização por unidades temáticas, entre as quais se destaca a Álgebra, abrangendo, entre outros conteúdos, o estudo das funções polinomiais (Brasil, 2018).

Em específico, no que refere-se às funções polinomiais, que constituem um importante campo de estudo dentro da Matemática escolar, pois permitem modelar diversas situações do cotidiano e da ciência, que, segundo nos ensina Dante (2014), uma função polinomial é uma função do tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_nx^n \quad (1)$$

em que os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n são números reais, e n é um número natural e que é o grau do polinômio respectivo (Dante, 2014; Nunes, 2022; Iezzi *et al.*, 2015).

A compreensão das funções polinomiais possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas, competências fundamentais para a formação do estudante (Nunes, 2022).

Entretanto, no Ensino Médio, o estudo das funções polinomiais inicia-se com as funções do 1º grau (funções lineares, com $n=1$) e do 2º grau (funções quadráticas, com $n=2$), estendendo-se para funções de grau superior, como exemplos de comportamento gráficos, principalmente, não obstante, aborda-se apenas as possíveis soluções nos casos de $n=1$ e $n=2$ no nível médio (Nunes, 2022; Iezzi *et al.*, 2015).

As funções do 1º grau são expressas na forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x = \sum_{i=0}^n a_n x^i \quad (2)$$

com $a_1 \neq 0$, sendo representadas por retas no plano cartesiano.

Já as funções do 2º grau apresentam a forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \sum_{i=0}^n a_n x^n \quad (3)$$

com $a_2 \neq 0$, caracterizando-se por uma representação gráfica em forma de parábola (Iezzi *et al.*, 2015).

Importante também considerar que o desenvolvimento dessas funções no currículo escolar visa não apenas à aprendizagem mecânica de algoritmos, mas à construção de significados por meio da exploração de suas propriedades, representação gráfica e interpretação de seus coeficientes, e, o aprendizado dos processos de otimização através de técnicas numéricas, gráficas e até mesmo de indução de raciocínios para a maximização e minimização de funções (Nunes, 2022).

O uso de recursos tecnológicos: geogebra

O uso de uma ferramenta tecnológica como o GeoGebra, que é um software educacional dinâmico e gratuito que integra diversos ambientes matemáticos, como álgebra, geometria, estatística, cálculo e planilhas em geral, e atua em uma única plataforma, permite prover um processo de criação de situações que podem associar o comportamento funcional polinomial com cenários reais de forma a promover associação de conceitos (Almeida; Ferreira, 2018).

Importante registrar que o geogebra foi desenvolvido originalmente por Markus Hohenwarter, o programa é amplamente utilizado em contextos educacionais por sua

capacidade de facilitar a visualização, a manipulação e a compreensão de conceitos matemáticos abstratos. De acordo com Lima e Oliveira (2020), o GeoGebra possibilita uma abordagem exploratória e interativa do conhecimento matemático, promovendo um ambiente de aprendizagem mais significativo, conforme proposto por teóricos como Ausubel e Vygotsky.

No caso do ensino de polinômios, o GeoGebra desempenha papel fundamental ao permitir que os alunos visualizem graficamente as funções polinomiais e analisem, por exemplo, o comportamento das raízes, os pontos de mínimo e máximo, a concavidade e a variação do sinal da função. Tais elementos, muitas vezes compreendidos apenas de forma algébrica e abstrata, tornam-se mais claros quando representados graficamente. Isso é particularmente relevante para alunos do ensino médio, que frequentemente enfrentam dificuldades para relacionar a expressão algébrica de um polinômio com seu gráfico correspondente (Lima; Oliveira, 2020; Hohenwarter, 2025).

Segundo Lopes e Silva (2020), a utilização de recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica e calculadoras gráficas, contribui significativamente para o entendimento das funções polinomiais, especialmente no que tange à visualização de seus gráficos e à análise de seus comportamentos, de forma que a abordagem das funções polinomiais deve estar alinhada com a proposta de uma educação matemática crítica e significativa, conforme defende Skovsmose (2000).

Tal perspectiva entende que o ensino de Matemática não deve restringir-se ao domínio técnico de procedimentos, mas promover a reflexão sobre o papel da Matemática na sociedade, sua aplicabilidade e sua função como linguagem para a leitura e transformação da realidade.

A título de exemplo tem-se o gráfico a seguir com o enunciado respectivo da problemática envolvida na sua análise, que pode ser observada no Quadro 1, a seguir:

Etapas	Problemática em Evidências
Enunciado	"Observe o gráfico que representa uma reta, uma parábola e uma função cúbica no mesmo sistema cartesiano.
Problemática 1	a) Identifique visualmente os pontos de máximo e mínimo de cada função. Quais dessas funções possuem extremos locais? Justifique sua resposta com base na forma das curvas.
Problemática 2	b) Classifique o comportamento das funções em termos de crescimento e decrescimento nos diferentes intervalos. Utilize os pontos críticos como referência.
Problemática 3	c) Compare os valores numéricos das três funções para pelo menos cinco valores numéricos para a sua variável independente e utilize uma tabela para organizar sua análise.
Problemática 4	d) Com base nas derivadas, explique matematicamente por que os extremos ocorrem nos pontos indicados.
Problemática 5	e) Reflita sobre qual a importância de identificar pontos de máximo e mínimo em situações do cotidiano, como em economia, engenharia ou medicina?

Quadro 1: Exemplo de Enunciado de Problemática para Ativação de Subsunçor

Fonte: (Próprias autoras, 2025).

Dessa maneira tem-se com análise de máximos e mínimos nas funções abordadas no nível médio:

Reta, Parábola E Função Cúbica Com Extremos Evidenciados

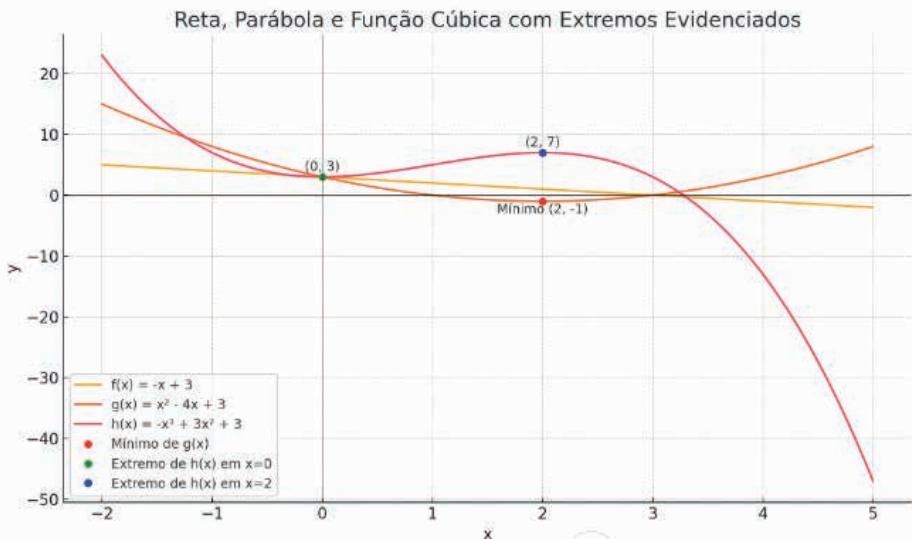


Figura 1: Análise de otimização em exemplo

Fonte: (Próprias autoras, 2025).

Portanto, é fundamental que o ensino das funções polinomiais no Ensino Médio seja orientado por práticas pedagógicas que articulem teoria e prática, de forma a preencher as demandas de construção de conhecimentos prévios, a exemplo como o comportamento gráfico da respectiva função, antes da apresentação do formato geral da função e as relações entre esse comportamento correlacionando-o com as respectivas características funcionais, de forma a contextualizar os conteúdos e ao incentivo a resolução de problemas reais.

Merece inclusive considerar que esse conjunto de ações sempre requer uma formação docente sólida, bem como materiais didáticos que favoreçam a construção do conhecimento matemático de forma ativa e participativa.

2.4 A teoria da aprendizagem significativa

2.4.1 Apresentação, História e Importância

A Teoria da Aprendizagem Significativa, desenvolvida por David Ausubel (1918-2008), tem sido amplamente debatida e aprofundada por diversos estudiosos, entre eles Joseph Novak (1930-2023), António Nóvoa (1958-) e Marco Antônio Moreira (1942-), cujas contribuições ampliam as possibilidades de aplicação pedagógica desse referencial teórico.

Ausubel, psicólogo educacional norte-americano, é o autor central dessa teoria, a qual sustenta que a aprendizagem significativa ocorre quando novos conhecimentos são integrados de maneira não arbitrária à estrutura cognitiva do aprendiz. Ou seja, a aprendizagem torna-se mais eficaz quando as novas informações se conectam a conceitos relevantes já internalizados, formando uma rede progressiva de significados. Em oposição à aprendizagem mecânica - caracterizada pela memorização descontextualizada e superficial - Ausubel destaca que o verdadeiro aprendizado depende da “ancoragem” de novos conteúdos a ideias pré-existentes (Moreira, 2011), que já denominou-se anteriormente, nessa pesquisa, como sendo conhecimentos prévios ao tema em questão.

Seguidor direto de Ausubel, Joseph Novak contribuiu significativamente para a expansão da teoria ao propor os mapas conceituais como ferramenta pedagógica. Esses mapas possibilitam a visualização das conexões entre novos e antigos conceitos, promovendo uma organização lógica e relacional do conhecimento. Com isso, Novak defende que a representação gráfica das relações conceituais favorece uma aprendizagem mais profunda e estruturada (Moreira, 2011).

Embora não vinculado diretamente à teoria de Ausubel, António Nóvoa ressalta a importância de se considerar os contextos históricos, sociais e culturais no processo de ensino-aprendizagem. Sua perspectiva complementa o pensamento ausubeliano ao enfatizar que a significação do conteúdo depende também da vivência e do contexto do aluno, o que reforça a necessidade de uma aprendizagem contextualizada e integradora (Ausubel; Novak, Hanesian, 1980).

2.4.2 Definições e aspectos metodológicos de aplicação

Além disso, Moreira (2011) ressalta as implicações pedagógicas da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, defendendo que os conteúdos escolares devem ser organizados hierarquicamente e de maneira progressiva, de modo que conceitos fundamentais sirvam de base para a compreensão de ideias mais complexas. O ensino, portanto, deve estar alinhado aos interesses, experiências e estruturas cognitivas dos(as) estudantes, criando condições favoráveis para a construção ativa e crítica do conhecimento.

Nesse sentido, Moreira (2011) reforça que a aprendizagem significativa não se limita à simples assimilação de novas informações, mas exige que o estudante seja capaz de analisar, problematizar e atribuir sentido aos objetos de conhecimento, promovendo o desenvolvimento da autonomia intelectual, e, com lastro nessa pesquisa a proposta educacional da otimização de funções polinomiais no ensino médio em tendo como aliados o uso de sequência didática com o software geogebra com o propósito de formação de subsunsores em aprendizagem significativa acaba por propor um conjunto de atividades práticas avaliativas que favorecem a reflexão e a inferência, possibilitando ao aluno uma interação crítica com os conteúdos abordados (Lima; Oliveira, 2020; Lopes; Silva, 2020; Moreira, 2011).

SEQUÊNCIA DIDÁTICA EM APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO

A aplicação prática do GeoGebra também pode ser feita quando se trabalha com uma função do tipo polinomial pois ao utilizar os controles deslizantes do software para alterar os coeficientes tem-se formas diferenciadas para evidenciar os seus máximos e mínimos, facilitando sobremaneira os processos de otimização e o uso dos controles deslizantes podem criar conhecimentos prévios sobre esse conteúdo (Lima; Oliveira, 2020).

Dessa maneira o uso do GeoGebra permite, através de uma proposta de sequência didática com polinômios, para a criação de subsunções de forma que o aluno percebe diretamente como essas mudanças afetam a forma do gráfico. Esse processo favorece o desenvolvimento do raciocínio algébrico e da compreensão conceitual das funções polinomiais, além de estimular a autonomia e a investigação matemática (Lopes; Silva, 2020; Moreira, 2011).

Conforme destacam Almeida e Borba (2012), a exploração dinâmica dos parâmetros da função amplia o leque de estratégias cognitivas empregadas pelos alunos, pois o foco deixa de ser exclusivamente a manipulação simbólica e passa a abranger também a análise visual e comportamental da função.

Outro exemplo didático envolve a decomposição de polinômios em fatores. Ao inserir um polinômio fatorável no campo algébrico do GeoGebra e observar a interseção com o eixo dos X o aluno pode compreender, com apoio visual, o conceito de raízes e sua relação com os fatores da expressão. Essa visualização reforça os vínculos entre teoria e prática, contribuindo para a aprendizagem significativa (Lima; Oliveira, 2020; Almeida, Ferreira, 2018).

Além disso, o ambiente computacional propicia a verificação imediata de hipóteses levantadas pelos estudantes, favorecendo a construção de conhecimentos por meio da experimentação e do erro.

O uso pedagógico do GeoGebra está em consonância com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que incentiva práticas que promovam a resolução de problemas, a argumentação lógica e o uso de tecnologias digitais na aprendizagem da matemática (Almeida, Ferreira, 2018).

Como destacam Almeida e Ferreira (2018), o emprego de softwares como o GeoGebra contribui para tornar o ensino de matemática mais inclusivo e atraente, aproximando o estudante da linguagem e das ferramentas digitais que fazem parte do seu cotidiano.

Em síntese, o GeoGebra configura-se como uma ferramenta poderosa no ensino dos polinômios, pois alia tecnologia, visualização e interatividade. Sua utilização favorece a construção do conhecimento matemático de forma ativa, crítica e investigativa, contribuindo para a superação das dificuldades conceituais frequentemente enfrentadas pelos estudantes (Lima; Oliveira, 2020).

Ao permitir múltiplas representações, a numérica, algébrica e gráfica —, o software aproxima o aluno de uma compreensão mais ampla e profunda das funções polinomiais, favorecendo a interdisciplinaridade, o raciocínio lógico e a criatividade na resolução de

problemas.

Assim, a seguir, apresenta-se uma sequência didática formal com base nas considerações da otimização de funções, com as demandas do ensino médio, com o uso do software geogebra no sentido de formação de subsunsores, em aprendizagem significativa, para melhor entendimento e aprendizagem na funções polinomiais e suas otimizações:

Fases	Etapas	Sequência Didática
Fase das Parcerias Estratégicas	1. Descrição e registro	<p>1. Sequência Didática Formal</p> <ul style="list-style-type: none"> •Tema: “Otimização de Funções Polinomiais no Ensino Médio em Sequência Didática com o Software Geogebra na Formação de Subsunsores em Aprendizagem Significativa” •Duração: 4 aulas (4 x 50 min) •Público-alvo: 2º ano do Ensino Médio •Área: Matemática •Base Teórica: Teoria da Aprendizagem Significativa (Ausubel) e Metodologia da Resolução de Problemas.
	2. Planejamento Estratégico	<p>2.1 Compreensão do Problema</p> <ul style="list-style-type: none"> •Objetivo desta etapa: Estimular os(as) estudantes a identificar e formular o problema de maneira realista e contextualizada. •Atividade proposta: Apresentar uma situação-problema real, como por exemplo: “Uma empresa precisa produzir embalagens retangulares com volume fixo, minimizando os custos com material. Como calcular as dimensões que otimizem o uso de matéria-prima?” <p>2.2. Discussão orientada pelo professor:</p> <ul style="list-style-type: none"> •Quais variáveis estão envolvidas? •O que se pretende otimizar? •Qual o vínculo com funções matemáticas?
	3. Mobilização Institucional e Parcerias	<p>3.1. Estabelecimento dos Objetivos</p> <ul style="list-style-type: none"> •Objetivo desta etapa: Compreender o que se deseja alcançar ao resolver o problema. •Produção com os alunos: Construir coletivamente os objetivos da resolução: •Aplicar conhecimentos de funções polinomiais do 2º grau; Utilizar ferramentas de modelagem matemática para resolver problemas de otimização; Interpretar graficamente e simbolicamente os resultados obtidos. <p>3.2. Objetivo pedagógico geral: Desenvolver a capacidade de resolver problemas reais utilizando ferramentas da matemática, com foco em funções polinomiais e otimização.</p>
	4. Estruturação Técnica e Legal	<p>4.1 Consideração das Restrições Envolvidas</p> <ul style="list-style-type: none"> •Objetivo desta etapa: Identificar as condições que limitam ou condicionam a solução do problema. •Exemplo de discussão com os alunos: <ul style="list-style-type: none"> •O volume da embalagem é fixo. •O custo está relacionado à área da superfície. •As dimensões precisam ser positivas e viáveis em escala real. <p>4.2. Análise formal em sala:</p> <p>Traduzir essas restrições em equações matemáticas e delimitar o domínio da função que representa o custo total.</p>
	5. Implementação Tecnológica	<p>5.1. Análise das Alternativas Viáveis</p> <ul style="list-style-type: none"> •Objetivo desta etapa: Explorar diferentes possibilidades de solução e identificar a mais eficiente. <p>5.2. Metodologia sugerida:</p> <ul style="list-style-type: none"> •Dividir a turma em grupos, que tentarão resolver o problema por abordagens diferentes (uso de gráficos, derivadas ou simulações digitais); •Promover apresentação dos diferentes caminhos possíveis; •Debater sobre as vantagens e limitações de cada abordagem.
	6. Capacitação e Gestão de Pessoas	<p>6.1. Escolha da Solução Mais Adequada</p> <p>Objetivo desta etapa: Justificar e validar a melhor alternativa em termos matemáticos e contextuais.</p> <p>6.2. Critérios de escolha (coletivos):</p> <ul style="list-style-type: none"> •A solução respeita todas as restrições? •É eficiente (minimiza/maximiza adequadamente)? •É aplicável no mundo real? <p>6.3. Consolidação:</p> <ul style="list-style-type: none"> •A turma, com mediação docente, escolhe e valida a solução mais adequada, com base em critérios objetivos e no raciocínio lógico-matemático desenvolvido.

Fases	Etapas	Sequência Didática
Fase da Operação Inicial	7. Execução Operacional e Produção de Informações	<p>7.1. Avaliação</p> <p>•Formativa: Durante a resolução das etapas, com acompanhamento do raciocínio e argumentação dos grupos.</p> <p>7.2. Somativa: Atividade final individual com nova situação-problema de otimização, exigindo modelagem, resolução e análise crítica.</p>
	8. Monitoramento, Avaliação e Aprendizado Contínuo	<p>8.1. Recursos Didáticos</p> <ul style="list-style-type: none"> •Lousa digital ou projetor •Calculadoras e/ou softwares de simulação (GeoGebra) <ul style="list-style-type: none"> •Planilha de apoio (distribuída previamente) •Caderno do estudante e guia didático do professor
	9. Divulgação Pública e Interação com a Sociedade	<p>9.1. Metodologia de Ensino</p> <ul style="list-style-type: none"> •Abordagem construtivista e ativa •Uso da aprendizagem significativa de Ausubel •Resolução de problemas com base em Polya <p>9.2. Trabalho colaborativo e interdisciplinar (possível integração com Física e Química)</p>
Fase de Avaliação Contínua	10. Fase permanente, pois envolve o trabalho continuado e permanente no dia a dia do observatório e está associada a análise crítica de indicadores, a aferição de impacto das intervenções, a escuta estruturada de usuários e beneficiários, bem como a revisão dos protocolos operacionais de forma reiterada e continuada.	

Quadro 1: Sequência Didática com suas Fases, Etapas e Características de Implantação

Fonte: (Próprias autoras, 2025).

Não se deve ignorar também que, a importância da otimização, da modelagem matemática, da adequada descrição da situação problema sempre precisam de ajustes e melhorias pois para adequação às demandas da BNCC, torna-se sempre importante as melhorias continuadas e essas ocorrem sempre com eficácia quando adotam-se teorias pedagógicas em sintonia com as demandas postas.

Dessa forma, no que refere-se aos processos de otimização de funções polinomiais no ensino médio a proposta de uma sequência didática em sintonia com o conjunto de facilidades da adoção e uso do Geogebra como instrumento no processo de formação de sub-sussores em aprendizagem significativa tem-se a certeza de ser um importante olhar para a otimização como modelo matemático.

CONCLUSÕES

A principal contribuição dessa pesquisa foi proporcionar a análise de como os problemas de otimização contribuem para a aprendizagem significativa, em especial com um suporte da teoria da aprendizagem significativa, de David Ausubel, com o uso de funções polinomiais abordadas no nível médio, ou seja, a equação da reta, da parábola e em alguns tópicos de conhecimento, tal como o seu comportamento gráfico, a função cúbica.

Nessa pesquisa também evidenciou-se a importância da utilização da modelagem matemática, dos processos de otimização de funções polinomiais, o próprio ensino dessas funções bem como a apresentação de proposta de sequência didática associada a essa temática com uso de ferramenta de software do Geogebra.

Por fim, o conhecimento construído neste trabalho pode ser utilizado na modelagem matemática de problemas de programação linear sendo lastro de modelagens para realizações de questões comentadas estabelecendo um passo a passo que demonstra como devemos agir para lidar com problemas como esse, **não apenas no interior de modelagens matemáticas, mas sobre tudo na vida profissional dos estudantes e que pode aparecer em** vários âmbitos da vida dos estudantes, demonstrando que apenas com instruções corretas e conteúdos trabalhados em sala podem proporcionar que os mesmos desenvolvam questões como essas, dando valor de forma prática para os conhecimentos ensinados em sala.

Nesse contexto, observa-se que o ensino das funções polinomiais assume um papel estratégico no desenvolvimento das competências matemáticas dos estudantes, servindo como base para conteúdos mais avançados e aplicações interdisciplinares, especialmente nas áreas de Física, Química, Economia e Engenharia. Assim, sua presença no currículo do Ensino Médio brasileiro é justificada não apenas pela tradição acadêmica, mas por sua relevância prática e formativa.

Diante do exposto, é necessário que as políticas públicas de educação valorizem a formação continuada de professores, o investimento em recursos didáticos e a revisão periódica dos currículos, de modo a garantir uma aprendizagem significativa e alinhada às demandas do século XXI.

REFERÊNCIAS

- ABRAO, F. V. **Contribuições da Otimização de Funções Polinomiais no Ensino Médio Utilizando Recursos Computacionais.** 2015. Dissertação. (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade de São Paulo/São Carlos, São Carlos, SP, 2015.
- ALMEIDA, Maria Isabel C. de; BORBA, Marcelo C. **A informática e a educação matemática:** repensando a prática pedagógica. São Paulo: Cortez, 2012.
- ALMEIDA, Rosana C.; FERREIRA, Rilton S. **GeoGebra e a aprendizagem significativa dos polinômios do 2º grau:** uma experiência no ensino médio. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 7, n. 15, p. 54-71, 2018.
- ALVES, Edmilson; OLIVEIRA, Ana Paula. **Utilização do software GeoGebra como ferramenta pedagógica no ensino de Matemática no Ensino Médio.** Revista Educação Matemática em Foco, v. 13, n. 2, p. 99-117, 2020.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.** NBR 6022; NBR 6023; NBR 6024; NBR 6027; NBR 6028; NBR 10520; NBR 14724; NBR 15287: informação e documentação: Artigo em publicação periódica científica impressa: apresentação. Rio de Janeiro, 2003.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. 2^a ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

AZEVEDO, C. G. de. **Problemas de otimização no ensino médio**. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2015.

BAZARAA, Mokhtar S.; JARVIS, John J.; SHERALI, Hanif D. **Programação linear e não linear**. 4^a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 3 maio 2025.

BRASIL. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 01 maio 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 1 maio 2025.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília, DF, 2024.

CAMARGO, Ramina Samoa Silva. **Introdução à programação linear no Ensino Médio utilizando a resolução gráfica**. 2014. 44 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.

CHATGPT. Resposta gerada pela ferramenta ChatGPT em 24 de abril de 2025. Disponível em: <https://chat.openai.com/>. Acesso em: 24 abr. 2025.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. 2^a ed. Campinas: Papirus, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 2^a ed. São Paulo: Ática, 2014.

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions**. Santa Monica, EUA: Princeton University Press - The RAND Corporation, 1963.

FERREIRA, Rodrigo Moraes. **Maximizando Lucros e Minimizando Perdas: Tópicos de Programação Linear com Aplicações e Perspectivas Para o Ensino**. 2017. Dissertação Mestrado profissional em Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, p.5 - 50. 2017.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 9. ed. São Paulo: AMGH, 2013.

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra**: software dinâmico para o ensino e aprendizagem da matemática. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 3 maio 2025.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática**: volume único. 7^a ed. São Paulo: Atual, 2015.

LIMA, Juliana C.; OLIVEIRA, Douglas B. **Uso de tecnologias digitais no ensino de matemática: potencialidades do GeoGebra**. Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 15, n. 2, p. 34-50, 2020.

LOPES, Claudia S. S.; SILVA, Fabiana S. **Tecnologias digitais no ensino de funções**: contribuições para o aprendizado significativo. Revista Educação Matemática em Foco, v. 13, n. 1, p. 65–83, 2020.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica**. 8^a ed. São Paulo: Atlas, 2021.

MOREIRA, Daniel D. **Pesquisa Operacional para cursos de engenharia, administração e economia**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teoria da aprendizagem significativa**: um referencial para organizar o ensino. Campinas: UNICAMP, 2011.

NUNES, C. de A. P. **Otimização como recurso de aprendizagem aplicado ao Ensino Médio e Superior**. 2022. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2022.

ROCHA, A. M. **Problemas de otimização utilizando a Matemática do Ensino Médio**. 2013. 52 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

RUIZ, João Álvaro. **Metodologia científica: guia para eficiência nos estudos**. 6^a. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: questões e possibilidades. Campinas: Papirus, 2000.

TAHA, Hamdy A. **Pesquisa Operacional**: uma introdução. 8^a. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.