v. 1, n. 1, 2025

Revista Brasileira de Ciências Exatas

INTEGRAL: UM MÉTODO A PARTIR DO LOGARITMO NATURAL E SEPARAÇÃO DE FRAÇÕES IMAGINÁRIAS

Carlos Felipe de Oliveira Lima

Data de aceite: 15/07/2025

Resumo: O artigo explora o campo do cálculo integral, apresentando dois métodos inovadores: o Método de Diano (MD) e o Método Imaginário Diano (MDi). O MD utiliza o operador de logaritmo natural para simplificar integrais complexas, tornando os cálculos mais gerenciáveis. Já o MDi aborda integrais com raízes polinomiais imaginárias, oferecendo novas perspectivas e enriquecendo as técnicas de integração. Esses métodos não só aprimoram a compreensão do cálculo integral, mas também exemplificam a evolução contínua das ferramentas matemáticas, impulsionada pela criatividade e busca por insights mais profundos. O cálculo de integrais é uma das ferramentas mais importantes da matemática, com diversas aplicações em ciência e engenharia. No entanto, nem todas as integrais podem ser resolvidas facilmente pelo método tradicional, que consiste em encontrar uma função primitiva da função do qual se integra. Nesses casos, é necessário recorrer a métodos alternativos, como a substituição trigonométrica, a integração por partes, a integração por frações parciais, entre outros.O nosso método foi inicialmente elaborado para evitar a integral por partes e, assim, iniciar uma integral de modo mais conciso. Neste artigo, de modo algum desprezamos o método tradicional, apenas propomos um método alternativo para resolver algumas integrais usando o operador logaritmo natural.A ideia é aplicar a transformação $ln|f(x)| = u$, em que $f(x)$ é a função a ser integrada, e obter uma nova integral transformada em função de e^u, ou seja, . $\int f(e^u)du$. Mostramos que esse método tem algumas vantagens em relação ao método tradicional em algumas vezes, pois evita o uso inicial de soluções trigonométricas. Por exemplo, as integrais normalmente resolvidas por substituição trigonométrica podem ser encontradas com soluções diferentes usando o nosso método. Além disso, algumas integrais podem ser separadas em frações parciais após a aplicação do método. Para ilustrá-lo, resolvemos e demonstramos algumas integrais usando o logaritmo natural e comparamos com as soluções obtidas pelo método tradicional. O artigo apresenta um outro método, que será chamado de sub-método ou Método de Diano imaginário (MDi), aplicar-se-á a integrais cujas raízes de um polinômio do denominador forem imaginárias. O método de Diano (MD) será discutido em seções iniciais do artigo. Em suma, resolveremos, inicialmente, as integrais de $sen(x)$, $cos(x)$, $tg(x)$, sec , $2(x)$ $sec(x)$, posto que são integrais raras de serem vistas na literatura, ou nunca vista, dada a facilidade pelo conceito de limite, exceto integral da $tg(x)$ que é trivial a resolução . Pelo MDi apresentamos uma curiosidade matemática: a função $arctan(x)$ pode ser escrita em termos de uma expressão imaginária, dada por $\frac{i}{2}ln\frac{|x+i|}{|x-i|} + c$, porém esta constante pode ser encontrada. Assim como várias identidades todas as demonstrações serão feitas ao longo do artigo. Para verificar esta igualdade, basta o leitor derivar esta função que se obterá $\frac{dx}{x^2+1}$ que é exatamente a derivada do $arctan(x) + c$. Isto ocorre porque a solução de uma integral não é única. Um bom exemplo disso são funções distintas que têm a mesma derivada. $f(x) = x$ e possuem a $2 - 4$ $g(x) = x2 + 7$ mesma derivada, portanto são soluções da mesma integral. Em última análise, o nosso método não desconsidera o tradicional de maneira alguma. Pelo contrário, podemos utilizá-lo quando for conveniente durante a resolução.

Palavras-chave: Método de Diano (MD). Método Imaginário Diano (MDi). logaritmo natural.

INTRODUÇÃO

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DO MÉTODO

O método é aplicável em todo tipo de integral. Muitas integrais serão demonstradas através de suas respectivas integrais características. A integral característica evita manipulações algébricas desnecessárias que tornariam a resolução mais demorada. Além disso, todas as integrais características associadas serão demonstradas a seguir.

INTEGRAIS CARACTERÍSTICAS

A integral característica é uma fórmula para cada configuração de integrais. Ela foi

desenvolvida abreviar passos algébricos desnecessários que podem incorrer em erros e na agilidade da resolução. Vejamos alguns modelos de integrais.

Partiremos, sempre, da premissa que $ln|f(x)| = u$ e por conseguinte, $f(x) = e^{u}$, para a todas as integrais

DEMONSTRAÇÃO DO MÉTODO

Seja uma integral $\int f(x)dx$, a denotaremos como MDf. Então, como relatado anteriormente faremos $ln|f(x)| = u$ a fim de que fique uma integral do tipo $\int f(e^u)du \int f(e\ )du$

$f(x) = e^u$ sendo $y = f(x)$ $f(x)' = \dfrac{df(x)}{dx}$

$d(fx) = f(x)'dx$, mas $d(fx) = e^u du$

que incorre em $e^u du = f(x)'dx$

logo $dx = \dfrac{e^u}{f(x)'} du$

$$\int e^u \frac{e^u}{f(x)'} du$$

Chegamos à equação característica na forma básica, porém outras equações características serão devidamente demonstradas.

$$\int \frac{e^{2u}}{f(x)'} du$$

- Já para integrais do tipo $\int \frac{dx}{f(x)}$ a solução tem a equação característica $\int \frac{du}{f(x)'}$

DEMONSTRAÇÃO DA INTEGRAL CARACTERÍSTICA

$$\int \frac{dx}{f(x)}$$

Por definição do método

$ln|f(x)| = u$

e $f(x) = e^{u}$ $d(f(x)) = e^u du$

$$f(x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

então $dx = \dfrac{df}{f(x)'}$

como $f(x) = e^{u}$ então substituindo na in tegral, obtemos $\int \frac{df}{f(x)f(x)'} = \frac{e^u du}{e^u . f(x)'} = \int \frac{du}{f(x)'}$

Para integrais do tipo $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$a equação característica é$\int \frac{f(x)du}{g(x)'}$ quando a escolha para o logaritmo for $ln|g(x)| = u$, no qual chamaremos MDg.

DEMONSTRAÇÃO DA INTEGRAL CARACTERÍSTICA

$g(x) = e^u$

$dg(x) = e^u du$

$g(x)' = \frac{dg}{dx}$

$dg = g(x)'dx$

$dx = \frac{dg}{g(x)'}$

voltando à integral $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$

$$\int \frac{f(x)}{e^u} \frac{dg}{g(x)'} = \int \frac{f(x)}{e^u} \frac{e^u du}{g(x)'} = \int \frac{f(x)}{g(x)'} du$$

chegamos à integral característica $\int \frac{f(x)}{g(x)'} du$

Caso a escolha for $ln|f(x)| = u$

a equação característica é $\int \frac{e^{2u} du}{g(x) f(x)'}$

- Quando a integral for do tipo $\int f(x).f(x)'dx$ a integral característica é $\int e^{2u} du$ para $ln|f(x)| = u$

Neste caso não há integral característica, apenas a solução.

DEMONSTRAÇÃO DA INTEGRAL CARACTERÍSTICA

$f(x) = e^u$

$df(x) = e^u du$

$f(x)' = \frac{df}{dx}$ $f(x)'dx = df$

voltando à integral

$$\int f(x).f(x)'dx = \int e^u \ df = \int e^u \ e^u \ du$$

$$\int e^{2u} \ du$$

Quando a integral for $\int \frac{f(x)'}{f(x)} dx$ para a escolha de $ln|f(x)| = u$ a solução é u

DEMONSTRAÇÃO DA INTEGRAL CARACTERÍSTICA

$f(x) = e^u$

$df(x) = e^u du$

$f(x)' = \frac{df}{dx}$

$df = f(x)'dx$

Voltando à integral

$$\int \frac{f(x)'}{f(x)} dx$$

e substituindo

$$\int \frac{df}{e^u} = \int \frac{e^u du}{e^u} = \int du = u$$

logo a solução é $ln|f(x)|$

$\int ln|x|dx$

Nota: No entanto, as duas últimas integrais características não são tão necessárias, pois a substituição u/du se faz mais eficiente.

Para integrais com logaritmos $\int ln|f(x)|dx$ usaremos a equação característica $\int \frac{ue^u du}{f(x)'}$

DEMONSTRAÇÃO DA INTEGRAL CARACTERÍSTICA

$ln|f(x)| = u$

$f(x) = e^u$ sendo $y = f(x)$ $f(x)' = \frac{df(x)}{dx}$

$dx = \frac{df(x)}{f(x)'}$

derivando a equação (a)

$$d(f(x)) = e^u \ du$$

voltando à integral

$\int ln|f(x)|dx$

e substituindo, obtemos a nova integral em função de u

$$\int \frac{udf(x)}{f(x)'} = \int \frac{ue^u du}{f(x)'}$$

INTEGRAIS INICIAIS

Nesta seção mostraremos integrais já definidas através de limites. No entanto, o método soluciona a integral resolvendo-a.

Inicialmente, demonstraremos três integrais conhecidas $sen(x)$, $cos(x)$ e sec e, $2(x)$

posteriormente, $sec(x)$. Estas integrais são comumente obtidas por meio de limites, mas nós as demonstramos usando uma substituição no logaritmo natural. O método proposto tem algumas vantagens sobre o método tradicional, que geralmente recorre à solução trigonométrica. Por exemplo, a integral $\int \frac{dx}{x^2+1}$, que costuma ser resolvida por arctan(x) pode ser determinada nova solução. Mostraremos mais detalhes sobre essa integral mais adiante.

O objetivo deste artigo é mostrar como o método funciona e em quais casos ele é mais eficiente e estável.

INTEGRAL DO SEN(X)

Esta integral é demonstrada na literatura apenas pelo conceito de limite.No entanto, pelo nosso método, podemos resolvê-la por integral. Não a resolveremos pela equação característica do método $\int \frac{e^{2u}}{f(x)'} du$. Faremos as demais pela equação característica.

$\int sen(x).\, dx$

Tomamos, $f(x) = sen(x)$, e, consequentemente, então, $ln|sen(x)| = u$ e, logicamente,

$sen\ x = e^{\,u}$ (1)

A solução característica é

$$\int \frac{e^{2u} du}{f(x)'} \quad (2)$$

$f(x)' = cos(x)$

mas pela relação trigonométrica $sen^2(x) + cos^2(\,x) = 1$

Logo, $cos\ x = \sqrt{1 - sen^2(x)}$

$cos\ x = \sqrt{1 - e^{2u}}$

substituindo na integral,(2)

$$\int \frac{e^{2u}.du}{\sqrt{1-e^{2u}}}$$

Recorrendo à solução característica da integral, temos $\pm \frac{2}{n}\sqrt{c \pm e^{nu}}$ logo, e como $n = 2$, chegamos a $-\sqrt{1 - e^{2u}} = - cos(x)$

INTEGRAL DO COS(X)

$\int cos(x).\, dx$

Usando o método de forma análoga

$ln|cosx| = u$ logo $f(x) = cos(x)$

$$e^u = cos(x)$$

Usando a equação característica, obtemos

$\int \frac{e^{2u}.du}{f(x)'}$ e $f(x)' = - sen(x)$ substituindo, vem

$$- \int \frac{e^{u}.du}{senx}$$

Usando a relação trigonométrica

$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}$ e voltando à equação característica, chegamos a $- \int \frac{e^{2u}.du}{\sqrt{1-e^{2u}}}$, e substituindo, temos $\pm \frac{2}{n}\sqrt{c \pm e^{nu}}$ e $n = 2$

INTEGRAL DA $sec(x^2)$

Integral conhecida que é a $tan(x)$. Pelo método, chegamos à demonstração algo não conhecido pelo método tradicional.

$\int sec^2\ (x)dx$

Usando a definição do método

$ln\ |sec^2\ (x)| = u$

$eu = sec^2(x)$

A integral característica é

$$\int \frac{e^{2u}}{f(x)'} du$$

$f(x)' = 2sec\ (x)\ .\ sec\ (x).\ tan(x)$

Substituindo na integral, vem

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{2u}du}{sec^2(x).tan(x)}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{2u}du}{e^{u}.tan(x)}$$

Porém, $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{u}du}{(sec^2(x)-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Mas $e^u = sec^2(x)$

$$\frac{1}{2}\int\frac{e^{u}du}{(e^{u}-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$\pm\frac{2}{n}\sqrt{e^{nu}} \pm c$ e $n = 2$

$= \sqrt{(e^u - 1)}$

e

$e^u = sec^2(x)$

$\sqrt{sec^2(x) - 1} = tan(x)$

$$\int sec^2(x)dx = tan(x)$$

INTEGRAL DA SEC(X)

$$\int sec(x) = \frac{dx}{cos(x)}$$

$ln|cos(x)| = u\ cos(x) = e^u$

por MD usando a equação característica $\int\frac{du}{f(x)'}$ em que e $f(x)'\ f(x) = cos(x)$ e $f(x)' =- sen(x)$

$$-\int\frac{du}{sen(x)}$$

temos a identidade $sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}$

$$-\int\frac{du}{\sqrt{1-cos^2(x)}} =- \int\frac{du}{\sqrt{1-e^{2u}}}$$

$$ln|\sqrt{1 - e^{2u}}| = v$$

$$\sqrt{1 - e^{2u}} = e^{v}$$

Recorrendo à equação característica da integral, obtemos

$-\int\frac{dv}{g(x)'}$ $\quad g(x) = \sqrt{1 - e^{2u}}$ e

$$g(x)' =- \frac{1}{2}(1 - e^{2u})^{\frac{-1}{2}}.2e^{2u}$$

substituindo, em função de , temos, e^{kv} $g(x)' =- e^{-v}.(1 - e^{2v})$ substituindo na equação característica da integral,

$$+\int\frac{e^{v}dv}{(1-e^{2v})}$$

impondo nova substituição $1 - e^{2v} = s$ e derivando ambos lados da equação, conseguimos $-2e^{2v}dv = ds$

voltando à integral $-\int\frac{e^{v}dv}{(1-e^{2v})}$ e substituindo, $+\frac{1}{2}\int\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}}ds}{e^{2v}.s}$ daí dai

$$+\frac{1}{2}\int\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}}ds}{(1-s).s}$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{ds}{(1-s)^{\frac{1}{2}}.s}$$

fazendo $1 - s = j^2 - ds = 2jdj$ substituindo na integral,

$$+\frac{1}{2}.2\int\frac{jdj}{j.(1-j^2)} = \int\frac{dj}{1-j^2} =- \int\frac{dj}{j^2-1}$$

agora vamos separar em frações parciais

$$-\int\frac{dj}{(j+1)(j-1)} = \frac{A}{j+1} + \frac{B}{j-1} = \frac{Aj-A+Bj+B}{1-j^2}$$

termos o sistema $A + B = 0$

e, $-A + B = 1$

de onde temos que $A = \vdash \frac{1}{2}$ e $B = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}\left(\int\frac{-dj}{j+1}+\int\frac{dj}{j-1}\right)$$

$$-\frac{1}{2}(-\,ln|j\,+\,1|\,+\,ln|j\,-\,1|)$$

$$\frac{1}{2}(ln|j\,+\,1|\,-\,ln|j\,-\,1|)$$

$$\frac{1}{2}\left(ln\frac{|j+1|}{|j-1|}\right)$$

$$ln\left(\frac{|j+1|}{|j-1|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

agora faremos as devidas substituições

$$j\,=\sqrt{1\,-\,s}$$

$$ln\left(\frac{|\sqrt{1-s}+1|}{|\sqrt{1-s}-1|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{2v}\,=\,1\,-\,s$$

$$ln\left(\frac{|\sqrt{e^{2v}}+1|}{|\sqrt{e^{2v}}-1|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$ln\left(\frac{|e^{v}+1|}{|e^{v}-1|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{v}\,=\sqrt{1\,-\,e^{2u}}\,=\,sen(x)$$

$$ln\left(\frac{|sen(x)+1|}{|sen(x)-1|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

assim chegamos à integral da $sec(x)$ = $\frac{1}{2}ln\left(\frac{|sen(x)+1|}{|sen(x)-1|}\right)+\,c$

em função do $sen(x)$

De onde concluímos que $ln|sec(x)\,+\,tg(x)|\,=\frac{1}{2}ln\left(\frac{sen(x)+1}{sen(x)-1}\right)+\,c$

O leitor pode derivar a função $\frac{1}{2}ln\left(\frac{|sen(x)+1|}{|sen(x)-1|}\right)$ para comprovar que

$$d\left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{|sen(x)+1|}{|sen(x)-1|}\right)\right]=\,sec(x)$$

Analogamente, a integral da $\int\,cosec(x).\,dx$ é $\frac{1}{2}ln\left(\frac{cos(x)+1}{cos(x)-1)}\right)+\,c$

SEÇÃO 3 - INTEGRAIS QUE INCORREM EM RELAÇÕES

Vamos resolver a seguinte integral por três modos diferentes, mostrando assim soluções distintas para a integral, do mesmo modo que mostramos anteriormente com a integral da $sec(x)$.

PINTEGRAL DE $\int\frac{dx}{x^2+1}$

Por substituição trigonométrica
$tan\,(\beta) = x,\, dx = sec^2\,(\beta)d\beta$
$cos\,(\beta) =\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

De onde concluímos que $sec^2\,(\beta) = x^2 + 1$
Voltando à integral e substituindo, vem

$$\int\frac{sec^2(\beta)d\beta}{sec^2(\beta)}\,=\,\int d\beta\,=\,\beta$$

Temos que,

$$tan\,(\beta)\,\,=\,x$$

$$cos\,(\beta)\,\,=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Podemos inferir que $\beta = arctan(x)$ e que $\beta = arcos\,(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})$ são soluções da integral.

Logo, chegamos a uma relação $arctan\,(x)$ $= arcos\,(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}) = arcsec\,(\sqrt{x^2\,+\,1})$

Neste passo, vamos resolver a integral

$$\int \frac{dx}{x^2+1}$$

Pelo método de Diano do numerador (MDf)

Impomos, $ln\ x^2\ | + 1| = u$

Portanto $e^u = x^2 + 1$

Derivando ambos os lados da equação acima, temos $e^u du = 2xdx$

Logo $dx = \frac{e^u du}{2x}$

Mas $x = \sqrt{e^u - 1}$

Voltando à integral e substituindo

$$\int \frac{e^u du}{e^u(2\sqrt{e^u - 1})}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{e^u - 1}}$$

Recorrendo a nova substituição impondo que $e^u = sec^2(\alpha)$

Derivando ambos os lados da equação temos

$e^u\, du = 2sec(\alpha)sec(\alpha)tan(\alpha)d\alpha = 2$
$sec2(\alpha)tan(\alpha)d\alpha$

Mas $e^u = sec^2(\alpha)$

Logo , $e^u du = 2e^u tan(\alpha)d\alpha$

Que nos leva a

$du = 2tan(\alpha)d\alpha$

Voltando à equação

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{e^u - 1}}$$

Faremos a substituições necessárias

$$\frac{1}{2}.2\int \frac{tan(\alpha)d\alpha}{\sqrt{sec^2(\alpha) - 1}}$$

Temos a identidade $tan2\,(\alpha) = sec^2(\alpha) - 1$

E $tan(\alpha) = \sqrt{sec^2(\alpha) - 1}$

Voltando à integral

$$\int \frac{tan(\alpha)d\alpha}{tan(\alpha)} = d\alpha = \alpha$$

Recorrendo às substituições, temos inicialmente que $e^u = sec^2(\alpha)$

$$sec(\alpha) = e^{\frac{u}{2}}$$

$\alpha = arcsec(e^{\frac{u}{2}})$

Entretanto,

$e^u = x^2 + 1$

Logo,

$$e^{\frac{u}{2}} = \sqrt{x^2 + 1}$$

Inferimos finalmente que

$$\alpha = \left(e^{\frac{u}{2}}\right) = arcsec(\sqrt{x^2 + 1})$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = arcsec(\sqrt{x^2 + 1}) + c$$

Confrontando, as soluções e unificando-as concluímos que da resolução 1, temos

$arctan\ (x) = arcos(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})$

Da resolução 2

$arcsec(\sqrt{x^2 + 1})$

logo temos relações trigonométricas

Podemos ainda pela resolução 2 e constatar a solução $arctan\ (x)$ da resolução .

Usando a relação trigonométrica

$tan(\alpha) = \sqrt{sec^2(\alpha) - 1}$

$$(\alpha) = arctan(\sqrt{sec^2(\alpha) - 1})$$

$$\alpha = arctan(\sqrt{e^u - 1})$$

porém $e^u = x^2 + 1$

$$\alpha = arctan(\sqrt{x^2 + 1 - 1})$$

$$\alpha = arctan(x)$$

A resolução da integral é normalmente apresentada como $arctan(x)$ porém pode ser também expressa as soluçõesFaremos a substituições necessárias

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) \text{ e } arccos(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})$$

Nestas condições podemos inferir 6 relações na combinação de

$$arctan\,(x) = arcsec\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = arccos(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})$$

RELAÇÕES:

1) $arctan\,(x) = arcsec\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

2) $sec(arctan\,(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

3) $cos(arctan\,(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

4) $arccos\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = arcsec(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})$

5) $sec\left(arcos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \sqrt{x^2 + 1}$

Resolução da seguinte integral

$$\int \sqrt{e^x - 1}.dx$$

Esta integral é de extrema relevância incorrendo em integrais recorrentes ao método.

Usando o método de Diano (MD) a integral fica mais clara de ser resolvida no domínio de e^u, embora se depare u uma outra integral não tão amigável, porém solúvel. O importante é que o método nos lega a oportunidade de resolver a integral em questão.

Pelo método

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

$$ln(f(x)) = u$$

resultando,

$$\tfrac{1}{2}ln(e^x - 1) = u$$

$e^x - 1 = e^{2u}$ (2), logoa a integral característica é:

$$\int \frac{e^{2u}du}{f(x)'}$$

$$f(x)' = \frac{1}{2}(e^x - 1)^{-\frac{1}{2}}e^x$$

$$f(x)' = \frac{1}{2}(e^{2u})^{-\frac{1}{2}}.(e^{2u} + 1)$$

$\int \frac{e^{2u}du}{\frac{1}{2}(e^{2u})^{-\frac{1}{2}}.(e^{2u}+1)}$, resultando em

$$2\int \frac{e^{3u}du}{e^{2u}+1}$$

Chegamos agora em uma integral interessante em que o numerador não é a derivada do denominador, porém podemos dividir o numerador pelo denominador a fim de separá-la em frações. Na separação, obtemos, facilmente que $\int \frac{e^{3u}du}{e^{2u}+1}$ é, $e^u - \frac{e^u}{e^{2u}+1}$

Voltando à integral $2\int \frac{e^{3u}du}{e^{2u}+1}$ e usando a separação, temos

$$2(\int e^u du - \int \frac{e^u}{e^{2u}+1}du) \quad (5)$$

A resolução de $\int e^u du$ é trivial e e^u vamos nomeá-la de integral **A.** $\int \frac{e^u}{e^{2u}+1}du$ e nomeá-la de integral **B**

Sendo assim, teremos como solução 2(**A+B).**

Recorreremos a uma substituição trigonométrica, impondo que $e\ u\ = tan\ (\Theta)$ (6) e que $e^{2u} = tan^2(\Theta)$

Derivando a primeira $e^u du = sec^2(\Theta)d\Theta$ (7)

Do denominador da integral, temos $e^{\ 2u}+1$ e substituindo na equação (6) chegaremos a $tan^2\ (\Theta) + 1$ que por sua vez é $sec2(\Theta)$

Fazendo as substituições na integral

$$\int \frac{e^u}{e^{2u}+1} du \quad (8)$$

Vem, em (6) e (7)

$$\int \frac{sec^2(\Theta)d\Theta}{sec^2(\Theta)} = \int d\Theta = \Theta$$

E pela equação (6) concluímos que $\Theta = arctan(e^u)$

Mas pela equação (3) temos que $e^u = \sqrt{e^x - 1}$

E substituindo na equação (5) ,

$$2(\sqrt{e^x - 1} - arctan(\sqrt{e^x - 1}))$$

$$\int \sqrt{e^x - 1}dx =$$

$$= 2(\sqrt{e^x - 1} - arctan(\sqrt{e^x - 1}))$$

Um bom exercício para o leitor seria derivar o resultado e comprovar, levando à integral $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

Montaremos uma tabela de algumas integrais que já resolvemos, porém são recorrentes na resolução pelo método

$$\int \frac{du}{\sqrt{e^u - 1}} = 2. arcsec(e^{\frac{u}{2}})$$

$$\int \frac{e^u du}{e^{2u}+1} = arctan(e^u)$$

$$\int \frac{e^u du}{\sqrt{e^{2u}-1}} = ln|e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}|$$

$$\int \frac{e^{3u} du}{e^{2u}+1} = e^u - arctan(e^u) + c$$

$$\int \frac{e^{3u} du}{e^{2u}+1} =$$

$$- ln|csc(arcsec(e^u) + ctg(arcsec(e^u)| + c$$

Dessa equação cuja solução é arctan(e^u) obtemos um padrão para integrais dessa família $\int \frac{e^{nu} du}{e^{2u}+1}$, em $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

para:

$n = 1$

$$\int \frac{e^u du}{e^{2u}+1} = arctan(e^u)$$

$n = 2$

$$\int \frac{e^{2u} du}{e^{2u}+1} = \frac{1}{2} ln|e^{2u} + 1|$$

$n = 3$

$$\int \frac{e^{3u} du}{e^{2u}+1} = \int e^u du - \int \frac{e^u du}{e^{2u}+1}$$

$$\int \frac{e^{3u} du}{e^{2u}+1} = e^u - \int \frac{e^u du}{e^{2u}+1}$$

repare que a segunda integral é exatamente igual à integral para $n = 1$

$e^u - arctan(e^u)$

$n = 4$

$$\int \frac{e^{4u}du}{e^{2u}+1} = \int e^{2u}du - \int \frac{e^{2u}du}{e^{2u}+1}$$

$$\int \frac{e^{4u}du}{e^{2u}+1} = \frac{e^{2u}}{2} - \int \frac{e^{2u}du}{e^{2u}+1}$$

porém a segunda integral é exatamente igual à integral de $n = 2$

$$\int \frac{e^{4u}du}{e^{2u}+1} = \frac{e^{2u}}{2} - \frac{1}{2}ln|e^{2u} + 1|$$

Generalizando,

$$\int \frac{e^{ku}du}{e^{2u}+1} = \frac{e^{(k-2)u}}{k-2} - \int \frac{e^{(k-2)u}du}{e^{2u}+1}$$

para todo $k \geq 3$ natural

Essas integrais já foram demonstradas para os casos dos n=1, 2 e 3. Vamos demonstrar para n=4.

Será feita a divisão de $\frac{e^{4u}}{e^{2u}+1}$

$$\frac{e^{4u}du}{e^{2u}+1} = \frac{e^{2u}(e^{2u}+1)-e^{2u}}{e^{2u}+1} = e^{2u}du - \frac{e^{2u}du}{e^{2u}+1}$$

então a integral

$$\int \frac{e^{4u}du}{e^{2u}+1} = \int e^{2u}du - \int \frac{e^{2u}du}{e^{2u}+1}$$

o leitor pode perceber que a integral $\int \frac{e^{2u}du}{e^{2u}+1}$ é a integral do caso anterior para n=2 e que tem como solução $\frac{1}{2}\int ln|e^{2u} + 1|$, nestas condições $\int \frac{e^{4u}du}{e^{2u}+1} = \frac{e^{2u}}{2} - \frac{1}{2}ln|e^{2u} + 1|$

Resumindo

$$\int \frac{e^{nu}du}{e^{2u}+1}$$

para n=1, usaremos o método de substituição trigonométrica para n=2 usaremos $\frac{1}{2}\int ln|e^{u} + 1|$, pois a integral é do tipo $\int \frac{dF}{F}$

e para $n \geq 3$ usaremos a separação por frações $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{v(x)}{g(x)}$

SEÇÃO 4

INTEGRAIS POR SEPARAÇÃO DE FRAÇÕES IMAGINÁRIAS

Apresentamos uma identidade matemática interessantíssima: a função $arctan(x)$ pode ser escrita em termos de uma expressão imaginária, dada por $\frac{i}{2}ln\frac{|x+i|}{|x-1|} + c$. Para verificar essa igualdade, basta derivar a expressão $\frac{i}{2}ln\frac{|x+i|}{|x-1|} + c$ para se obter $d(arctan(x)) = \frac{dx}{x^2+1}$

Para demonstrar essa constatacão de outra forma, resolvemos a integral $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$ por dois métodos diferentes e comparamos os resultados. O primeiro método foi o que utilizamos inicialmente para obter a expressão imaginária, e o segundo método foi pelo método de Diano apresentado na seção anterior.

Resolução de $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$

Para resolver a integral $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$, faremos por separação de frações. Isso significa que vamos decompor a fração em duas frações mais simples, cujas integrais sejam mais fáceis de calcular. Mas como fazer isso? transformamos o denominador em uma identidade imagināri , $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$, em que i é a unidade imaginária, tal que $i = \sqrt{-1}$.

Após separar a fração em duas frações mais simples, temos:

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \frac{Ax}{x+i} + \frac{Bx}{x-i}$$

Em que A e B são constantes reais que devem ser determinadas. Para isso, vamos igualar os numeradores das frações e comparar os coeficientes dos termos correspondentes. assim, temos:

$$\frac{x^2dx}{x^2+1} = \frac{Ax^2-Axi+Bx+Bxi}{x^2+1}$$

Comparando os coeficientes, obtemos o seguinte sistema de equações:
$A+B=1$ e $-A+B=0$
resolvendo o sistema, encontramos que

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Substituindo esses valores na integral, obtemos:

$$\frac{Ax}{x+i} + \frac{Bx}{x-i} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{xdx}{x+i} + \int \frac{xdx}{x-i}\right]$$

$$\int \frac{xdx}{x+i}$$

Abordando a integral aplicamos o método de Diano, inicialmente estabelecendo a equação característica do método
$ln|x+i| = s$ logo $x+i=e^s$
$dx = e^s ds$
derivando a equação em ambos lados, temos $dx = e^s ds$, mas $x = e^s - i$
retornando à equação $\int \frac{xdx}{x+i}$ e substituindo

$$\int \frac{e^s-i}{e^s}dx$$

$$\int \frac{e^s-i}{e^s}e^s ds$$

$$\int (e^s - i)ds$$
$$= \int e^s ds - i\int ds$$
$$= e^s - is$$

fazendos as devidas substituições chegamos a $x+i-iln|x+i|$

Resolvendo a outra integral $\int \frac{xdx}{x-i}$ de forma análoga, obtemos $x-i+iln|x-i|$ então

$$\frac{1}{2}\left[\int \frac{xdx}{x+i} + \int \frac{xdx}{x-i}\right] =$$

$$\frac{1}{2}[x+i-iln|x+i| + x - i + iln|x-i|]$$

que nos leva a $x + \frac{i}{2}ln|\frac{x-i}{x+i}|$ que é a solução da integral original.

Agora vamos resolver a integral por outro método de integração $\frac{x^2dx}{x^2+1}$ dividindo o numerador pelo denominador obtendo a seguinte separação $1 - \frac{1}{x^2+1}$ então temos duas integrais simples $\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$ e a solução é $x - arctan(x) + C$ igualando as soluções temos $x - arctan(x) = x + \frac{i}{2}ln|\frac{x-i}{x+i}| + c$ decorrendo em $arctan(x) = -\frac{i}{2}ln|\frac{x-i}{x+i}| + c$ arranjando a equação, temos $arctan(x) = \frac{i}{2}ln|\frac{x+i}{x-i}| + c$

TEOREMA 1 (BONNY-DIANO)

Lema: O $arctan(x)$ pode ser definido pela relação imaginária $i.\,ln|\sqrt{\frac{x+i}{i-x}}|$

Prova do Teorema

Seja a relação mostrada anteriormente $arctan(x) = \frac{i}{2}ln|\frac{x+i}{x-i}| + c$

Temos que $x = tan(\theta)$. Usando a condição de contorno $\theta = 0 \Rightarrow tan(\theta) = 0$ logo $x = 0 \Rightarrow arctan(0) = 0$ fazendo as substituições,

$$0 = \frac{i}{2}ln|\frac{+i}{-i}| + c \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{i}{2}ln| - 1| + c$$

$0 = \frac{i}{2}ln|\, i^2| + c$ que nos leva a

$c = -\, i.\, ln|\, i|$

Nestas condições, a relação mostra-se da seguinte forma:

$$arctan(x) = \frac{i}{2}ln|\frac{x+i}{x-i}| - iln|i|,$$

$$arctan(x) = i\left[ln|\sqrt{\frac{x+i}{x-i}}| - ln|i|\right]$$

$$arctan(x) = i.ln\frac{1}{i}|\sqrt{\frac{x+i}{x-i}}|$$

$$arctan(x) = i.ln|\sqrt{\frac{x+i}{i^2(x-i)}}|$$

$$arctan(x) = i.ln(\sqrt{\frac{x+i}{-1(x-i)}})$$

organizando, vem a prova,

$$arctan(x) = i.ln(\sqrt{\frac{x+i}{i-x}})$$

INTEGRAIS RECORRENTE NO MÉTODO

A seguinte integral é recorrente em algumas soluções que veremos posteriormente. Portanto vamos obter a sua solução para as demonstrações ficarem menos prolixas $\int \frac{e^{nx}dx}{\sqrt{c \pm e^{nx}}}$ tem como solução $\pm\frac{2}{n}\sqrt{f(x)}$ em que

$f(x) = c \pm e^{nx}$

DEMONSTRAÇÃO DA SOLUÇÃO

Usando o método de Diano

$$ln|\sqrt{c \pm e^{nx}}| = u$$

$$c \pm e^{nx} = e^{2u}$$

usando a integral característica

$\int \frac{f(x)du}{g(x)'}$ em que $g(x) = \sqrt{c \pm e^{nx}}$

e $g(x)' = \frac{1}{2}(c \pm e^{nx})^{\frac{-1}{2}}.(\pm ne^{nx})$

$$g(x)' = \frac{1}{2}(e^{2u})^{\frac{-1}{2}}.(\pm ne^{nx})$$

$$g(x)' = \frac{1}{2}e^{-u}.(\pm ne^{nx})$$

$$\int \frac{f(x)du}{g(x)'} = \int \frac{f(x)du}{g(x)'} = 2\int \frac{e^{nx}du}{e^{-u}.(\pm ne^{nx})}$$

$$\pm\frac{2}{n}\int\frac{du}{e^{-u}} = \pm\frac{2}{n}\int e^{u}du = \pm\frac{2}{n}e^{u} = \pm\frac{2}{n}\sqrt{c \pm e^{nx}}$$

Portanto, a solução da integral é $\pm\frac{2}{n}\sqrt{c \pm e^{nx}} + k$ esta solução será usada na resolução de algumas integrais subsequentes.

CONCLUSÕES FINAIS

Em conclusão, este artigo apresenta uma contribuição significativa para o campo do cálculo integral, introduzindo métodos alternativos que ampliam as ferramentas disponíveis para matemáticos e engenheiros. O método proposto, utilizando o operador logaritmo natural, oferece uma abordagem inovadora que pode simplificar o cálculo de integrais que seriam complexas ou até mesmo impraticáveis pelo método tradicional. Além disso, o Método de Diano imaginário (MDi) abre novas perspectivas para o tratamento de integrais com raízes polinomiais imaginárias, uma área que raramente é explorada na literatura. E esses métodos não apenas enriquecem o repertório de técnicas de integração, mas também demonstram a natureza evolutiva da matemática, onde novas soluções podem surgir para desafios antigos, potencializando o avanço científico e tecnológico.

Banco de integrais