



CAPÍTULO 6

EXPLORANDO A TÁBUA DE PITÁGORAS POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS EM UMA TURMA DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Raimundo Cardoso da Silva Filho

Universidade do Estado do Amazonas – UEA
Tefé – Amazonas

Carlos José Ferreira Soares

Universidade do Estado do Amazonas – UEA
Tefé - Amazonas
<https://orcid.org/0000-0002-0265-8944>

INTRODUÇÃO

No campo da educação matemática, a Tábua de Pitágoras tem sido amplamente explorada como uma ferramenta essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático, especialmente no estudo da multiplicação e identificação de padrões numéricos. Estudos de Boyer e Merzbach (2011) e Eves (2011) destacam que, desde civilizações antigas, a Tábua de Pitágoras desempenha um papel importante na educação, facilitando a compreensão das propriedades multiplicativas. No contexto atual, a investigação matemática surge como uma abordagem que permite aos alunos explorarem ativamente conceitos, formulando conjecturas e testando suas validades, (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2016).

A presente pesquisa, desenvolvida com uma turma do 8º ano do ensino fundamental de uma escola em Tefé/AM, buscou responder à seguinte questão: **quais as conjecturas que os alunos elaboram ao explorar a Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas?** O principal objetivo foi analisar essas conjecturas, destacando as estratégias utilizadas e as dificuldades enfrentadas durante o processo investigativo.

O desenvolvimento da pesquisa foi relevante pela necessidade de encontrar métodos de ensino que auxiliem os alunos a superar dificuldades de aprendizagem em matemática. A abordagem investigativa oferece uma alternativa que promove o

desenvolvimento do raciocínio crítico e a compreensão dos conceitos matemáticos, como defendido por Marconi e Lakatos (2017). O objetivo geral da pesquisa foi analisar as conjecturas elaboradas pelos alunos do 8º ano do ensino fundamental durante a exploração da Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas. Especificamente, buscou-se: i) explorar a Tábua de Pitágoras como ferramenta para investigações matemáticas; ii) identificar as estratégias e conjecturas desenvolvidas pelos alunos; e iii) destacar as dificuldades enfrentadas durante o processo de aprendizagem.

A metodologia adotada foi de natureza qualitativa, conforme descrito por Creswell (2021), que enfatiza a importância de uma análise profunda e contextualizada dos fenômenos estudados. A pesquisa de campo permitiu uma observação direta das atividades, utilizando-se de técnica e instrumentos como observação participante, caderno de anotações e questionário para coleta de dados. A análise dos dados seguiu a técnica descritiva qualitativa, conforme proposto por Soares (2022), proporcionando uma compreensão detalhada das evidências obtidas.

Durante a investigação, os alunos conseguiram identificar padrões relevantes na Tábua de Pitágoras. O Grupo A, explorou a propriedade distributiva, percebendo que somas de colunas específicas levavam a produtos equivalentes. O Grupo B, destacou a presença de raízes quadradas na diagonal principal e identificou uma simetria espelhada na distribuição dos números. Por fim, o Grupo C confirmou a propriedade distributiva e utilizou a tabela para deduzir divisões de maneira indireta. Esses resultados mostram que a investigação matemática pode contribuir para novas descobertas e ampliar a compreensão dos conceitos pelos alunos, como observado por Riess (2010), que enfatiza a importância da colaboração e do diálogo para consolidar a aprendizagem, conforme ocorreu durante a realização das investigações matemáticas.

TÁBUA DE PITÁGORAS

A Tábua de Pitágoras, ou tabela de multiplicação, é um instrumento que pode ser explorado para o ensino de Matemática, principalmente, no estudo de relações matemáticas associadas com propriedades multiplicativas. Boyer e Merzbach (2011), destacam que, esta tabela facilita a compreensão dos conceitos básicos de multiplicação e auxilia no desenvolvimento do pensamento matemático. Nesta seção, destaca-se a Tábua de Pitágoras na educação matemática a partir das perspectivas de alguns autores, como por exemplo, Boyer e Merzbach (2011), Eves (2011) e outros estudiosos contemporâneos.

De acordo com Boyer e Merzbach (2011), a Tábua de Pitágoras foi amplamente utilizada por diversas civilizações antigas, incluindo os gregos e os babilônios, como um meio de facilitar o ensino e a aprendizagem da multiplicação, uma operação aritmética fundamental. Essas civilizações compreendiam a importância de uma ferramenta que pudesse simplificar cálculos complexos e ensinar as bases da aritmética a jovens alunos.

Para esses autores, a adoção da Tábua de Pitágoras por diferentes culturas indica um reconhecimento universal da sua eficácia como ferramenta educacional. Essa troca de conhecimento entre civilizações demonstra que, desde os tempos antigos, havia uma valorização da educação e uma preocupação em encontrar métodos que melhorassem o ensino e a aprendizagem, buscando sempre aprimorar os métodos de ensino para beneficiar as gerações futuras.

O trabalho de Boyer e Merzbach (2011) nos faz pensar em como a matemática é uma linguagem universal e atemporal. Imaginar que, há milhares de anos, civilizações distantes usavam a Tábua de Pitágoras para educar suas crianças nos aproxima de um legado comum de conhecimento humano. Isso nos faz refletir que as bases que construímos hoje em educação têm raízes profundas e que cada esforço educativo é uma continuação dessa tradição histórica.

Segundo Eves (2011), a tabela de multiplicação, ou Tábua de Pitágoras, é uma das primeiras ferramentas educacionais desenvolvidas para ajudar estudantes a dominar as operações básicas da aritmética. Seu uso pode ser rastreado até os antigos babilônios, que reconheciam a necessidade de uma abordagem sistemática para ensinar multiplicação. Os gregos posteriormente adotaram e aprimoraram essa ferramenta, incorporando-a em suas práticas educativas e matemáticas.

A adoção e aprimoramento da Tábua de Pitágoras pelos gregos nos faz refletir sobre a importância de construir, sobre as conquistas dos que vieram antes de nós. Cada geração tem a oportunidade de pegar algo útil e torná-lo ainda melhor, mostrando que a inovação não é apenas criar algo novo, mas também melhorar o que já existe. Isso nos inspira a olhar para as ferramentas e métodos educacionais atuais e pensar em como podemos evoluí-los para beneficiar futuros estudantes.

A tábua de Pitágoras, é obvio, deve ser utilizada dentro dos mesmos princípios didáticos e curriculares da tabuada tradicional, ou seja, após as devidas explicações do que seja uma multiplicação e divisão. No entanto acredito que o uso da tábua de Pitágoras tornaria pelo menos, o aprendizado mais divertido (Zuila, 2014, p. 19).

Nesta perspectiva, a exploração da Tábua de Pitágoras torna a aula mais dinâmica e a aprendizagem dos alunos acontece de forma prazerosa, pois, eles se divertem durante a utilização deste instrumento. Dessa forma, trabalhar a Tábua de Pitágoras em sala de aula é uma metodologia norteada pela ludicidade e caráter investigativo, uma vez que a distribuição dos números em linhas e colunas desafia os alunos a encontrar e fundamentar regularidades matemáticas.

A Tábua de Pitágoras é uma tabela formada por 10 linhas e 10 colunas, totalizando 100 casas. É bastante utilizada nas escolas como um recurso didático para o ensino de multiplicação. Geralmente, sua exploração em sala de aula baseia-se no preenchimento da tabela. A Figura 1 apresenta as duas tabelas.

Figura 1: Tábua de Pitágoras

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Fonte: Silva (2019).

Coll (2004) analisa o uso da Tábua de Pitágoras em ambientes de aprendizagem colaborativa. Ele defende que a Tábua pode ser utilizada para promover a interação e a cooperação entre os alunos, melhorando a compreensão coletiva dos conceitos matemáticos. Assim, destaca a importância de utilizar a Tábua de Pitágoras em atividades de grupo que incentivem a colaboração e a troca de conhecimentos.

É possível mostrar, utilizando a Tábua de Pitágoras, as propriedades da multiplicação como comutativa, distributiva, associativa e elemento neutro e também o estudo de áreas geométricas, tornando uma aula dinâmica que possibilita ao aluno uma maior participação, que o instiga a continuar aprendendo usando um artefato histórico como esse.

São desenvolvidas sequências de questões em que os alunos investigam e constroem a propriedade comutativa da multiplicação e o conceito de áreas em geometria, integrando a aritmética de forma gradativa de acordo com o nível de ensino em que eles se encontram. (Miranda; Silva; Pimenta, 2017, p.358)

Tall (2013) enfoca que a aplicação da Tábua de Pitágoras no desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e a participação é fundamental para a eficácia da aprendizagem. Ele argumenta que o uso regular da tábua pode ajudar os alunos a melhorar sua velocidade e precisão em cálculos mentais. A participação deve levar

em conta o estágio de desenvolvimento do aluno, referente à atividade mental e física de cada um. Não podendo cobrar igualmente a participação de um aluno que tem comportamento mais retraído de um que é ativo e mais participativo, integrar a Tábua de Pitágoras em atividades investigativas e contextos culturais pode não só melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também tornar a aprendizagem mais envolvente e significativa para os alunos.

Investigações matemáticas

No contexto da educação matemática, diferentes abordagens metodológicas têm sido exploradas para enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, destacando-se algumas tendências significativas. Essas abordagens, por exemplo, como Investigação Matemática, Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, não só proporcionam aos estudantes um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, mas também incentivam o desenvolvimento de habilidades analíticas e de pensamento crítico.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (Brasil, 2018, p. 267).

No Ensino Fundamental, métodos matemáticos como resolução de problemas, investigações, desenvolvimento de projetos e modelagem desempenham um papel fundamental. Eles não apenas facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também promovem o desenvolvimento de habilidades essenciais como raciocínio, representação, comunicação e argumentação.

A investigação Matemática é uma abordagem que auxilia a forma como os alunos aprendem matemática, incentivando-os a participar ativamente da descoberta e compreensão dos conceitos matemáticos. Em vez de apenas memorizarem fórmulas e procedimentos, os alunos são estimulados a explorar problemas, identificar conjecturas e testar suas validades de maneira investigativa e prática.

Investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão, só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos respostas prontas, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2016, p.9).

Os autores destacam perfeitamente a essência do que significa investigar, especialmente no contexto da Educação Matemática. Investigar não se limita a resolver problemas altamente complexos ou inéditos, pelo contrário, a investigação envolve curiosidade e a busca por respostas para questões que são relevantes e significativas, mesmo que sejam aparentemente simples ou já exploradas por outros.

Um elemento fundamental em qualquer investigação matemática é o processo inicial de identificar de forma clara e precisa o problema ou problemas que serão investigados. Isso não apenas define a direção da pesquisa, mas também estabelece as bases para a formulação de hipóteses, a coleta de dados e a busca por soluções fundamentadas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2016).

Sobre a realização de investigações matemáticas em sala de aula, esses autores explicam que:

[...] a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2016, p. 20).

De acordo com esses autores supracitados, esse tipo de atividade se desenvolve habitualmente em três fases principais durante uma aula ou conjunto de aulas. Primeiramente, temos a introdução da tarefa, momento em que o professor apresenta a proposta à turma, seja oralmente ou por escrito. Em seguida, ocorre a realização da investigação, que pode ser feita individualmente, em pares, em pequenos grupos ou com a turma toda. Por fim, há a discussão dos resultados, onde os alunos compartilham com os colegas suas descobertas. Essa abordagem estruturada não apenas facilita o entendimento e a participação ativa dos alunos, mas também promove um ambiente colaborativo e de pensamento crítico, essencial para o desenvolvimento de habilidades investigativas. O Quadro 1 apresenta um resumo dessas fases.

Quadro 1: Fases do desenvolvimento de uma atividade de investigação

Fases	Ações
Primeira	Introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito.
Segunda	Realização da investigação, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma.
Terceira	Discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

Fonte: Ponte; Elaborado pelos autores com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), Soares e Quartieri (2024) acreditam ser totalmente possível para os alunos, na sala de aula de matemática, engajarem-se em processos como a formulação de questões, elaboração de conjecturas, testes, refinamento de questões e conjecturas, demonstração, refinamento de demonstrações e comunicação dos resultados aos colegas. Eles destacam que essa abordagem permite aos estudantes explorar e entender profundamente os conceitos matemáticos, além de desenvolver importantes habilidades de pensamento crítico e análise.

Tomando como base essa abordagem, o trabalho de formulação de questões, elaboração de conjecturas, testes, refinamento, demonstração e comunicação dos resultados pode contribuir com a construção de conhecimentos matemáticos em sala de aula. Esse processo torna o aprendizado mais ativo e profundo, permitindo que os alunos se envolvam criticamente com os conceitos. Ao interagir com as conjecturas e demonstrações e compartilhar os resultados com os colegas, os estudantes desenvolvem uma compreensão mais sólida da matemática e promovem um ambiente de apoio mútuo e pensamento crítico.

Segundo Ponte *et al.* (1998), a investigação matemática e a resolução de problemas são frequentemente confundidas, pois ambos envolvem processos matemáticos complexos e atividades desafiadoras, mas possuem objetivos e métodos diferentes.

O aspecto mais distintivo das atividades de investigação em relação à resolução de problemas diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto na resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente especificada ao aluno, na atividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas, necessitando de ser trabalhadas, tornadas mais precisas e transformadas em questões concretas pelo próprio aluno. (Ponte, *et al.*, 1998, p.12).

O autor ressalta uma diferença crucial entre investigação e resolução de problemas, focando na natureza das questões envolvidas. Na resolução de problemas, as questões são apresentadas de forma clara e específica, o que facilita a busca por soluções diretas. Em contraste, a investigação lida com questões inicialmente vagas, exigindo que o aluno se envolva ativamente no processo de clarificação e definição dos problemas.

A investigação matemática não só fortalece o entendimento dos conceitos, mas também nutre de habilidades essenciais como o pensamento crítico e a colaboração. Ao envolver os alunos no ciclo de formulação de questões, elaboração de conjecturas, testes, refinamento, demonstração e comunicação dos resultados, a sala de aula se transforma em um espaço dinâmico onde o aprendizado é significativo e profundamente enriquecedor. Essa abordagem não apenas prepara os estudantes para desafios acadêmicos futuros, mas também os capacita a se tornarem pensadores independentes e engajados com o conhecimento matemático.

Procedimentos metodológicos

Para o desenvolvimento, a pesquisa, metodologicamente, no que diz respeito à abordagem, foi caracterizada como qualitativa, tendo em vista que ela buscou a compreensão minuciosa do processo de aprendizagem em relação às investigações da Tábua de Pitágoras para formulação, teste e validação de conjecturas. Creswell (2021) descreve a pesquisa qualitativa como um processo de investigação que busca compreender problemas e fenômenos distintos. Ele enfatiza que o pesquisador

constrói uma visão complexa e holística, analisa contextos e relata as perspectivas detalhadas dos participantes. É uma abordagem que valoriza a profundidade das experiências humanas e o contexto em que ocorreram, permitindo uma compreensão rica sobre fatos e fenômenos estudados.

Quanto ao procedimento de pesquisa, foi uma pesquisa de campo. Marconi e Lakatos (2017) destacam que essa metodologia envolve a observação direta de fatos e fenômenos que ocorreram naturalmente, com coleta de dados baseada em registros considerados relevantes para posterior análise. Dessa forma, a pesquisa de campo permitiu ao pesquisador coletar dados no próprio ambiente onde o estudo foi conduzido.

Essa abordagem permitiu uma observação direta dos fenômenos naturais e a produção de dados relevantes para análise. Essa escolha foi essencial para obter uma compreensão autêntica e detalhada do ambiente real onde a pesquisa se desenvolveu, proporcionando informações significativas para a investigação.

Em relação à técnica e aos instrumentos que foram utilizados na coleta dos dados, destacaram-se a observação participante e o caderno de anotações. Quanto à técnica, foi adotada devido o pesquisador ter participado de forma ativa das atividades que foram aplicadas, possibilitando registros de dados importantes durante suas intervenções. Sobre isso, Creswell (2014) destaca que a pesquisa participante é uma técnica que proporciona a interação ativa do pesquisador, participando das atividades e interações com os participantes. Ele enfatiza que, através das anotações, os pesquisadores podem capturar detalhes e aspectos importantes que possa ajudar os pesquisadores a desenvolver uma compreensão mais profunda e rica do fenômeno estudado.

O caderno de anotações, conforme destacado por Marconi e Lakatos (2019), é um instrumento valioso na coleta de dados em pesquisas qualitativas, pois permite registrar observações detalhadas, percepções e informações relevantes que ocorrem durante o desenvolvimento do estudo.

Neste estudo, o caderno de anotações foi utilizado para registrar as reflexões e as percepções dos alunos durante a tarefa de investigação matemática explorando a de Tábua de Pitágoras, ao explorar os conceitos e os momentos de formulação e validação de conjecturas. Os registros incluíram também observações sobre a dinâmica dos grupos e as estratégias que os alunos usaram para resolver as tarefas. Dessa forma, o caderno de anotações foi essencial para documentar o processo investigativo e compreender mais detalhadamente as descobertas feitas pelos alunos durante a pesquisa.

Após a coleta de dados foi utilizada a técnica de análise descritiva qualitativa para a realização da análise. Soares (2022, p. 75) explica que:

[...] a análise descritiva qualitativa é uma importante técnica de análise de dados qualitativos que apresenta etapas bem definidas de como o pesquisador deve atuar em relação ao tratamento de informações, evidências e descobertas coletadas durante a coleta de dados. É uma alternativa que pode ser utilizada para analisar dados qualitativos de pesquisas na área da educação, educação matemática e outras áreas, ou seja, é uma ferramenta de análise de dados que pode ser explorada em várias áreas do conhecimento.

A escolha da análise descritiva qualitativa justificou-se porque a presente pesquisa teve o intuito de descrever de forma detalhada os resultados que foram produzidos, imbricando-os com o referencial teórico, buscando a compreensão e interpretação das evidências. Desta forma, esta técnica de análise proporcionou o tratamento dos dados fundamentados em argumentos científicos que foi fundamental para atingir o objetivo de analisar as conjecturas elaboradas pelos alunos do 8º ano durante a exploração da Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas.

Os sujeitos participantes do estudo foram uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Tefé/AM. A escolha se deu devido a observações feitas durante a disciplina de Estágio Supervisionado, que indicaram que a maioria dos alunos tinha dificuldade na operação de multiplicação, e a exploração da Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas foi a alternativa metodológica explorada. Acreditou-se que a exploração da Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas poderia auxiliar na aprendizagem dos alunos.

Nesse sentido, foi realizada uma atividade investigativa explorando a Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas. Para a realização desta atividade, a turma foi dividida em grupos de 3 ou 4 alunos em cada grupo e as atividades deste trabalho de pesquisa foram desenvolvidas durante 2 encontros.

No primeiro encontro, com duração de 1 hora-aula, foi apresentada a proposta do presente trabalho de pesquisa para a turma que participou da investigação, que envolveu a exploração da Tábua de Pitágoras por meio de uma tarefa investigativa, destacada no Quadro 2. Nesse encontro foi explicado como seria realizada a tarefa e também foi entregue para cada aluno o Termo de Consentimento Livre Esclarecido de Crianças e Adolescentes (TCLE/CA), para que fosse entregue aos pais ou responsáveis assinarem, permitindo a participação voluntária neste trabalho de pesquisa.

No segundo encontro, com duração de 3 horas-aula, foi desenvolvida a tarefa investigativa explorando a Tábua de Pitágoras (Figura 2), proporcionando o alcance do objetivo de explorar a Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas.

Figura 2 – tarefa de investigações matemáticas na Tábua de Pitágoras

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

Tomando como base as orientações de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a tarefa foi desenvolvida com os participantes da pesquisa em três fases interativas. Na primeira, cada grupo recebeu a tarefa impressa para facilitar a leitura e compreensão, permitindo que cada aluno tivesse um contato inicial com a tarefa. Na segunda fase, os alunos, em grupos, passaram a investigar as questões, formular hipóteses, testá-las e, por meio de tentativa e erro, refinar e validar suas conjecturas. A terceira fase da tarefa investigativa correspondeu a socialização dos resultados, em que cada grupo apresentou para toda a turma os resultados construídos. Desta forma, foi alcançado o objetivo de identificar as estratégias e conjecturas desenvolvidas pelos alunos.

Na última fase, os grupos compartilharam os resultados, explicando os diferentes caminhos que seguiram para resolver a tarefa, o que gerou uma discussão produtiva sobre as estratégias adotadas e os desafios encontrados, favorecendo o alcance do objetivo de compreender as dificuldades enfrentadas durante o processo de aprendizagem.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta seção apresenta a análise dos resultados construídos durante o desenvolvimento da tarefa descrita na Figura 2. Essa análise é apresentada em dois momentos: i) Investigação, formulação, teste e validação de conjecturas; e ii) Socialização dos resultados.

i) Investigação, formulação, teste e validação de conjecturas

Neste momento são apresentados os resultados das discussões e procedimentos desenvolvidos pelos alunos para a produção das evidências.

No início dessa fase, o Grupo A questionou o pesquisador.

Aluno A1 – Como vamos encontrar alguma coisa aqui? A gente só vê números repetidos.

Pesquisador – Verifique se você consegue enxergar alguma relação entre esses números.

Aluno A4 – Se juntarmos o número 6 da coluna 3 com o número 8 da coluna 4, obtemos o número 14 da coluna 7.

Pesquisador – Isso mesmo, viu que podemos encontrar conjecturas na Tábua de Pitágoras.

Aluno A2 – Sim! Podemos chamar de propriedade distributiva?

Pesquisador – Sim!

A1 – Na diagonal principal encontramos todas as raízes quadradas.

A3 – Encontramos também simetrias.

Os comentários dos alunos do Grupo A mostram que as investigações feitas a partir da exploração da Tábua de Pitágoras resultaram em algumas descobertas. Eles reconheceram as conjecturas formuladas e justificaram o porquê. Para Ponte, *et al.* (1998) é comum ocorrerem descobertas durante investigações matemáticas, já que elas favorecem a formulação, o teste e a validação ou refutação de conjecturas.

Essas descobertas foram destacadas pelos alunos conforme ilustra a Figura 3.

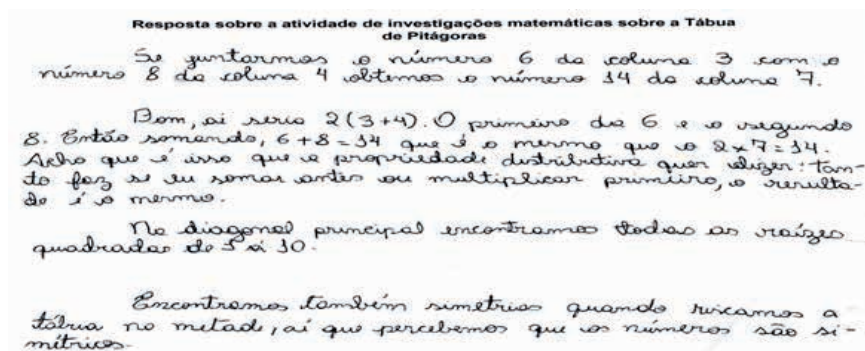
Figura 3- Marcações dos alunos do Grupo A

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

As marcações da Figura 3 significam a diagonal principal, ou seja, os alunos perceberam que todos os números possuem raízes quadradas exatas. Além disso, também representam simetrias e a propriedade da distributiva. As investigações matemáticas trazem um verdadeiro espírito de atividade matemática para a sala de aula. Nesse contexto, os alunos são incentivados a agir como matemáticos, formulando questões, fazendo conjecturas, realizando provas e refutações, além de apresentar seus resultados e discutir com os colegas (Brasil, 2018).

Figura 4 – Justificativa das descobertas dos alunos do Grupo A



Fonte: Dados da pesquisa, 2024

A Figura 4 destaca as justificativas das descobertas dos alunos do Grupo A sinalizadas na Figura 3. Onde eles ilustram nas suas marcações as descobertas da propriedade da distributiva, das raízes quadradas exatas e também das simetrias. Conforme Soares (2021), atividades investigativas são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático, pois permitem que os alunos explorem conceitos de forma ativa e fundamentada, registrando suas descobertas de maneira organizada.

O Grupo B também requisitou a presença do pesquisador e compartilhou suas descobertas.

Aluno B1- Não existe só a multiplicação nessa tabela, tem divisão e raiz quadrada.

Pesquisador - Ok, então justifique as descobertas de vocês.

Aluno B4 - Eu observei os números na tabela, eu notei que a diagonal principal estavam as raízes quadradas, fui testando uma por uma e vi que vai até a raiz quadrada do 100,

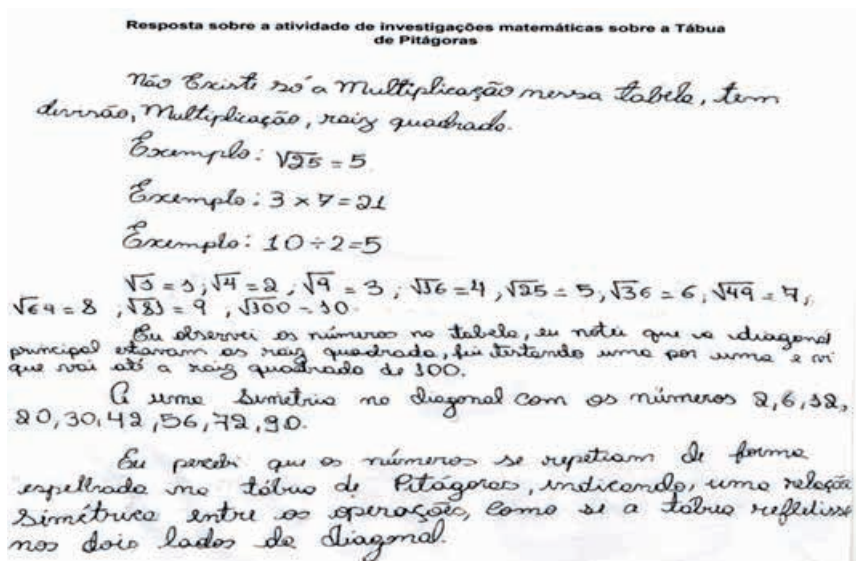
Aluno B3 – A uma simetria na diagonal.

Aluno B2 – É mesmo.

Pesquisador – Como você conseguiu enxergar essa simetria?

Aluno B3 – Eu percebi que os números se repetem de forma espelhada na Tábua de Pitágoras, indicando uma relação simétrica entre as operações, como se a tábua refletisse nos dois lados da diagonal.

Figura 5 – Anotações e percepções dos alunos do Grupo B



Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

A figura 5 demonstra as afirmações apresentadas pelos alunos do Grupo B, ilustrando suas descobertas. Destacaram as regularidades encontradas, como as raízes quadradas exatas que vai do 1 ao 100 e as simetrias dos números que vai do 2 ao 90. O diálogo entre o pesquisador e os alunos do Grupo B foi fundamental para as descobertas, pois as perguntas instigaram os alunos a registrarem suas ideias. Soares (2021) destaca a importância do papel do professor no trabalho com investigação matemática, pois, desempenha um papel essencial nas aulas investigativas. Durante a exploração desse tipo de atividade em sala de aula, a intervenção do professor como mediador do processo é muito relevante para potencializar a aprendizagem e desenvolver o raciocínio matemático (Soares; Quartieri, 2024).

O Grupo C chegou na mesma conclusão que o Grupo A com respeito a propriedade da distributiva. O diálogo a seguir enfatiza esse fato.

Aluno C1- Encontrei uma distributiva aqui.

Pesquisador – Me mostre como você chegou a essa conclusão.

Aluno C1 – É assim, se somarmos uma coluna com a outra por exemplo, a coluna do 3 com a coluna do 5 vai dá a coluna do 8, assim. Por exemplo, para $3 \times (3 + 5)$, é o mesmo que $(3 \times 3) + (3 \times 5)$, nas duas formas resulta em 24, que chamamos de distributiva.

Pesquisador – Além da distributiva vocês encontraram outra conjectura na tábua de Pitágoras?

Aluno C3 – Eu encontrei relações matemáticas.

Pesquisador – Quais?

Aluno C3 – Além da multiplicação a Tábua de Pitágoras também pode ser usada para entender as divisões pois você vê que a multiplicação é o inverso da divisão. Na linha do número 4 e na coluna do número 3, o 12 é divisível por 4 que dá 3. A gente não vê a divisão diretamente, mas usando os produtos da Tábua de Pitágoras, você pode identificar o número que quando multiplicado pelo divisor, resulta no dividendo, $3 \times 4 = 12$.

Pesquisador – ok, muito bom.

Figura 6 – Marcações do Grupo C

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Dados da pesquisa, 2024.

A Figura 6 ilustra as conjecturas encontradas na Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas, pelos alunos do Grupo C. Conseguiram encontrar a propriedade da distributiva e outras relações matemáticas. Destacam a propriedade da distributiva marcada na coluna $3 + 5 = 8$, eles também destacam as relações matemáticas como a divisão do número $12 \div 4 = 3$ como ilustra as marcações feitas por este grupo. Durante essa atividade, eles enfrentaram dificuldades para encontrar as conjecturas. Mencionaram que ainda não haviam participado de nenhuma atividade de investigação matemática em sala de aula. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) destacam que, geralmente, alunos que nunca tiveram contato com tarefas investigativas tendem a apresentar dificuldades ao abordar esse tipo de atividade.

A terceira fase da tarefa investigativa correspondeu a socialização de resultado onde cada grupo apresentou pra toda turma os resultados construídos. A seguir destaca-se as considerações de cada grupo.

ii) Socialização dos resultados

Durante este momento, cada grupo veio a frente e compartilhou com toda a turma seus resultados e as estratégias utilizadas para alcançá-los. A seguir destacam-se o que cada grupo apresentou para a turma sobre suas descobertas.

Grupo A: Começamos com dificuldades em entender como usar os números da Tábua, mas logo percebemos uma relação interessante ao somar números de diferentes colunas. Nós identificamos que a soma desses números levava ao mesmo resultado de uma multiplicação, o que nos levou a compreender a propriedade distributiva. Essa percepção foi validada quando nós testamos essa relação com outros números e concluímos que multiplicar um número por uma soma gera o mesmo resultado que somar os produtos individuais.

Grupo B: Nós observamos que na diagonal principal da Tábua estavam as raízes quadradas dos números de 1 à 100, testamos uma por uma até termos certeza. Além disso, notamos uma simetria nos números 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90 em torno dessa diagonal. Nós percebemos que os números se repetiam de forma espelhada, indicando uma relação de simetria entre as operações, como se a tabela refletisse nos dois lados da diagonal.

Grupo C: Seguimos uma linha parecida com o grupo A ao reconhecer a propriedade distributiva. Além disso, exploramos as divisões, observamos que a multiplicação podia ser usada para deduzir divisões indiretas. Por exemplo, nós notamos que ao observar os produtos da tabela, era possível identificar divisões, como no caso do 12, que é divisível por 4, resultando em 3.

Conforme destaca Riess (2010), o trabalho em grupo precisa ser conduzido como um espaço de socialização e aprendizagem genuína. Caso isso não aconteça, o resultado final pode acabar desconectado, sem aquela troca de ideias que dá sentido ao processo. Portanto, para que o grupo realmente construa conhecimentos e faça descobertas, é fundamental manter um diálogo aberto e constante entre todos os envolvidos. Além disso, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) e Soares (2021) enfatizam que é fundamental a socialização dos resultados porque promove o compartilhamento e debate dos resultados, relevante ao processo de ensino e aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa com a turma do 8º ano, ao explorar a Tábua de Pitágoras por meio de investigações matemáticas demonstrou que abordagem de atividades investigativas pode ser relevante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Ao trabalharem com a tabela, os alunos foram capazes de identificar padrões, como a distributiva, as raízes quadradas e as simetrias, além de perceberem como a multiplicação se relaciona com a divisão.

Embora inicialmente tenham enfrentado dificuldades devido à falta de experiências anteriores com investigações matemáticas, o processo de formulação de conjecturas, testes e validações foi importante para incentivar o pensamento crítico e colaborativo, conforme destacam Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). O trabalho em grupo foi fundamental, pois permitiu a troca de ideias e a construção conjunta do conhecimento, mostrando a importância da interação entre os estudantes, conforme defende Riess (2010).

A socialização dos resultados foi um momento chave para consolidar as descobertas e aprimorar a compreensão dos conceitos. A análise dos dados sugere que, quando aplicada de maneira investigativa, a Tábua de Pitágoras torna as aulas mais dinâmicas e interessantes, ajudando os alunos a se envolverem ativamente com a matemática de uma forma mais prática e significativa, tomando como base Soares (2022).

Portanto, com base nos resultados deste estudo pode-se inferir que a realização de práticas investigativas em salas de aula pode potencializar o desenvolvimento tanto do ensino quanto da aprendizagem de conceitos matemáticos. Além disso, a pesquisa aponta a importância de adaptar as metodologias de ensino às necessidades dos alunos, para que eles possam desenvolver habilidades matemáticas como protagonistas de suas aprendizagens.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. **Uma história da matemática**. John W; S, 2011.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. **Educação é a Base**. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.
- COLL, C. **Desenvolvimento psicológico e educação**. Porto Alegre: Artmed, 2004.
- CRESWELL, J W. **Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa**: Escolhendo entre Cinco Abordagens. Porto Alegre: Penso, 2014.
- CRESWELL, J. W.; CRESWELL, J. D. **Projeto de pesquisa**: Métodos qualitativo, quantitativo e misto. 5. Ed. Porto Alegre: Penso, 2021.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

MARCONI, M. de A; LAKATOS, E. M. **Metodologia do trabalho científico**: projetos de pesquisa/pesquisa bibliográfica/teses de doutorado, dissertações de mestrado, trabalhos de conclusão de curso. São Paulo: Atlas, 2017.

MARCONI, M. de A; LAKATOS, E. M.; **Fundamentos de Metodologia Científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

MIRANDA, D. G.; SILVA, M. R. G.; PIMENTA, A. C. Experimentação em matemática na sala de aula: possibilidades e desafios no desenvolvimento da tabuada geométrica. **Encontro Goiano de Educação Matemática**, v. 6, n. 6, p. 350-366, 2017.

PONTE, J. P; BROCARD, J; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2016.

PONTE, J. P. *et al.* **História de investigações matemática**. Editora: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

RIESS, M. L. R. **Trabalho em grupo**: instrumento mediador de socialização e aprendizagem. 2010. TCC (Graduação de Licenciatura em Pedagogia) – Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

SILVA, G. D. da. **Reflexões sobre o uso da tábua de Pitágoras nas aulas de matemática**. 2019. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2019.

SOARES, C. J. F. **Tarefas investigativas no ensino e aprendizagem de aplicações de derivadas**. Curitiba: CRV, 2021.

SOARES, C. J. F. **Análise descritiva qualitativa**. Curitiba: CRV, 2022.

SOARES, C. J. F; QUARTIERI, M. T. Cálculo diferencial. explorando taxa de variação por meio de uma tarefa investigativa e metacognição. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 9., 2024 Natal. **Anais [...]**. Rio Grande do Norte: IX SIPEM; 2024. p. 1-15.

TALL, D. **Como os humanos aprendem a pensar matematicamente**: Explorando os três mundos da matemática. Imprensa da Universidade de Cambridge, 2013.

ZUILA, F. **Alguns aspectos das interferências pedagógicas no ensino da tabuada**. 2014. Monografia (Especialização em Fundamentos da Educação) – Universidade Estadual da Paraíba. UEPB, 2014.