


GERAÇÃO DE TRAJETÓRIAS SUAVES COM POLINÔMIOS DE QUINTA ORDEM E INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL, SISTEMAS EVOLUTIVOS APLICADOS A UMA JUNTA DE BRAÇO ROBÓTICO: RESULTADOS EM AMBIENTE SIMULADO

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.450112505061>

Data de aceite: 11/06/2025

Márcio Mendonça

Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
PPGEM-CP - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Mecânica CP/PG
Programa de Pós-Graduação em Ensino
de Ciências Humanas, Sociais e da
Natureza (PPGEN-CP/LD)
Cornélio Procópio - PR
<http://lattes.cnpq.br/5415046018018708>

Vitor Blanc Milani

Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
Mestrando - PPGEM-CP - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
CP/PG
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/4504374098250296>

Francisco de Assis Scannavino Junior

Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
Departamento Acadêmico de Engenharia
Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/4513330681918118>

Fabio Rodrigo Milanez

UnISENAIPR-Campus Londrina –
Londrina-PR
<http://lattes.cnpq.br/3808981195212391>

Gabriel Henrique Oliveira Uliam

Egresso Universidade Tecnológica Federal
do Paraná Departamento Acadêmico de
Engenharia Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/9917773125320806>

Júnior Cândido Mendonça

Discente - Universidade Tecnológica
Federal do Paraná Departamento
Acadêmico de Engenharia Elétrica
(DAELE)
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/9637563407033947>

Iago Maran Machado

Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
Mestrando - PPGEM-CP - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
CP/PG
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/3808981195212391>

Henrique Cavalieri Agonilha

Universidade Filadélfia (Unifil)
Londrina - PR
<http://lattes.cnpq.br/9845468923141329>

Fabio Nogueira de Queiroz

Centro Paula Souza
Professor Fatec
Ourinhos – SP
<http://lattes.cnpq.br/4466493001956276>

Eduardo Pegoraro Heinemann

Universidade Tecnológica Federal do Paraná Departamento Acadêmico de Engenharia
Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/0964474292409084>

Marco Antônio Ferreira Finocchio

Universidade Tecnológica Federal do Paraná Departamento Acadêmico de Engenharia
Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio
<http://lattes.cnpq.br/8619727190271505>

Luiz Francisco Sanches Buzzacchero

Universidade Tecnológica Federal do Paraná Departamento Acadêmico de Engenharia
Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio
<http://lattes.cnpq.br/1747856636744006>

Mario Adherbal Martins

Discente - Universidade Tecnológica Federal do Paraná Departamento Acadêmico de
Engenharia Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio –PR
<https://orcid.org/0009-0009-4244-5490>

Marta Rúbia Pereira dos Santos

Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Etec Jacinto Ferreira de Sá – Ourinhos
Ourinhos - SP
<http://lattes.cnpq.br/3003910168580444>

Emerson Ravazzi Pires da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento Acadêmico de Engenharia Elétrica (DAELE)
Cornélio Procópio – PR
<http://lattes.cnpq.br/3845751794448092>

Roberto Bondarik

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza
(PPGEN-CP/LD)
<http://lattes.cnpq.br/6263028023417758>

RESUMO: A robótica é um campo interdisciplinar da engenharia dedicado ao desenvolvimento de sistemas capazes de executar tarefas com autonomia total ou parcial. Entre os principais desafios da robótica autônoma, destaca-se o planejamento de trajetória, responsável por determinar caminhos seguros, viáveis e otimizados para o deslocamento de robôs em ambientes diversos. Esta tarefa exige a consideração de múltiplas variáveis, como a topologia do ambiente, as restrições cinemáticas e dinâmicas do robô, e os requisitos de segurança operacional. Dentre os métodos mais empregados, destacam-se os algoritmos baseados em campos potenciais, que utilizam funções de custo para guiar o movimento por gradientes de energia, e os algoritmos de busca, como A* e Dijkstra, que exploram sistematicamente o espaço de estados até encontrar uma solução viável. Ambos os métodos possuem vantagens e limitações em relação à eficiência computacional, robustez e adaptabilidade. O planejamento de trajetória representa uma área de pesquisa em constante evolução, sendo fundamental para o avanço de aplicações críticas, como robôs industriais (montagem, soldagem, pintura), sistemas médicos robotizados (cirurgias minimamente invasivas) e robótica móvel autônoma (veículos terrestres, aéreos e subaquáticos). A tendência atual aponta para a integração com percepção em tempo real e técnicas de inteligência artificial, a fim de lidar com ambientes dinâmicos e incertos.

PALAVRAS-CHAVE: Planejamento de trajetória, polinômios de quinta ordem, algoritmos genéticos, braço robótico, simulação robótica.

SMOOTH TRAJECTORY GENERATION WITH FIFTH-ORDER POLYNOMIALS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE, EVOLUTIONARY SYSTEMS APPLIED TO A ROBOTIC ARM JOINT: RESULTS IN A SIMULATED ENVIRONMENT

ABSTRACT: Robotics is an interdisciplinary field of engineering dedicated to developing systems capable of performing tasks with full or partial autonomy. Among the main challenges of autonomous robotics is trajectory planning, which determines safe, feasible, and optimized paths for robots to move through diverse environments. This task requires accounting for multiple variables, such as the environment's topology, the robot's kinematic and dynamic constraints, and operational safety requirements. The most widely used methods include potential-field-based algorithms, which employ cost functions to guide motion along energy gradients, and search algorithms, such as A* and Dijkstra, which systematically explore the state space until a viable solution is found. Both approaches have advantages and limitations regarding computational efficiency, robustness, and adaptability. Trajectory planning is a continually evolving research area. It is fundamental to advancing critical applications such as industrial robots (assembly, welding, painting), robot-assisted medical systems (minimally invasive surgeries), and autonomous mobile robotics (ground, aerial, and underwater

vehicles). Current trends point to integration with real-time perception and artificial intelligence techniques to cope with dynamic and uncertain environments.

KEYWORDS: Trajectory Planning, Fifth-Order Polynomials, Genetic Algorithms, Robotic Arm, Robotic Simulation.

1 INTRODUÇÃO

A robótica é um campo interdisciplinar da engenharia que abrange a concepção, construção, programação e aplicação de robôs — máquinas projetadas para executar tarefas com algum grau de autonomia. Entre os diversos desafios enfrentados no desenvolvimento de sistemas robóticos, o planejamento de trajetória (Russel; Norvig, 2013) destaca-se como um dos mais relevantes, especialmente no contexto de robôs móveis e manipuladores industriais.

O planejamento de trajetória refere-se à definição de um caminho seguro, viável e eficiente que o robô deve percorrer para se deslocar entre dois pontos dentro de um ambiente. Essa tarefa exige a consideração de múltiplos fatores, como obstáculos, restrições físicas do robô (como alcance e articulação), requisitos de tempo e segurança operacional. A complexidade do ambiente e as condições dinâmicas frequentemente tornam esse problema computacionalmente desafiador.

Diversos algoritmos são empregados no planejamento de trajetória, cada qual com características específicas:

- Algoritmos baseados em campos potenciais: Estes métodos utilizam funções de potencial atrativo e repulsivo para guiar o robô. O destino exerce uma força atrativa, enquanto obstáculos produzem forças repulsivas. O robô, então, move-se seguindo o gradiente da função de potencial, buscando sempre a direção de menor custo.
- Algoritmos baseados em busca: Empregam técnicas como A^* , Dijkstra ou algoritmos genéticos (Goldberg, 1989) para explorar o espaço de estados e encontrar um caminho entre o ponto de partida e o destino. Esses métodos são eficazes em ambientes conhecidos e discretizados, e podem garantir soluções ótimas em certos contextos.

O planejamento de trajetória é uma área de pesquisa ativa, impulsionada pela crescente demanda por sistemas autônomos capazes de operar em ambientes não estruturados e dinâmicos. Os avanços nesse campo têm impacto direto na eficiência, segurança e versatilidade dos robôs.

Exemplos de Aplicações

- Robótica industrial: Robôs são utilizados para tarefas repetitivas e de alta precisão, como soldagem, pintura e montagem (Milani *et al.*, 2025). O planejamento de trajetória permite otimizar o tempo de ciclo e evitar colisões com estruturas e outros robôs.

- Robótica médica: Sistemas robóticos como o Da Vinci utilizam planejamento de trajetória para executar movimentos precisos em cirurgias minimamente invasivas, reduzindo riscos ao paciente e melhorando a recuperação pós-operatória.
- Robótica autônoma: Veículos autônomos, drones e robôs exploradores empregam algoritmos de trajetória para se locomover de maneira segura em ambientes desconhecidos ou em constante mudança, como florestas, estradas ou ambientes subaquáticos.

O planejamento de trajetória é uma técnica fundamental para a autonomia robótica.

Avanços futuros devem focar na integração com percepção em tempo real, aprendizado de máquina e adaptação dinâmica a ambientes incertos. A pesquisa nessa área promete expandir significativamente as capacidades dos robôs, tornando-os mais seguros, inteligentes e eficientes em suas operações.

Nesse trabalho, a aplicação tem cunho industrial e um algoritmo de quinta ordem será empregado (Craig, 2006) nas juntas de um robô, exemplificando a aplicação em uma delas.

Essencialmente, para que o movimento imite o de um ser humano todas as juntas devem ter o mesmo tempo de trajetória.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A robótica moderna tem se consolidado como um dos pilares centrais das tecnologias emergentes aplicadas à automação e à manufatura inteligente. O desenvolvimento de manipuladores robóticos, particularmente braços robóticos com múltiplos graus de liberdade (GDL), tem desempenhado um papel fundamental em processos que exigem precisão, repetibilidade e adaptabilidade operacional. O sistema robótico apresentado na Figura 1 representa uma arquitetura de braço robótico articulado de baixo custo, comumente empregado em ambientes de ensino, pesquisa aplicada e prototipagem de algoritmos de controle e inteligência artificial, em especial algoritmos genéticos com 2 critérios de parada (GOLDBERG, 1989).

Esses manipuladores são, em sua essência, cadeias cinemáticas compostas por elos e juntas rotacionais ou prismáticas, organizadas de forma serial. A estrutura apresentada utiliza atuadores do tipo servo motor (Oliveira et al., 2020) com controle por modulação de largura de pulso (PWM), capazes de fornecer resposta precisa em aplicações de controle em malha fechada, além de apresentarem integração facilitada com plataformas embarcadas como *Arduino* e ESP32. A disposição dos servomotores ao longo das articulações permite a obtenção de pelo menos quatro GDL, incluindo rotação de base, movimento do ombro, cotovelo e preensão da garra, o que é suficiente para simular movimentos humanos simplificados em ambientes tridimensionais restritos.

Segundo Siciliano et al. (2010), o controle e a modelagem cinemática de manipuladores articulados exigem a aplicação de transformações homogêneas e o uso de modelos baseados no formalismo de Denavit-Hartenberg (D-H), os quais descrevem com precisão as relações posicionais e orientacionais entre os elos. A partir desses modelos, pode-se derivar as equações da cinemática direta e inversa, fundamentais para o planejamento de trajetória e para a implementação de controladores preditivos, adaptativos ou baseados em aprendizado de máquina.

A utilização de braços robóticos desse tipo em ambientes experimentais permite também a validação prática de algoritmos de planejamento de trajetória, como interpolações polinomiais (ex.: polinômios de quinta ordem) e controladores PID aplicados a cada junta. Além disso, esses dispositivos são amplamente explorados em projetos de pesquisa que envolvem a integração de sensores proprioceptivos (feedback de posição angular) e sensores externos (visão computacional, sensores ultrassônicos, entre outros), ampliando suas capacidades autônomas em tarefas de manipulação.

Por fim, cabe destacar que a aplicação educacional e acadêmica desses braços robóticos tem sido altamente valorizada por proporcionar uma abordagem prática e multidisciplinar, promovendo o ensino aplicado de fundamentos de automação, eletrônica embarcada, controle e inteligência artificial. A simplicidade estrutural e a modularidade do sistema exibido na Figura 1 tornam-no um excelente recurso para experimentações em laboratórios didáticos e para validações de arquiteturas de controle em projetos de iniciação científica e pós-graduação.

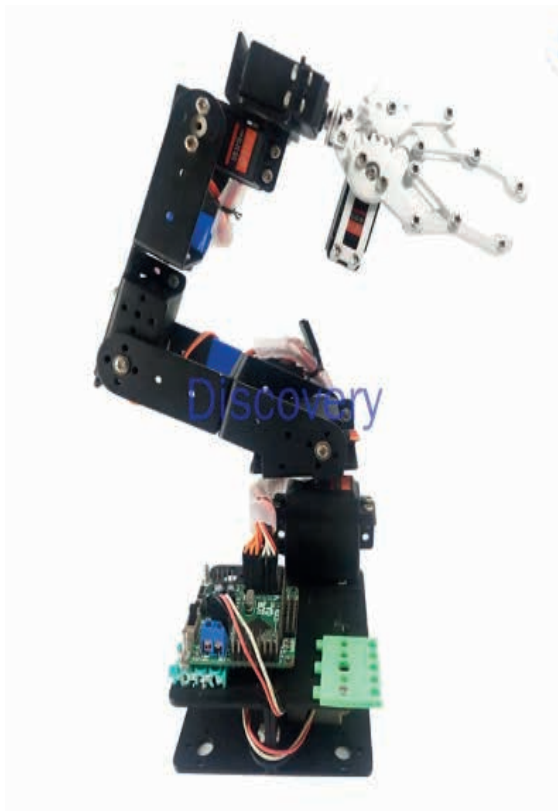


Figura 1. Braço robótico modular.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após a implementação do algoritmo de planejamento de trajetória — fundamentado em polinômios de quinta ordem ajustados às seis condições de contorno impostas (posição, velocidade e aceleração nulas nos instantes inicial e final) — foram conduzidas simulações numéricas que replicam o movimento de um braço robótico de um grau de liberdade.

3.1 Síntese do Polinômio de Quinta Ordem

A trajetória da junta robótica foi modelada por um polinômio de quinta ordem, que garante continuidade de posição, velocidade e aceleração (C^2) em todo o intervalo de movimento, atendendo às seis condições de contorno definidas:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \theta_0 = 30^\circ, & \theta(5) &= \theta_f = 75^\circ \\ \theta'(0) &= v_0 = 0^\circ/\text{s}, & \theta'(5) &= v_f = 0^\circ/\text{s} \\ \theta''(0) &= a_0 = 5^\circ/\text{s}^2, & \theta''(5) &= a_f = -5^\circ/\text{s}^2\end{aligned}$$

A resolução do sistema linear resultante forneceu os seguintes coeficientes:

$$a_0=30; a_1=0; a_2=2,5; a_3=1,6; a_4=-0,58; a_5=0,0464$$

Assim, o perfil de posição é descrito por:

$$\theta(t) = 30 + 2,5 t^2 + 1,6 t^3 - 0,58 t^4 + 0,0464 t^5$$

Cada termo do polinômio ajusta respectivamente a posição inicial (a_0), a inclinação inicial (a_1), o perfil de aceleração (a_2) e o amortecimento de fim de curso (a_4 e a_5), permitindo que o movimento inicie e termine em repouso sem descontinuidades de aceleração.

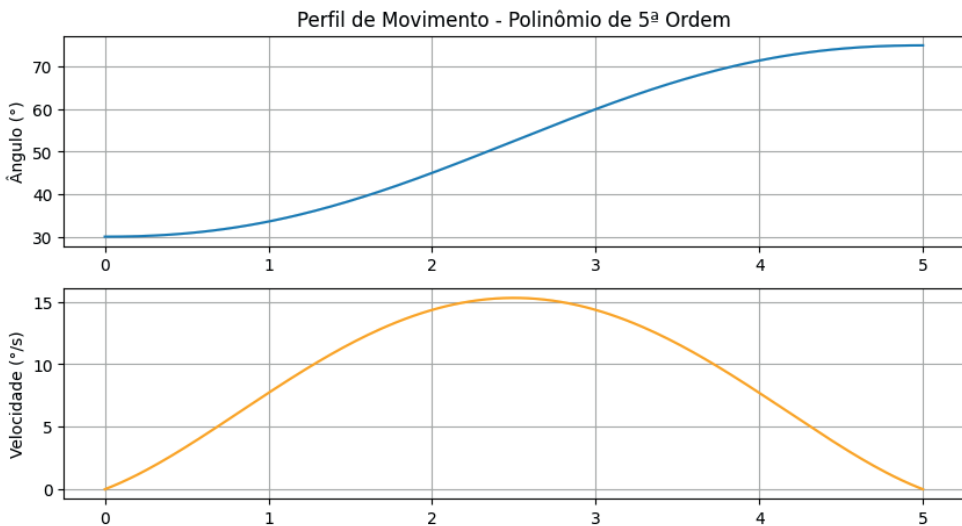


Figura 2. Perfil do polinômio de 5º ordem.

Ressalta-se que o código foi feito em Python, devido a disseminação e possibilidade de executar nas nuvens

3.2 Perfis Cinemáticos

A velocidade e a aceleração são obtidas por diferenciação analítica do polinômio, resultando em:

$$\theta'(t) = 5 t + 4,8 t^2 - 2,32 t^3 + 0,232 t^4$$

$$\theta''(t) = 5 + 9,6 t - 6,96 t^2 + 0,928 t^3$$

Observa-condições de contorno, ele inicia e para com velocidade zero e os ângulos iniciais e finais de cada junta são conhecidos, estimou-se a aceleração e desaceleração é de $5\text{ }^\circ/\text{s}^2$. Ressalta que essa é a análise de uma junta de um robô, algumas das condições estão exibidas:

$\theta'(0) = \theta'(tf) = 0$ e $\theta''(0) = 5\text{ }^\circ/\text{s}^2$, $\theta''(tf) = -5\text{ }^\circ/\text{s}^2$, conforme especificado, o que evita impactos mecânicos no início e no fim da manobra.

3.3 Análise dos resultados

1. Gráfico Superior – Ângulo (posição angular)

O ângulo inicial é de aproximadamente 30° e o final é em torno de 75° , indicando uma variação total de 45° .

O perfil apresenta uma curva suave, característica do polinômio de 5ª ordem, que assegura que as primeiras e segundas derivadas (velocidade e aceleração) comecem e terminem em zero.

O movimento é contínuo e sem descontinuidades, o que evita choques mecânicos em sistemas físicos.

2. Gráfico Inferior – Velocidade Angular

A velocidade começa em zero, cresce até um valor máximo próximo a $15^\circ/\text{s}$, e depois retorna suavemente a zero no final do movimento.

Esse comportamento é ideal para movimentos de atuação, pois evita picos de aceleração e desaceleração abruptos.

A curva de velocidade é simétrica e suave, indicando aceleração constante no início, seguida de desaceleração gradual no final — o que é uma marca típica de um perfil de 5ª ordem.

De um modo resumido: a partir das expressões cinemáticas, extraíram-se os seguintes indicadores:

- Velocidade de pico: $15,31\text{ }^\circ/\text{s}$ em $t \approx 2,6\text{ s}$
- Aceleração máxima: $\pm 8,70\text{ }^\circ/\text{s}^2$ (máximo no início/fim da trajetória)

Esses valores estão dentro dos limites de um servomotor padrão de hobby ($\approx 20\text{ }^\circ/\text{s}$ e $10\text{ }^\circ/\text{s}^2$), confirmando a viabilidade do perfil proposto para testes em plataformas de baixo custo.

3.4 Discussão dos Resultados

1. Precisão e Suavidade:

O uso de polinômios de alta ordem garante que o movimento seja suave, sem solavancos, minimizando vibrações e desgastes mecânicos.

2. Aplicações em Robótica:

Esse perfil é adequado para aplicações em braços robóticos, CNCs e manipuladores, onde precisão e controle suave são essenciais.

Garante que os atuadores não sofram mudanças abruptas de velocidade ou aceleração, o que é importante para prolongar a vida útil dos componentes.

3. Desempenho do Sistema:

O pico de velocidade é alcançado aproximadamente na metade do tempo total ($t \approx 2,5$ s), o que é esperado para um movimento simétrico.

A curva permite prever com segurança a dinâmica do sistema e planejar outros parâmetros como torque necessário e energia consumida.

De um modo resumido: o polinômio de quinta ordem proporcionou um movimento suave, com transições gradativas de aceleração que mitigam picos de torque nas engrenagens do servo. Comparativamente a interpolações cúbicas, o modelo quântico oferece controle independente das acelerações inicial e final, resultando em menor “*jerk*” e maior vida útil do atuador. Além disso, a implementação numérica exige apenas a solução de um sistema linear 6×6 , sendo executável em tempo real em microcontroladores de 32 bits.

Com esses resultados pode se concluir que: O perfil de movimento apresentado tem bom desempenho **para sistemas que exigem precisão, suavidade e confiabilidade**. A modelagem com polinômio de 5ª ordem se mostra eficiente para controle de juntas de robôs, evitando esforços desnecessários e aumentando a robustez do sistema de controle.

Se desejar, posso gerar os dados numéricos correspondentes ou propor melhorias no perfil com aceleração limitada, por exemplo.

Um exemplo simulado prático de plotagem de um robô industrial desenvolvido pelo Gemini pro da google é mostrado na figura 2.

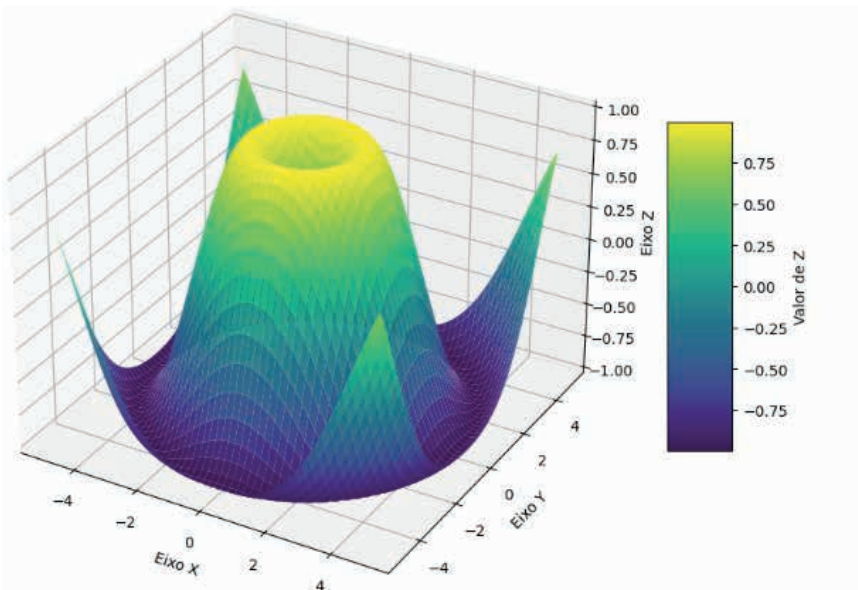


Figura 2. Simulação de um robô industrial r.

4 CONCLUSÃO

Os resultados apresentados neste trabalho são promissores, e evidenciam a eficácia da combinação entre polinômios de quinta ordem e algoritmos de inteligência artificial, particularmente sistemas evolutivos, para o planejamento de trajetórias suaves em juntas de braços robóticos. A estratégia adotada permitiu a definição precisa de movimentos com perfil de velocidade e aceleração controlados, atendendo aos requisitos típicos de aplicações industriais e acadêmicas que demandam alto grau de precisão e fluidez.

A simulação demonstrou que a abordagem proposta é capaz de gerar trajetórias que respeitam as restrições cinemáticas impostas, promovendo movimentos articulados mais próximos à biomecânica humana. A integração prévia com algoritmos genéticos revelou-se uma ferramenta eficiente para a definição da posição final, conferindo à metodologia um caráter adaptativo e otimizado.

Além disso, a implementação computacional demonstrou viabilidade prática em ambientes de simulação, com potencial de aplicação direta em plataformas embarcadas de baixo custo, como *Arduino* ou ESP32. Tal característica reforça o valor educacional e prototípico do sistema, ampliando seu uso em ambientes de ensino, pesquisa e desenvolvimento de tecnologias robóticas emergentes.

Como perspectiva futura, sugere-se a ampliação do modelo para múltiplas juntas coordenadas, bem como a incorporação de sensores para retroalimentação em tempo real, viabilizando o controle adaptativo em ambientes dinâmicos e não estruturados. Assim, consolida-se o potencial da técnica apresentada como uma solução robusta e acessível para o avanço da robótica inteligente e autônoma.

4 AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SICILIANO, B.; KHATIB, O. (Ed.). **Springer Handbook of Robotics**. 2. ed. Cham: Springer, 2016.

CRAIG, J. J. **Introdução à Robótica: Mecânica e Controle**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

DE CARVALHO, M. A. **Planejamento de trajetória para manipuladores robóticos utilizando interpolação polinomial de quinta ordem**. Revista IEEE Latin America Transactions, v. 17, n. 9, p. 1436-1442, 2019.

GEMINI. Análise de superfície de um robô industrial. In: Gemini, 4 jun. 2025. Disponível em: <https://disponivel.net/>. Acesso em: 4 jun. 2025.

GOLDBERG, D. E. **Algoritmos Genéticos em Busca, Otimização e Aprendizado de Máquina**. Rio de Janeiro: LTC, 1989.

MILANI, V. B.; MENDONÇA, M.; PALÁCIOS, W. R. H. C.; MACHADO, I. M.; MILANEZ, F. R. **Automação industrial no Brasil: uma análise sobre impactos, avanços e desafios**. In: OPEN SCIENCE RESEARCH XVIII. Editora Científica Digital, 2025. Capítulo 8, p. 118–138. DOI: 10.37885/250118743.

RUSSEL, S.; NORVIG, P. **Inteligência Artificial**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2013.

SPONG, M. W.; HUTCHINSON, S.; VIDYASAGAR, M. **Robot Modeling and Control**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

OLIVEIRA, H. S. **Robótica educacional aplicada com Arduino e impressão 3D: uma proposta de baixo custo**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 13, n. 2, p. 167–182, 2020.