CAPÍTULO 1

PROGRAMAÇÃO LINEAR E O MÉTODO SIMPLEX: FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES

https://doi.org/10.22533/at.ed.5832531031

Data de aceite: 04/04/2025

Joelson Lopes da Paixão
Mestre em Engenharia Elétrica, UFSM
http://lattes.cnpq.br/6907289379766915
https://orcid.org/0000-0001-8874-5151

RESUMO: Este estudo apresenta os fundamentos da programação linear e a formulação matemática para a resolução de problemas de otimização por meio do Método Simplex. Inicialmente, discute-se a modelagem e a formulação de problemas de programação linear, destacando suas restrições, variáveis de decisão e função objetivo. Em seguida, descreve-se o algoritmo Simplex, abordando sua estrutura iterativa, critérios de convergência e adaptação ao modelo canônico. O trabalho também explora as diferentes abordagens de solução, como a representação gráfica e a solução algébrica, ilustrando a aplicabilidade do método na obtenção de soluções ótimas para problemas lineares. Para exemplificar o procedimento, é apresentado um estudo de caso com resolução detalhada, demonstrando as etapas do algoritmo até a convergência para a solução ótima. A análise dos resultados confirma a eficácia do Método Simplex na resolução de problemas de otimização, evidenciando sua relevância para a Pesquisa Operacional e suas aplicações em diversas áreas.

PALAVRAS-CHAVE: Pesquisa Operacional, Otimização, Método Iterativo, Algoritmo Simplex.

LINEAR PROGRAMMING AND THE SIMPLEX METHOD: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS

ABSTRACT: This study presents the fundamentals of linear programming and the mathematical formulation for solving optimization problems using the Simplex Method. Initially, the modeling and formulation of linear programming problems are discussed, highlighting constraints, decision variables, and the objective function. Subsequently, the Simplex algorithm is described, addressing its iterative structure, convergence criteria, and adaptation to the canonical model. The study also explores different solution approaches, such as graphical representation and algebraic resolution, illustrating the applicability of the method in obtaining optimal solutions for linear problems. To exemplify the procedure,

a case study with a detailed resolution is presented, demonstrating the algorithm's steps until convergence to the optimal solution. The analysis of results confirms the effectiveness of the Simplex Method in solving optimization problems, underscoring its relevance to Operations Research and its applications in various fields.
KEYWORDS: Operations Research, Optimization, Iterative Method, Simplex Algorithm.

INTRODUÇÃO

A Pesquisa Operacional

Ao longo da história, cientistas e estrategistas militares frequentemente colaboraram com o objetivo de aprimorar o processo de tomada de decisão e garantir vantagem competitiva nas batalhas. Por isso, diversos autores consideram que as origens da Pesquisa Operacional (PO) remontam ao século III a.C., especificamente durante a Segunda Guerra Púnica. Nesse contexto histórico, Arquimedes propôs soluções inovadoras para proteger a cidade de Siracusa diante do cerco imposto pelas tropas romanas. Entre as tecnologias desenvolvidas pelo cientista destacam-se mecanismos bélicos avançados como catapultas aprimoradas e um engenhoso dispositivo óptico que utilizava espelhos para concentrar os raios solares e incendiar as embarcações inimigas (VANDERBEI, R.J., 2008; NELDER; MEAD, 1965; KLEE; MINTY, 1972).

A PO teve seu início formalizado ainda na segunda guerra mundial, quando houve a convocação de um grupo de cientistas com o intuito de elaborar estratégias e táticas associadas à defesa da Inglaterra. Neste cenário, o objetivo era decidir sobre a utilização eficaz de recursos militares disponíveis de forma muito limitada (BHUNIA; SAHOO; SHAIKH, 2019; LUENBERGER, D. G.; YE, Y., 2008; CHINNECK, 2001; NASH, 2000; KAGAN et al., 2009).

A obtenção de resultados positivos pelo grupo inglês estimulou o uso da metodologia em diversos países, principalmente nos Estados Unidos, onde a PO se propagou de maneira significativa ainda nessa mesma época, sendo denominada pelos americanos. Em 1947, formou um grupo de trabalho dedicado a melhorar o processo de planejamento em larga escala: o projeto SCOOP *(Scientific Computation Of Optimum Programs*). Neste grupo estava trabalhando George Bernard Dantzig, que em 1947 desenvolveu o algoritmo do Método Simplex (LUENBERGER, D. G.; YE, Y., 2008; CHINNECK, 2001).

Após o fim da Segunda Guerra Mundial, percebeu-se a necessidade de estruturar eficientemente os recursos norte-americanos (tais como energia, armamentos e suprimentos em geral) por meio do uso de modelos de otimização baseados em Programação Linear. Essa adoção das técnicas de Pesquisa Operacional despertou o interesse de vários outros campos do conhecimento, em virtude da diversidade e complexidade dos problemas enfrentados. A solução desses problemas requer abordagens capazes de identificar e considerar as múltiplas dimensões envolvidas nas decisões estratégicas. A utilização de modelos é uma característica importante da pesquisa operacional, facilitando o processo de análise e de decisão. Eles permitem a experimentação da solução proposta. Isto significa que uma decisão pode ser mais bem avaliada e testada antes de ser efetivamente implementada. A economia obtida e a experiência adquirida pela experimentação justificam a utilização da PO (LUENBERGER, D. G.; YE, Y., 2008; CHINNECK, 2001; GALE, D., 1987; NASH, 2000).

A evolução da tecnologia computacional, aumento da velocidade de processamento e quantidade de memória impactaram em um grande progresso na Pesquisa Operacional. Este avanço possibilitou que os modelos desenvolvidos pelos profissionais de PO sejam mais rápidos e versáteis, além de serem interativos, permitindo a participação do usuário ao longo do processo de cálculo (KAGAN et al., 2009).

As aplicações não militares da Pesquisa Operacional se estenderam para todas as áreas, com problemas que vão desde alimentação, agricultura, distribuição de campos de agricultura, transporte de mercadorias, localização, distribuição de pessoal, problemas de rede, filas, gestão e gerenciamento de energia em microrredes, gestão de carregamento de Veículos Elétricos, etc (LOPES DA PAIXÃO et al., 2023; PAIXÃO et al., 2025). No Quadro 1 são mostrados exemplos reais da aplicação das técnicas de PO na busca por soluções otimizadas, voltadas para uma infraestrutura elétrica mais resiliente, eficiente e sustentável (GRANJA; RUIZ, 2020).

Organização	**Aplicação**	**Ano**	**Poupanças anuais**
Monsanto Corp.	Otimização das operações de produção para cumprir os prazos com um custo mínimo	1985	$2 milhões
Electrobras/ CEPAL Brasil	Distribuição ótima de recursos hídricos e térmicos no sistema nacional de geração de energia	1986	$43 milhões
CITGO Petroleum Corp.	Otimização de operações de refino e abastecimento, distribuição e comercialização de produtos	1987	$70 milhões
Electric Power Research Institute	Gestão de estoques de petróleo e carvão para o serviço elétrico, a fim de equilibrar os custos de estoques e os riscos de falta	1989	$59 milhões
Texaco, Inc.	Otimização da mistura de ingredientes disponíveis para que os combustíveis obtidos atendessem aos requisitos de vendas e qualidade	1989	$30 milhões
IBM	Integração de uma rede nacional de distribuição de peças de reposição para melhorar o serviço de suporte	1990	$20 milhões + $250 milhões em inventário reduzido
New Haven Health Dept.	Projeto para troca eficaz de seringas para combater a propagação da SIDA (AIDS)	1993	33% menos infecções
China	Seleção e programação ótima de grandes projetos para atender às necessidades futuras de energia do país	1995	$425 milhões
Hewlett-Packard	Redesenho do tamanho e localização do estoque de segurança na linha de produção de impressoras para atender às metas de produção	1998	$280 milhões de faturamento

Quadro 1 – Exemplos de casos reais em que a PO foi aplicada.

Fonte: Adaptado de Granja e Ruiz (2020).

Modelagem Matemática

Um modelo é uma representação de um sistema real, que pode já existir ou ser um projeto aguardando execução. No primeiro caso, o modelo pretende reproduzir o funcionamento do sistema, de modo a aumentar sua produtividade. No segundo caso, o modelo é utilizado para definir a estrutura ideal do sistema (LISBOA, 2002). Na escolha de qual modelo deve ser utilizado, deve-se atentar para o tipo de problema que se deseja modelar e encontrar a solução. O fluxograma da Figura 1 mostra como realizar esse processo.

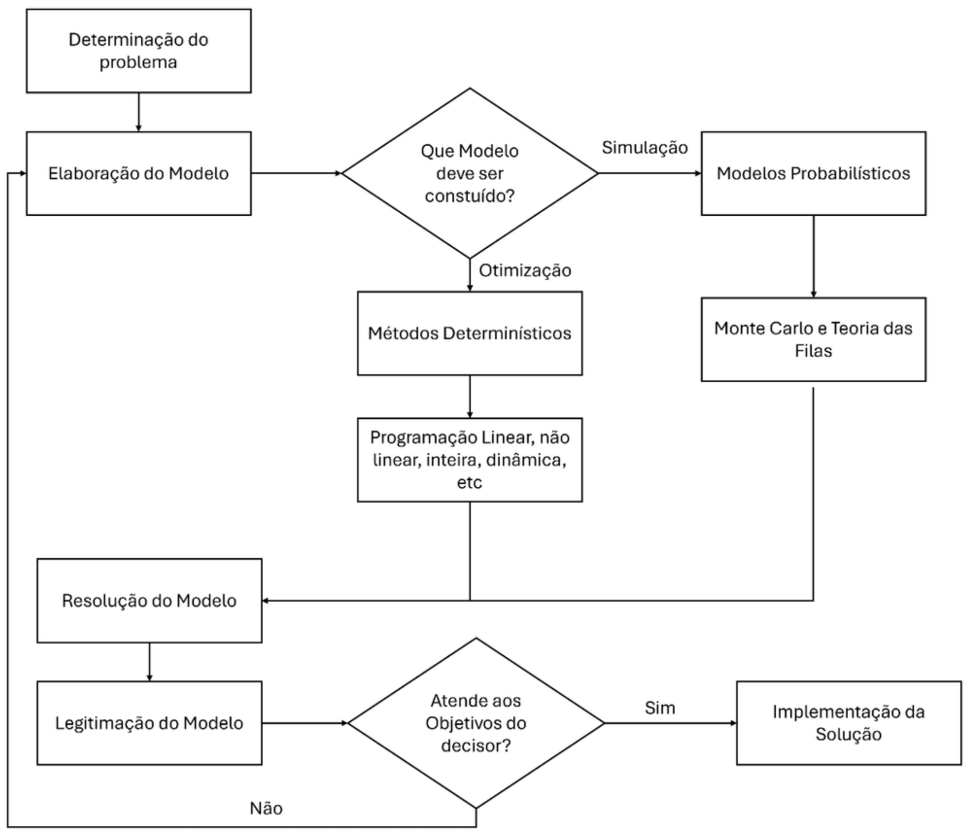

Figura 1 – Escolha do modelo matemático.

Fonte: Adaptado de Lisboa (2002).

A confiabilidade da solução obtida através do modelo depende da validação do modelo na representação do sistema real. A diferença entre a solução real e a solução proposta pelo modelo depende diretamente da precisão do modelo em descrever o comportamento original do sistema. Um problema simples pode ser representado por modelos também simples e de fácil solução. Já problemas mais complexos requerem modelos mais elaborados, cuja solução pode vir a ser bastante complicada (SOUTO-MAIOR, 2014, p. 94).

Em um modelo matemático, são incluídos três conjuntos principais de elementos:

- *Variáveis de decisão:* incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo;
- *Parâmetros:* Valores fixos no problema (constantes);
- *Restrições:* características físicas do sistema que limitam as variáveis de decisão a seus valores viáveis;
- *Função Objetivo:* função matemática que define a solução em função das variáveis de decisão (GRANJA; RUIZ, 2020; LISBOA, 2002; SOUTO-MAIOR, 2014, p. 94).

Embora a modelagem matemática seja uma importante ferramenta na tratativa e solução de problemas, alguns pontos não devem ser esquecidos.

1. Não criar um modelo complicado quando um simples é suficiente.
2. Não modelar o problema pensando na técnica de resolução que pretende utilizar.
3. Resolver rigorosamente o modelo encontrado. Só assim se saberá se inconsistências das soluções do modelo com a realidade têm origem no próprio modelo ou não.
4. Validar os modelos antes de os implementar.
5. O modelo não deve ser tomado literalmente pois nunca é a realidade.
6. O modelo não deve ser forçado a fazer, ou ser criticado por não fazer aquilo para que não foi criado.
7. Não sobrestimar os modelos.
8. Uma das principais vantagens do desenvolvimento da modelagem é o processo de desenvolvimento do modelo.
9. Um modelo não pode ser melhor do que a informação usada na sua construção.
10. Os modelos nunca substituem os agentes de decisão (KAGAN et al., 2009; GRANJA; RUIZ, 2020; LISBOA, 2002).

Fases do Estudo de Pesquisa Operacional

Um estudo de pesquisa operacional geralmente envolve as seguintes fases:

- *Definição do problema:* baseia-se na descrição exata dos objetivos do estudo, identificação das alternativas e decisão existentes e reconhecimentos das limitações, restrições e exigências do sistema;
- *Construção do modelo:* representação simplificada da realidade. Permite a análise do problema modelado e possibilita a tentativa de várias alternativas de ação sem interromper o funcionamento do sistema em estudo;

- *Solução do modelo:* baseada geralmente em técnicas matemáticas existentes, representa a fase em que os cálculos são realizados de acordo com a construção do modelo;

- *Validação do modelo:* verificação de possíveis distorções no modelo construído, corrigindo-as quando necessário. Em alguns casos o modelo pode ser testado com o uso de dados históricos, verificando-se a adequação do modelo às informações disponíveis;

- *Implementação da solução:* envolve um aspecto especialmente técnico e um aspecto pessoal. Nesta fase serão obtidos os resultados do estudo (GRANJA; RUIZ, 2020; LISBOA, 2002; SOUTO-MAIOR, 2014, p. 94). Veja na Figura 2 as etapas de um estudo de Pesquisa Operacional.

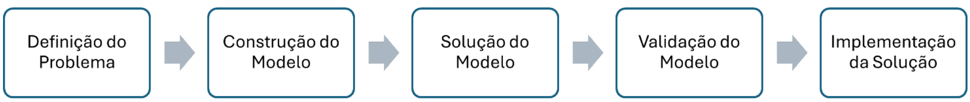

Figura 2 – Fases do estudo de Pesquisa Operacional.

Fonte: Adaptado de Granja e Ruiz (2020).

Programação Linear

O problema geral de programação linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de "função objetivo", sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, chamadas restrições. A formulação do problema a ser resolvido por programação linear segue alguns passos básicos.

- Deve ser definido o objetivo básico do problema, ou seja, a otimização a ser alcançada. Por exemplo: maximização de lucros ou minimização de custos;

- Para que esta função objetivo seja matematicamente especificada, devem ser definidas as variáveis de decisão envolvidas. Por exemplo: número de máquinas, a área a ser explorada etc. Normalmente, assume-se que todas estas variáveis possam assumir somente valores positivos;

- Estas variáveis normalmente estão sujeitas a uma série de restrições, normalmente representadas por inequações. Por exemplo: quantidade de equipamento disponível.

Todas essas expressões, entretanto, devem estar de acordo com a hipótese principal da programação linear, ou seja, todas as relações entre as variáveis devem ser lineares. Isto implica proporcionalidade das quantidades envolvidas. Esta característica de linearidade pode ser interessante no tocante à simplificação da estrutura matemática envolvida, mas prejudicial na representação de fenômenos não lineares (por exemplo, funções de custo tipicamente quadráticas) (LISBOA, 2002).

O MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex é um processo iterativo que permite melhorar a solução da função objetivo em cada etapa. O processo finaliza quando não é possível continuar melhorando este valor, ou seja, quando se obtenha a solução ótima (o maior ou menor valor possível, segundo o caso, para que todas as restrições sejam satisfeitas).

Com base no valor da função objetivo, em um ponto qualquer, o procedimento consiste em procurar outro ponto que melhore o valor anterior. Como se pode ver no método Gráfico, tais pontos são os vértices do polígono (ou poliedro, se o número de variáveis é maior do que 2) e que faz parte da região determinada pelas restrições a que está sujeito o problema (chamada de região viável). A pesquisa é realizada por meio de deslocamentos pelas arestas do polígono, a partir do vértice atual até um adjacente que melhore o valor da função objetivo. Sempre que exista região viável, e como seu número de vértices e de arestas é finito, será possível encontrar a solução.

O método Simplex baseia-se na seguinte propriedade: se a função objetivo Z não toma seu valor máximo no vértice A, quer dizer que existe uma aresta que parte de A e ao longo da qual o valor de Z aumenta. O método caminha pelos vértices da região viável até encontrar uma solução que não possua soluções vizinhas melhores que ela. Esta é a solução ótima. A solução ótima pode não existir em dois casos: quando não há nenhuma solução viável para o problema, devido a restrições incompatíveis; ou quando não há máximo (ou mínimo), isto é, uma ou mais variáveis podem tender a infinito e as restrições continuarem sendo satisfeitas, o que fornece um valor sem limites para a função objetivo.

Será necessário considerar que o método Simplex trabalha apenas com restrições do problema cujas desigualdades sejam do tipo "≤" (menor ou igual) e seus coeficientes independentes sejam maiores ou iguais a 0. Portanto, é preciso padronizar as restrições para atender aos requisitos antes de iniciar o algoritmo Simplex. Caso apareçam, depois deste processo, restrições do tipo "≥" (maior ou igual) ou "=" (igualdade), ou não seja possível alterá-las, será necessário utilizar outros métodos de resolução, sendo o mais comum, o método das Duas Fases (VANDERBEI, R.J. , 2008; NELDER; MEAD, 1965).

Adaptando o Modelo ao Simplex

A forma padrão do modelo de problema (ou forma canônica) consiste em uma função objetivo, sujeita a certos critérios (as restrições):

Função objetivo:

$$\text{Max ou Min } c1 \cdot x1 \ + \ c2 \cdot x2 + \ldots + cn \cdot xn$$

sujeita às restrições:

$$
\begin{gathered}
a11 \cdot x1 \ + \ a12 \cdot x2 + \ldots + a1n \cdot xn <= \ b1 \\
a21 \cdot x1 \ + \ a22 \cdot x2 + \ldots + a2n \cdot xn <= \ b2 \\
\ldots \\
am1 \cdot x1 \ + \ am2 \cdot x2 + \ldots + amn \cdot xn <= \ bm \\
x1, \ldots, xn \ \geq \ 0
\end{gathered}
$$

O modelo deve atender às seguintes condições:

i. O objetivo é maximizar ou minimizar o valor da função objetivo (por exemplo, aumentar lucros ou reduzir as perdas, respectivamente).

ii. Todas as restrições devem ser equações de igualdade (identidades matemáticas).

iii. Todas as variáveis (xi) devem ser positivas ou nulas (condição de não-negatividade).

iv. Os termos independentes (bi) de cada equação devem ser não-negativos.

É preciso adaptar o problema de modelagem de acordo à forma padrão para poder aplicar o algoritmo Simplex (GRANJA; RUIZ, 2020).

Tipos de Otimização

O objetivo do método é otimizar o valor da função objetivo. No entanto, duas opções são apresentadas: obter o maior valor ótimo (maximizar) ou obter o menor valor ótimo (minimizar). Além disto, existem diferenças no algoritmo entre o objetivo de maximização e de minimização quanto ao critério de parada para finalizar as iterações e as condições de entrada e saída da base. Assim:

Objetivo de maximização:

Critério de parada: quando na linha Z não aparece nenhum valor negativo.

Condição de entrada na base: o menor valor negativo na linha Z (ou o de maior valor absoluto entre os negativos) indica a variável Pj que entra na base.

Condição de saída da base: depois de obter a variável de entrada, determina-se a variável de saída por meio do menor quociente P0/Pj dos valores estritamente positivos.

Objetivo de minimização:

Critério de parada: quando na linha Z não aparece nenhum valor positivo.

Condição de entrada na base: o maior valor positivo na linha Z indica a variável Pj que entra na base.

Condição de saída da base: depois de obter a variável de entrada, determina-se a variável de saída por meio do menor quociente P0/Pj dos valores estritamente negativos.

No entanto, é possível normalizar o objetivo do problema, a fim de aplicar sempre os mesmos critérios sobre o critério de parada do algoritmo e as condições de entrada e saída nas variáveis da base. Assim, se o objetivo é minimizar a solução pode-se mudar o problema para outro equivalente de maximização, apenas multiplicando a função objetivo por “-1”. Ou seja, o problema de minimizar Z é equivalente ao problema de maximizar (-1)·Z. Uma vez obtida a solução, será preciso multiplicar por (-1).

Vantagens: Não será preciso se preocupar com novos critérios de parada, condição de entrada e de saída da base, já que são mantidos.

Desvantagens: No caso em que a função tenha todos os coeficientes de suas variáveis básicas positivas e, adicionalmente, as restrições sejam do tipo de desigualdade “≤”, ao fazer a mudança, tais coeficientes ficam negativos cumprindo assim a condição de parada na primeira iteração (na linha de valor da função objetivo todos os valores são positivos ou zero). Neste caso, obtém-se por padrão um valor ótimo para a função igual a 0.

Solução: Não existe este problema, dado que para que a solução seja superior a 0 é necessário que alguma restrição tenha imposto a condição “≥” (que seria um modelo para o método das Duas Fases). No caso mencionado, a solução real deve ser zero.

Outra condição do modelo padrão do problema é que todas as restrições sejam equações de igualdade (também chamada de restrições de igualdade), por isso é necessário converter as restrições de desigualdade ou inequações em tais identidades matemáticas. A condição de não negatividade das variáveis (x1, ..., xn ≥ 0) é a única exceção e se mantém inalterada. No Quadro 2 são mostradas a variáveis que devem ser adicionadas para converter as inequações em igualdades (KAGAN et al., 2009; GRANJA; RUIZ, 2020).

Tipo de desigualdade	Tipo de variável que aparece
≥	- Excesso + artificial
=	+ artificial
≤	+ folga

Quadro 2 – tipo de variável que aparece na equação padrão e sinal.

Fonte: Autoria própria.

Procedimento do Método Simplex

A aplicação do Método Simplex envolve uma série de etapas sequenciais até que se alcance a solução ótima desejada. As etapas necessárias para sua implementação são apresentadas a seguir:

Etapa 1: Acrescentar as variáveis de folga, sendo uma variável para cada restrição expressa por desigualdade.

Etapa 2: Construir o quadro inicial do método Simplex, posicionando os coeficientes das variáveis envolvidas com seus respectivos sinais. Adicionalmente, incluir na última linha do quadro os coeficientes resultantes da transformação da função objetivo.

Etapa 3: Definir uma solução básica inicial atribuindo, em geral, o valor zero às variáveis originais do problema e determinando valores positivos correspondentes às variáveis de folga.

Etapa 4: Determinar qual variável não básica entrará na base analisando a última linha do quadro. Deve-se selecionar a variável que apresentar o coeficiente negativo de maior magnitude, o que implica maior potencial de aumento para o valor da função objetivo. Caso todos os coeficientes das variáveis não básicas sejam nulos ou positivos, a solução básica atual já é a solução ótima. Variáveis com coeficiente nulo podem entrar na base, contudo, não produzirão aumento no valor atual da função objetivo, indicando assim a existência de múltiplas soluções ótimas com o mesmo valor.

Etapa 5: Para definir a variável que será retirada da base, realiza-se o procedimento descrito abaixo:

a) Divide-se cada valor da última coluna pelos valores positivos correspondentes na coluna da variável que entrará na base. Caso não existam valores positivos nessa coluna, o processo é interrompido imediatamente, indicando que a solução é ilimitada.

b) A variável que deixará a base corresponde ao menor valor obtido nessa divisão. Essa variável básica será zerada e passará a ser considerada como não básica na próxima iteração.

Etapa 6: Utilizando operações elementares válidas nas linhas da matriz do quadro Simplex, atualiza-se a solução básica. Nesta etapa, a coluna associada à variável recém-introduzida na base deve ser convertida em um vetor identidade, posicionando-se o elemento unitário (valor 1) exatamente na linha correspondente à variável retirada da base.

Etapa 7: Após essa atualização, retornar à Etapa 4 e realizar uma nova iteração até obter a solução ótima (GRANJA; RUIZ, 2020; LISBOA, 2002; SOUTO-MAIOR, 2014, p. 94). De forma esquemática, o algoritmo Simplex pode ser dado conforme a Figura 3.

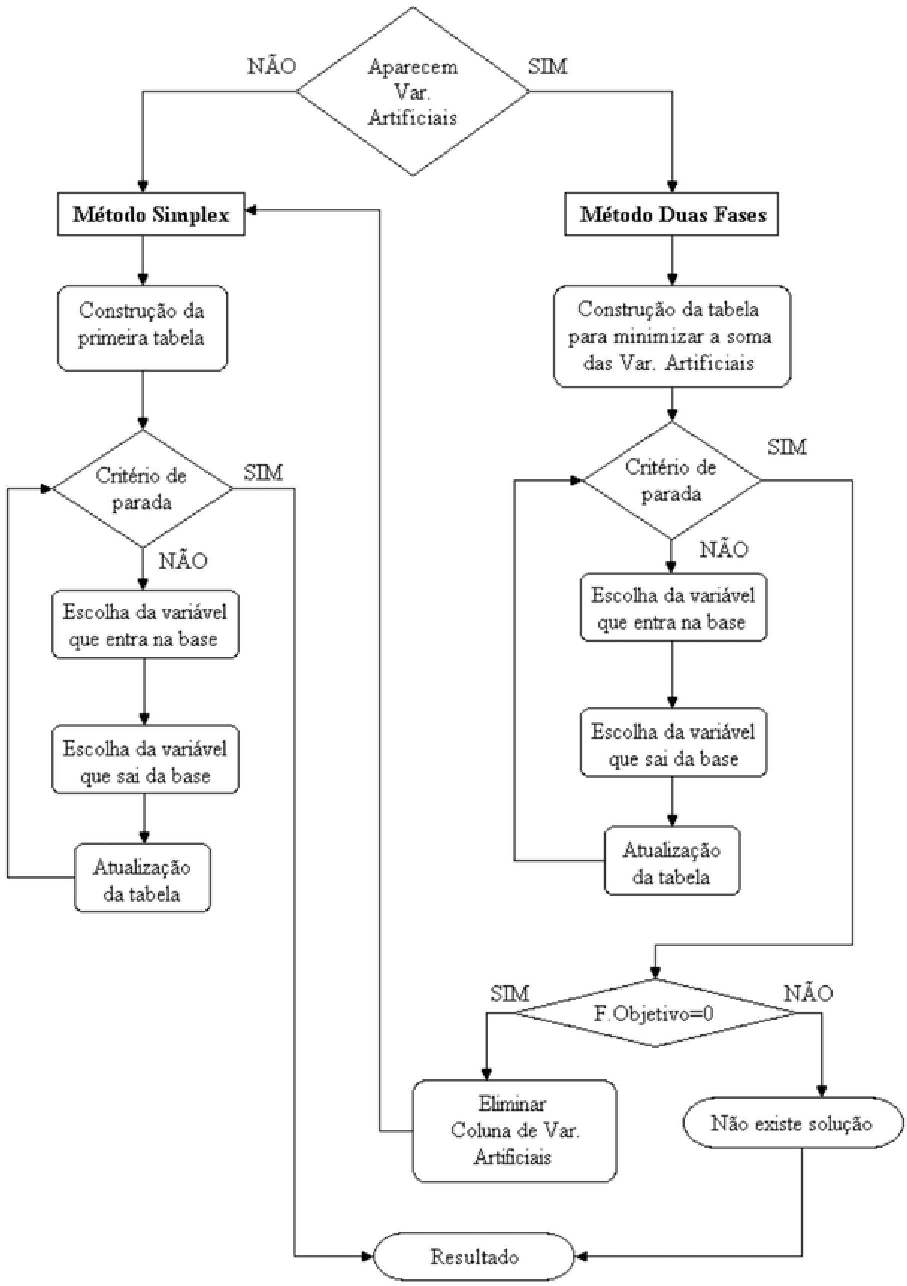

Figura 3 – Procedimentos para alcançar a solução do problema de modelagem.

Fonte: Adaptado de Granja e Ruiz (2020).

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLEX

Solução Algébrica

Para tornar mais fácil a compreensão do funcionamento do algoritmo Simplex, aqui será mostrado um exemplo da aplicação do método. Dessa forma, é considerado o seguinte problema fictício de maximização:

$$Max\ Z = 3X1 + 5X2$$
$$\text{Sujeito a:}$$
$$2X1 + 4X2 <= 10;$$
$$6X1 + X2 <= 20;$$
$$X1 - X2 <= 30;$$
$$X1\ e\ X2 >= 0.$$

Seguindo o 1º e o 2º passo dados na seção anterior, reescreve-se as expressões na forma equações, insere-se as variáveis de folga (F1, F2 e F3) e monta-se o primeiro quadro ou *Tableau*. Portanto, tem-se:

$$Z - 3X1 - 5X2 = 0$$
$$2X1 + 4X2 + F1 = 10$$

Feito isso pode ser montado o primeiro *Tableau* (Tabela 1).

	Base	Variáveis						
		Z	X1	X2	F1	F2	F3	b
FO	Z	1	-3	-5	0	0	0	0
Restr. 1	F1	0	2	4	1	0	0	10
Restr. 2	F2	0	6	1	0	1	0	20
Restr. 3	F3	0	1	-1	0	0	1	30

Tabela 1 – Primeiro Tableau do Simplex.

Fonte: Autoria própria.

Conforme o passo 3, no primeiro *Tableau*, adota-se que a solução inicial seria no ponto X1 = 0 e X2 = 0 e que o valor de Z também é zero. Seguindo os passos 4 e 5, deve-se escolher a primeira coluna que entra na base, bem como a linha que sai. A coluna que entra será a que possui o menor valor negativo e a linha que sai será a que apresentar a menor relação positiva entre os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base.

Assim, olhando para a Tabela 1, verifica-se que a coluna que entra na base é a de X2 e a linha que sai é a linha de F1, que será chamada de Nova Linha Pivô (NLP). O Elemento Pivô (EP) é o que fica na intersecção da coluna que entra com a linha que sai. Nesse caso, o EP será 4. No passo 6, são atualizadas todas as linhas, a partir dos seguintes cálculos:

$$L1 = L1 - (-5) * NLP$$
$$NLP = L2/EP$$
$$L3 = L3 - (1) * NLP$$
$$L4 = L3 - (-1) * NLP$$

Executado o passo 6, chega-se ao segundo *Tableau* do Simplex conforme Tabela 2. Pelo 7º passo do algoritmo, como ainda não se tem todos os elementos da linha da FO positivos, deve-se retornar ao 4º passo, escolher a nova coluna que entra e a linha que sai, calcular a NLP e atualizar todas as linhas da tabela de acordo com os passos 5 e 6.

	Base	Variáveis						
		Z	X1	X2	F1	F2	F3	b
FO	Z	1	-0,5	0	1,25	0	0	12,5
Restr. 1	X2	0	0,5	1	0,25	0	0	2,5
Restr. 2	F2	0	5,5	0	-0,25	1	0	17,5
Restr. 3	F3	0	1,5	0	0,25	0	1	32,5

Tabela 2 – Segundo Tableau do Simplex.

Fonte: Autoria própria.

Assim, pelos passos 4 e 5, a coluna que entra na base será a de X1 e a linha que sai será a de F2. O EP é o número 5,5. No passo 6, são atualizadas todas as linhas da Tabela 2, a partir dos cálculos:

$$L1 = L1 - (-0{,}5) * NLP$$
$$L2 = L2 - (0{,}5) * NLP$$
$$NLP = L3/EP$$
$$L4 = L4 - (1{,}5) * NLP$$

Executados os cálculos de atualização das linhas da Tabela 2, chega-se a um novo *Tableau*, conforme Tabela 3.

	Base	Variáveis						
		Z	X1	X2	F1	F2	F3	b
FO	Z	1	0	0	1,23	0,09	0	14,09
Restr. 1	X2	0	0	1	0,27	-0,09	0	0,91
Restr. 2	X1	0	1	0	-0,05	0,18	0	3,18
Restr. 3	F3	0	0	0	0,32	-0,27	1	27,73

Tabela 3 – Terceiro Tableau do Simplex.

Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 3, como a linha da FO já possui numeração positiva em todos os elementos, significa que o algoritmo Simplex chegou à solução ótima, que é:

$$X1 = 3{,}18;\ X2 = 0{,}91;\ Z = 14{,}09$$

Análise via Gráfico

Considerando o mesmo problema, já resolvido pela forma algébrica, aqui é mostrado como o Simplex converge para a solução ótima via gráfico. Assim, na Figura 4 é vista a região de soluções viáveis para o problema.

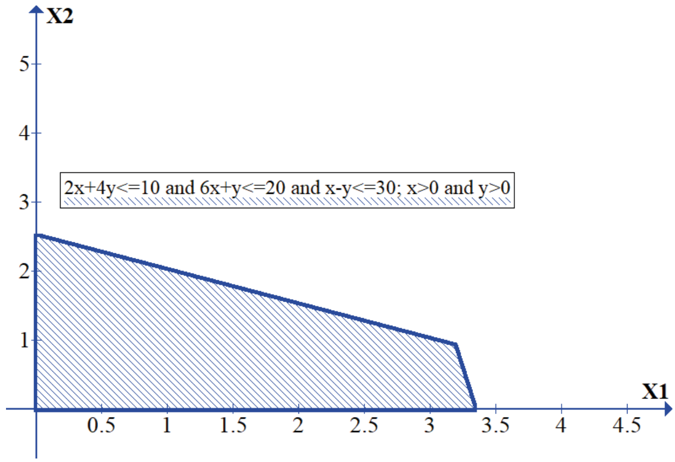

Figura 4 – Região viável para a solução do problema.

Fonte: Autoria própria.

De acordo com o primeiro 1º *Tableau* tem-se que a solução parte do ponto X1 e X2 = 0 e, portanto, Z = zero. Já pelo 2º *Tableau* o Simplex aponta para o ponto X1 = 0 e X2 = 2,5 e Z = 12,5. No último *Tableau*, quando se chega à solução ótima, tem-se X1= 3,18, X2 = 0,91 e Z = 14,09. Na Figura 5 é mostrado o caminho seguido pelo algoritmo Simplex até chegar à solução ótima.

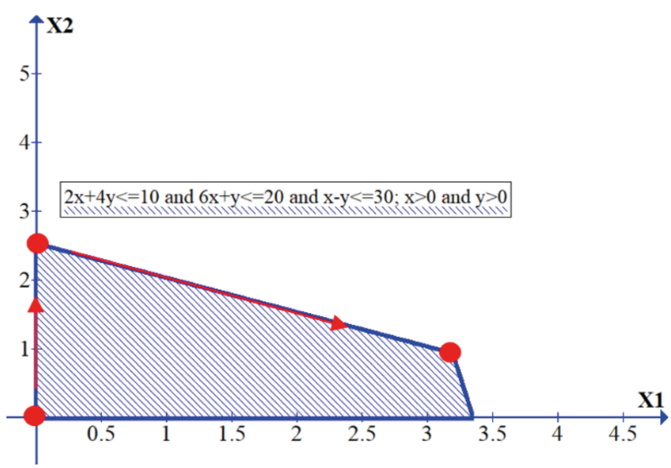

Figura 5 – Caminho percorrido pelo Simplex até chegar à solução ótima.

Fonte: Autoria própria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos uma breve explanação sobre o Método Simplex e realizamos uma aplicação detalhada do procedimento de cálculo usando esse método. A maior contribuição deste artigo esteve na forma detalhada como o problema é resolvido, bem como na revisão geral sobre a PO e suas aplicabilidades nos processos de otimização. Desenvolveu-se o passo-a-passo que explica de forma completa como obter a solução do problema de programação linear através do Método Simplex.

O desenvolvimento do Método Simplex se dá por meio de um conjunto padronizado de rotinas que executam o cálculo matemático (algoritmo), ou seja, essa técnica sistematiza o processo de resolução de um problema linear. Desse modo, mesmo quem é pouco familiarizado com a matemática vetorial e com a resolução de sistemas de equações e inequações lineares não deverá encontrar maiores dificuldades na utilização do Simplex.

REFERÊNCIAS

VANDERBEI, R.J. The Simplex Method. In: Linear Programming. International Series in Operations Research & Management Science, vol 114. Springer, Boston, MA. 2008. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74388-2_2

NELDER, J. A.; MEAD, R. A Simplex Method for Function Minimization. Computing Journal, v. 7, n. 4, p. 308-313, 1965. Disponível em: https://inspirehep.net/literature/861448 Acesso em: 12/12/2024.

KLEE, V.; MINTY, G. J. How good is the simplex algorithm? In: SHISHA, O. (Ed.). *Inequalities III*. New York: Academic Press, 1972. p. 159-175.

BHUNIA, A.; SAHOO, L.; SHAIKH, A. Simplex method. In: MITTAL, A.; GUPTA, A. K. (Eds.). **Advanced optimization and operations research**. Singapura: Springer, 2019. (Springer Optimization and Its Applications, v. 153). Cap. 3, p. 51-84. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-981-32-9967-2_3. Acesso em: 24 jan. 2025.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and nonlinear programming**. 3. ed. Nova York: Springer, 2008. 546 p. Disponível em: https://grapr.wordpress.com/wp-content/uploads/2011/09/luenberger-linear-and-nonlinear-programming-3e-springer-2008.pdf. Acesso em: 24 mar. 2025.

CHINNECK, J. W. The Mechanics of the Simplex Method. In: Practical Optimization: A Gentle Introduction. Ottawa: Carleton University, 2001. Disponível em: https://fci.stafpu.bu.edu.eg/Scientific%20 Computing/3469/crs-11712/Files/Alsayed%20alsayed%20mitwali%20badr_Chapter4.pdf Acesso em: 01 fev. 2025.

GALE, D. LINEAR PROGRAMMING AND THE SIMPLEX METHOD. In: Computer Aided Chemical Engineering, v. 5, p. 23-45, 1987. Disponível em: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=2542dcee603a602b12aa936351d1d8d42786813e Acesso em: 03 jan. 2025.

NASH, J. C. The (Dantzig) Simplex Method for Linear Programming. Computing Science and Engineering, v. 2, n. 1, p. 29-31, 2000. Disponível em: https://paginas.fe.up.pt/~mac/ensino/docs/OR/otherDocs/TheSimplexMethodForLinearProgramming.pdf Acesso em: 20 jan. 2025.

KAGAN, N.; SCHMIDT, H. P.; OLIVEIRA, C. C. B.; KAGAN, H. Métodos de otimização aplicados a sistemas elétricos de potência. São Paulo: Editora Blucher, 2009. ISBN 978-85-212-0472-5.

GRANJA, D. I.; RUIZ, J. J. R. PHPSimplex. 2006-2020. Disponível em: http://www.phpsimplex.com/pt/teoria_metodo_simplex.htm#. Acesso em: 10 mar. 2024.

LISBOA, E. F. A. Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2002.

LOPES DA PAIXÃO, J. et al. EV Charging microgrid: electrical and operation modeling of energy management. IET Conference Proceedings, p. 2373–2377, 2023.

PAIXÃO, J. L. DA et al. Optimized Strategy for Energy Management in an EV Fast Charging Microgrid Considering Storage Degradation. Energies 2025, Vol. 18, Page 1060, v. 18, n. 5, p. 1060, 21 fev. 2025.

SOUTO-MAIOR, C. D. Pesquisa Operacional. 3. ed. Florianópolis, SC: Editora UFSC, 2014. p. 94.