


ANÁLISE HARMÔNICA ELEMENTAR NO SISTEMA CIRCULAR DA AMPLITUDE DE TRANSIÇÃO NA DINÂMICA DA GRAVIDADE QUÂNTICA EM LOOP

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.8901212624111>

Data de aceite: 24/01/2025

Jizreel Pereirada Silva

Centro Universitário Internacional,
Nilópolis, RJ, Brasil

Robson do Carmo Araújo

Universidade Federal do Piauí, Piauí, PI,
Brasil

ELEMENTARY HARMONIC
ANALYSIS IN THE CIRCULAR
SYSTEM OF THE TRANSITION
AMPLITUDE IN THE DYNAMICS OF
LOOP QUANTUM GRAVITY

RESUMO: Uma discussão breve é introduzida para o entendimento da estrutura do espaço-tempo, apresentando estratégias de quantização e o mapa de contorno do espaço de Hilbert, seguindo com a amplitude de transição e o modelo de Ponzano-Regge. Toda essa discussão é dedicada no regime tridimensional, finalizando com a análise harmônica elementar num sistema circular. Discutimos essas relações introdutórias do caráter geométrico do espaço-tempo, em particular do tetraedro, ampliando a visão de possíveis trabalhos formas alternativas de amplitude de transição e aprofundamento em modelos de espuma de spin.

PALAVRAS-CHAVE: amplitude, quantização, análise, transição, espaço.

ABSTRACT: A brief discussion is introduced to understand the structure of space-time, presenting quantization strategies and the contour map of Hilbert space, followed by the transition amplitude and the Ponzano-Regge model. This entire discussion is dedicated to the three-dimensional regime, ending with the elementary harmonic analysis in a circular system. We discuss these introductory relations of the geometric character of space-time, in particular of the tetrahedron, broadening the view of possible works on alternative forms of transition amplitude and deepening in spin foam models.

KEYWORDS: amplitude, quantization, analysis, transition, space.

INTRODUÇÃO

A gravidade quântica em loop (Loop Quantum Gravity – LQG) busca descrever o comportamento quântico dos campos gravitacionais, ou seja, a dinâmica das interações gravitacionais em um contexto quântico. Essencialmente, a teoria visa entender como a gravidade se comporta em níveis microscópicos, incorporando os princípios da mecânica quântica a estrutura do espaço-tempo [1].

Neste trabalho, apresentaremos uma discussão sobre a compreensão da base estrutural do espaço de Hilbert, o tratamento euclidiano tridimensional para abordar a LQG e apresentaremos algumas estratégias de quantização, amplitude de transição, o modelo de Ponzano-Regge e, finalmente, a análise harmônica elementar.

ESPAÇO DE HILBERT E ESTRATÉGIAS DE QUANTIZAÇÃO

O desenvolvimento para a discussão da quantização do espaço-tempo se dá por diversos fatores. Numa fase inicial, buscamos descrever os conceitos pelas propriedades espectrais da área e volume, considerando a estrutura geométrica abordada para um determinado poliedro, na tentativa de relacionar o clássico com o quântico, desenhando de forma semiclássica as análises dos operadores e os efeitos relacionados para certos acoplamentos.

A ideia a priori é encontrar uma teoria quântica para o campo gravitacional, entendendo a alta complexidade no caráter metodológico, analisando o formato da dinâmica quântica, em particular a amplitude de transição, num regime de baixa dimensionalidade, no caso tridimensional.

Para analisarmos a dinâmica quântica, buscamos o entendimento da descrição dos estados quânticos da geometria de contorno e a amplitude de transição para esses estados de contorno, sendo mapeados pelo espaço de Hilbert. Como a quantização do espaço-tempo na abordagem da gravidade quântica em loop envolve os operadores de área e volume, bem como considera as variáveis clássicas da estrutura geométrica, temos o elemento U_e para cada aresta e L_f para a face da triangulação dual do grupo $SU(2)$, sendo o elemento U_e a holonomia da conexão gravitacional ao longo da aresta com a ação expressa

$$S = \frac{1}{8\pi G} \sum_f \text{Tr}(L_f U_f) \quad (1)$$

Os operadores U_i as coordenadas e L_i os momento, são requisitos básicos para a construção do espaço de Hilbert para se ter o limite clássico, na forma

$$[U_i, L_{i'}] = i(8\pi G)\delta_{ii'} U_i \tau^i \quad (2)$$

Onde o espaço de funções quadradas integráveis das coordenadas para o espaço de Hilbert, pode ser expresso na forma

$$\mathcal{H}_\Gamma = L_2[SU(2)^\Gamma] \quad (3)$$

Sendo Γ o termo de fronteira. Os detalhes para a quantização do comprimento, área e volume, bem como os links da estrutura \mathcal{H}_Γ , podem ser encontrados em [1].

No caso da rede de spin, o conceito de localidade não existe para a rede pois é a própria existência. A ideia da rede de spin se dá na mesma maneira que o fóton interage com o elétron, assim os loops interagem com as partículas, por isso o loop não se localiza no espaço, pois é o próprio espaço.

Dentro dessa ideia de rede, Rovelli, Jacobson e Smolin, usaram uma nova formulação, semelhante a teoria de Yang-Mills de Abhay Ashtekar da relatividade geral, substituindo o campo de Einstein por um campo chamado de conexão Ashtekar, tornando as variáveis de loop mais naturais. Com isso, trabalharam com soluções da equação de Wheeler-DeWitt, onde descreviam as excitações em loop do campo gravitacional.

Para Jorge Pullin, o entendimento sobre o volume do espaço ficou incerto e considerou os “nós”, sendo os pontos em que os loops se cruzam, como estruturas de conexão e representando o volume que seria o quanta de espaço. A parte do loop entre dois nós que é um elo da rede, indica as adjacências dos quanta de espaço, separados por uma superfície, sendo as áreas, como loops “links” da rede também quantizada. O nó carrega o número quântico de elementos de volume e o loop “links” carregam os números quânticos de elementos de área.

Um elo de rede, ou seja, a parte do loop entre dois nós, indica os quanta de espaço que são adjacentes um do outro, onde dois elementos adjacentes do espaço são separados por uma superfície e a área dessa superfície acaba por ser quantizada também. Ficou claro que os nós carregam números quânticos de elementos de volume e os loops “links” carregam números quânticos de elementos de área [2].

Os estados invariantes de calibre é da forma $\psi(U_l) = \psi(\Lambda_{se} U_l \Lambda_{te}^{-1})$, $\Lambda_n \in SU(2)$, pois para introduzir a discussão de uma base da rede de spin é necessário a condição de fechamento, na forma $\vec{C}_n \psi = 0$ e para o caso de uma descrição primordial de uma figura geométrica, utilizamos primeiramente o tetraedro, comentando sobre as variáveis necessárias para extrair as informações que para cada nó do grafo limite, temos \vec{C}_n o gerador de $SU(2)$ no nó n , temos

$$\vec{C}_n = \vec{L}_{\ell_1} + \vec{L}_{\ell_2} + \vec{L}_{\ell_3} = 0 \quad (4)$$

Dentro dessa análise em uma das faces do tetraedro que é um triângulo, temos os l_1 , l_2 e l_3 que são três links que emergem do nó n no centro do triângulo, sendo a condição de fechamento (restrição) anteriormente vista. O \vec{L}_ℓ é o lado do triângulo e a Eq. (4) indica que o triângulo se fecha, por isso a soma igual a zero.

De acordo com essa condição, o subespaço \mathcal{H}_Γ é proveniente de $\vec{C}_n \psi = 0$, na forma compacta de $SU(2)$, com K_Γ expresso na forma

$$K_\Gamma = L_2 \left[\frac{SU(2)^L}{SU(2)^N} \right]_\Gamma \quad (5)$$

Sendo L o número de links e os N o número de nós de Γ , sendo Γ padrão de transformações de $SU(2)^N$ em $SU(2)^L$ ditado pela estrutura dos grafos. Os operadores L_i são invariantes e definidos no espaço de Hilbert K_{Γ} . Os estados da rede de spin $|j_i\rangle$ formam a base K_{Γ} , que abrange os estados quânticos da geometria.

Na formação das bases ortogonais, o teorema de Peter-Weyl, afirma que os elementos da matriz $D_{mn}^j(U)$ das matrizes de Wigner, vistos como funções de $SU(2)$ são ortogonais em relação ao produto escalar definido na medida de Haar, na forma

$$\int dU \overline{D_{m'n'}^{j'}(U)} D_{mn}^j(U) = \frac{1}{d_j} \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (6)$$

Com a dimensionalidade de representação natural do spin j para $d_j = 2j+1$ e a base ortonormal $\frac{1}{d_j}$, com as matrizes de Wigner formando as bases ortogonais no espaço de Hilbert. Este espaço pode ser decomposto em uma soma de subespaços de dimensão finita de spin j , abrangidos pelos estados de base formados pelos elementos matriciais das matrizes de Wigner $D^j(U)$, com dimensão $(2j+1)^2$, que é o número de estados da matriz $D^j(U)$. Essa matriz é um mapa do espaço de Hilbert, visto como elemento de $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j$, onde o teorema de Peter-Weyl afirma que

$$L_2[SU(2)] = \bigoplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j) \quad (7)$$

Seguindo esse entendimento do mapa do espaço de Hilbert, na forma expandida temos o estado limite estruturado para

$$\begin{aligned} L_2[SU(2)^L] &= \bigotimes_{\ell} [\bigoplus_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j)] = \bigoplus_{j_{\ell}} \bigotimes_{\ell} (\mathcal{H}_{j_{\ell}} \otimes \mathcal{H}_{j_{\ell}}) \\ L_2[SU(2)^L] &= \bigoplus_{j_{\ell}} \bigotimes_n (\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}) \end{aligned} \quad (8)$$

Os spins j_1 , j_2 e j_3 saem dos nós. O objetivo é a obtenção de estados e restringir a parte invariável de qualquer conjunto de espaços que se transformam no mesmo nó. Os dois espaços de Hilbert associados a um link pertencem naturalmente às duas extremidades do link. Agrupando os espaços de Hilbert próximos no mesmo nó, a transformação fica na forma

$$L_2 \left[\frac{SU(2)^L}{SU(2)^N} \right] = \bigoplus_{j_{\ell}} \bigotimes_n \text{Inv}_{SU(2)} (\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3}) \quad (9)$$

O aspecto invariante $\text{Inv}_{SU(2)} (\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3})$ só existirá se os spins j_1 , j_2 e j_3 , obedecerem a desigualdade de Maldelstam na forma

$$|j_1 - j_2| < j_3 < j_1 + j_2 \quad (10)$$

A desigualdade de Maldelstam é semelhante à desigualdade triangular, pois é condição para a formação triangular e previsibilidade do estado quântico geométrico na LQG, sendo uma superposição de estados da rede de spin, onde teremos para o estado

$$|\psi\rangle = \sum_{j_{\ell}} c_{j_{\ell}} |j_{\ell}\rangle \quad (11)$$

AMPLITUDE DE TRANSIÇÃO E O MODELO PONZANO-REGGE

A amplitude de transição é uma função de estado limite, onde consideramos uma região compacta do espaço-tempo delimitando dois componentes desconectados, o limite do passado e do futuro. Na realidade é uma probabilidade de ocorrer uma transição entre dois estados quânticos nesse contexto. Mas até que ponto ou a partir de qual ponto no espaço-tempo, podemos ter essa definição para um cálculo aproximado de transição?

A discussão de passado, presente e futuro, apresenta dificuldade para o entendimento no regime clássico, pois necessariamente exige um referencial e a partir dessa fixação, modela-se o estado de temporalidade.

A amplitude de transição, para o caso deste trabalho, procura discutir essa transição de estados e que necessariamente aborda o estado de fronteira, onde descreve o limite, apresentando o caráter de definição. O termo de fronteira no regime quântico é sensível nesse limite, sendo assim devemos fixar uma triangulação do espaço-tempo, onde a amplitude é uma função dos estados definidos em , do grafo de contorno [4,5]. A amplitude de transição é uma função das coordenadas e momentos, expressas na forma

$$W_{\Delta}(U_{\ell}) = \langle W_{\Delta} | U_{\ell} \rangle \quad (12)$$

e

$$W_{\Delta}(j_{\ell}) = \langle W_{\Delta} | j_{\ell} \rangle \quad (13)$$

Para o cálculo da amplitude de transição W_{Δ} da teoria discretizada na triangulação Δ , usamos a integral de caminho de Feynman sobre todas as configurações clássicas ponderadas pelo exponencial da ação clássica, na forma

$$W_{\Delta}(U_{\ell}) = \mathcal{N} \int dU_e \int dL_f e^{\frac{i}{8\pi\hbar G} \sum_f \text{Tr}[U_f L_f]} \quad (14)$$

Com o fator \mathcal{N} de normalização e integral dos momentos, sendo uma exponencial que dá a função delta, expressa na forma

$$W_{\Delta}(U_{\ell}) = \mathcal{N} \int dU_e \prod_f \delta U_f \quad (15)$$

O cálculo dessa integral se dá na expansão da função delta sobre o grupo de representação, onde temos

$$\delta(U) = \sum_j d_j \text{Tr} D^{(j)}(U) \quad (16)$$

Com d_j na representação $d_j = 2j + 1$, onde um elemento de grupo $U \in SU(2)$, determina uma rotação em $SO(3)$, a quantidade $\text{Tr} D^{(j)}(U)$ é o caráter da representação e depende do ângulo, não do eixo de rotação. O produto da representação $D(UV) = D(U)D(V)$, sendo U_f um produto dos elementos dos grupos associados aos links $1f, \dots, nf$ ao redor da face f , onde temos para a amplitude

$$W_{\Delta}(U_{\ell}) = \mathcal{N} \int dU_e \prod_f \left(\sum_j d_j \text{Tr} D^{(j)}(U_f) \right)$$

$$W_{\Delta}(U_{\ell}) = \mathcal{N} \sum_{j_f} \left(\prod_f d_{j_f} \right) \int dU_e \prod_f \text{Tr}(D^{j_f}(U_{1f}) \dots D^{j_f}(U_{nf})) \quad (17)$$

Considerando a contração, a normalização pode ser calculada na forma

$$\int dU D_{m_1 n_1}^{j_{\ell_1}}(U) D_{m_2 n_2}^{j_{\ell_2}}(U) D_{m_3 n_3}^{j_{\ell_3}}(U) = \ell^{m_1 m_2 m_3} \ell^{n_1 n_2 n_3}$$

$$\int dU D_{m_1 n_1}^{j_{\ell_1}}(U) D_{m_2 n_2}^{j_{\ell_2}}(U) D_{m_3 n_3}^{j_{\ell_3}}(U) = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

O grupo de símbolos $3j$ contraídos entre si é o resultado das integrais na Eq. (17), pois cada aresta produz dois símbolos $3j$, localizadas nas duas extremidades da aresta e possuem índices contraídos nessas extremidades.

Como estamos discutindo o aspecto tetraédrico da estrutura geométrica, as contrações se acentuam nos vértices e em cada vértice existem quatro arestas, e por tanto, quatro símbolos $3j$, contraídos entre si. O caminho das contrações reproduz a estrutura de um tetraedro, com spins j_1, \dots, j_6 , “arestas”, onde os símbolos $3j$ são os quatro vértices do tetraedro. Os spins de 1 a 3 formam um triângulo e os de 4 a 6 unem-se no vértice oposto a esse triângulo, com cada coluna formada por spins que não se encontram e após a integração das variáveis do grupo de arestas internas, as variáveis do grupo de arestas de limite permanecem [6,7].

Se contrairmos com um estado da rede de spin, obtemos a soma sobre a associação de um spin a cada face, respeitando as desigualdades triangulares em todas as arestas, temos

$$W_{\Delta}(j_{\ell}) = \mathcal{N}_{\Delta} \sum_{j_f} \prod_f (-1)^{j_f} d_{j_f} \prod_v (-1)^{j_v} \{6j\} \quad (19)$$

O fator de normalização pode depender da triangulação, sendo a amplitude de transição na representação de spin. Não se tinha um entendimento de que o espectro seria discreto para o comprimento e determinado por spins, bem como a dependência da triangulação para o fator de normalização. Deu-se um ansatz para o significado físico da gravidade quântica em loop. A conexão entre a gravidade quântica em loop e o modelo Ponzano-Regge foi apontada por Rovelli [8,9].

A amplitude é caracterizada por propriedades básicas como o princípio da superposição, localidade e invariância euclidiana local. Devemos frisar que a questão de não-localidade é o tratamento generalizado estrutural do espaço-tempo como um todo, mas a localidade é quando analisamos um aspecto particular dessa estrutura. Tendo em vista essa caracterização, a primeira propriedade bem discutida na mecânica quântica, leva a descrição da soma das amplitudes elementares, sendo expressa sobre os caminhos pela soma de Feynmann na forma

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_{\sigma} W(\sigma) \quad (20)$$

Para o caso da localidade, as interações são locais no espaço-tempo, o que leva a acreditar que as amplitudes elementares são produtos de amplitudes associadas a pontos do espaço-tempo, expressa na forma

$$W(\sigma) \sim \prod W_v \quad (21)$$

No caso quadridimensional a invariância euclidiana local corrige a invariância de amplitude para $SU(2)$, o símbolo δj pode ser descrito como projeção na parte invariante do estado do grafo de limite do vértice na forma

$$W_v = (P_{SU(2)} \psi_v) 1\mathbb{I} \quad (22)$$

Com ψ sendo o estado limite, $P_{SU(2)}$ é o projetor de invariância local e a componente $(1\mathbb{I})$ indica a avaliação do estado da rede de spin na identidade $U_i = 1\mathbb{I}$.

No caso de comentarmos sobre o modelo de Ponzano-Regge, partimos da Eq. (19) sendo relacionada com a relatividade geral, pois descreve objetos básicos da teoria de representação de $SU(2)$.

Ponzano e Regge, fizeram uma análise para spins maiores e associando ao tetraedro, com os 6 comprimentos de borda, relacionaram os spins de modo que $L_a = j_a + \frac{1}{2}$. Utilizaram também o volume do tetraedro V e a ação de Regge S , provando que no grande limite de spin, tem-se que

$$\{6_j\}_{j \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\sqrt{12\pi V}} \cos\left(S + \frac{\pi}{4}\right) \quad (23)$$

Roberts considera essa discussão de Ponzano e Regge, provando essa relação assintótica e considera que o termo do cosseno, substituindo como a soma de dois termos, expressando na forma [10]

$$\{6_j\}_{j \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{2\sqrt{-12i\pi V}} e^{iS} + \frac{1}{2\sqrt{12i\pi V}} e^{-iS} \quad (24)$$

Levando em consideração grandes spins, desconsidera a parte negativa e envolve a soma como aproximação da integral do comprimento da geometria de Regge, sendo o integrando o exponencial da ação de Einstein-Hilbert e a integral de caminho da Eq. (19) é na verdade a soma sobre geometrias, na forma

$$Z \sim \int D[g] e^{\frac{i}{\hbar} \int \sqrt{-g} R} \quad (25)$$

É a definição normal da gravidade quântica, porém ainda existe uma discussão importante que é o limite do contínuo na busca de descrever o detalhamento da discretização. Ponzano e Regge, verificaram em detalhes a triangulação, mantendo o grafo do limite fixo e escolheram o fator de normalização na forma

$$N_{\Delta} = \omega^p \quad (26)$$

Sendo p o número de pontos da triangulação e ω um número. Existe a possibilidade de aparecer termos divergentes nesse refinamento, mas a mudança de triangulação não muda a amplitude de transição. Os termos divergentes podem ser resolvidos com ω . Essa correção se dá com um corte, limitando a soma sobre cada spin para um valor máximo Λ , tomando ω na forma $\omega = \omega_0/\Lambda$, sendo possível assimilar que para o limite $\Lambda \rightarrow \infty$, não haverá a perda da triangulação, sendo assim a amplitude é definida na forma

$$W = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\omega_0}{\Lambda} \right)^p = \sum_{j_f=0}^{\Lambda} \prod_f (-1)^{j_f} d_{j_f} \prod_v (-1)^{j\{6j\}} \quad (27)$$

Outro ponto importante é a possibilidade de refinamento do grafo limite, sendo nesse caso sem efeito físico. Para trabalhar dessa forma, devemos considerar a amplitude para um limite formado por dois grafos semelhantes mas desconexos Γ . O que definirá um mapa do espaço de Hilbert \mathcal{H}_{Γ} para si mesmo é a amplitude de transição.

Esses resultados nos leva a uma combinação para o tratamento da relatividade geral, sendo a ação para esse regime escondida no símbolo de Wigner δj [3].

Toda essa discussão se encontra em três dimensões e tentativas para o uso dessa ferramenta em quatro dimensões foram feitas com muita dificuldade por meio século, não sendo discutidas neste trabalho para evitarmos exaustão e perda de objetividade.

ANÁLISE HARMÔNICA ELEMENTAR NO SISTEMA CIRCULAR

Para finalizarmos e complementarmos o entendimento, alguns aspectos deverão ser levados em conta para uma análise harmônica elementar do tratamento da amplitude de transição, mapeada pela conjectura tridimensional euclidiana.

Podemos começar com os espaços de estados quânticos de uma partícula em um círculo, tendo o seu produto escalar na forma

$$(\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \psi(\theta) \overline{\phi(\theta)} \quad (28)$$

Essa descrição é representada no grupo $U(1)$ e as funções $\psi_n(\theta) = e^{in\theta}$, com n inteiro, representa uma base de funções ortogonais, nada mais sendo do que a transformada discreta de Fourier, com cada função definindo uma reprodução unitária do grupo abeliano $U(1)$, com $\psi_n(\theta+\phi) = \psi_n(\theta) \psi_n(\phi)$. O espaço nesse caso pode ser expresso na forma

$$L_2 = [U(1)] = \otimes_n C_n \quad (29)$$

Com o plano complexo C_n representado em $U(1)$ sob o mapa exponencial $\psi_n(\theta)$. A distribuição do delta no círculo na forma expandida, pode ser expressa como

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{in\theta} \quad (30)$$

Neste exemplo, as principais características são reproduzidas no espaço $L_2 = [SU(2)]$ de funções $\psi(U)$ com produto escalar na forma

$$(\psi, \phi) = \int_{SU(2)} dU \overline{\psi(U)} \phi(U) \quad (31)$$

Essas funções no grupo $SU(2)$ atuam como $\psi(U) = \psi(\Lambda^{-1}U)$, onde $\Lambda \in SU(2)$, ficando na forma $\psi_{jnm}(U) = D_{nm}^j(U)$, como base de funções ortogonais em relação a esse produto escalar, sendo as matrizes de Wigner, chegando ao teorema de Peter-Weyl. Cada função representa um elemento de matriz, com representação unitária irredutível do grupo não abeliano $SU(2)$. O teorema de Peter-Weyl afirma que existe uma decomposição na soma ortogonal de $L_2[SU(2)]$, pode ser expresso na forma

$$L_2 = [SU(2)] = \otimes_j V_j \quad (32)$$

Com a soma dos spins semi-inteiros j . O espaço onde condiciona a matriz D^j é o V_j , com dimensão $(2j+1)^2$, transformando qualquer um dos índices de j . Como \mathcal{H}_j é a representação do spin j em $SU(2)$, a Eq. (32) pode ser expressa na forma

$$L_2 = [SU(2)] = \otimes_j (\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j) \quad (33)$$

Essa discussão de forma breve e introdutória, visa o entendimento básico da dinâmica do espaço-tempo, pois obviamente podemos utilizar diversos métodos e ferramentas na tentativa de descrever os diversos segmentos particulares de estudo.

Acreditamos que a sensibilidade se encontra no termo de fronteira, pois é necessário um operador adequado para previsibilidade do sistema evolutivo. Existem muitos questionamentos, como o parâmetro temporal, levantando argumentos sobre o corte passado-futuro, questionando o “fazer sentido” e mediante esse parâmetro, uma discussão da constante cosmológica, se já está embutida no cálculo de amplitude ou se é necessário um termo extra para descrever essa constante.

De maneira geral é importante essa análise harmônica elementar, pois proporciona os primeiros passos para mais formulações alternativas para descrever os problemas ainda em desenvolvimentos e até mesmo aqueles já consolidados. Nosso caso, podemos aplicar a análise harmônica em espaços de estados quânticos de uma partícula em um círculo, onde o produto escalar é definido como:

$$(\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \overline{\psi(\theta)} \phi(\theta) \quad (34)$$

Realizando um exemplo simples usando Python, ilustramos essa relação de funções de onda complexas no círculo.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definindo as funções de onda  $\psi(\theta)$  e  $\phi(\theta)$ 
def psi(theta):
    return np.exp(1j * theta) # Exemplo de função de onda complexa  $e^{i\theta}$ 

def phi(theta):
    return np.exp(-1j * 2 * theta) # Exemplo de função de onda complexa  $e^{-i2\theta}$ 

# Intervalo de  $\theta$  de 0 a  $2\pi$ 
theta_values = np.linspace(0, 2 * np.pi, 1000)

# Calculando o integrando para o produto escalar
integrand = np.conj(psi(theta_values)) * phi(theta_values)

# Calculando o produto escalar usando a regra do trapézio
product = np.trapz(integrand, theta_values) / (2 * np.pi)

# Plotando as funções de onda no círculo
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(theta_values, np.real(psi(theta_values)), label='Re( $\psi(\theta)$ )', linestyle='--', color='b')
plt.plot(theta_values, np.imag(psi(theta_values)), label='Im( $\psi(\theta)$ )', linestyle='--', color='b')
plt.plot(theta_values, np.real(phi(theta_values)), label='Re( $\phi(\theta)$ )', linestyle='--', color='r')
plt.plot(theta_values, np.imag(phi(theta_values)), label='Im( $\phi(\theta)$ )', linestyle='--', color='r')
plt.title('Funções de Onda  $\psi(\theta)$  e  $\phi(\theta)$ ')
plt.xlabel('θ')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Exibindo o resultado do produto escalar
print(f'Produto escalar ( $\psi$ ,  $\phi$ ): {product}')

```

Figura 1: Imagem dos comandos no Python das funções de onda complexas no círculo.

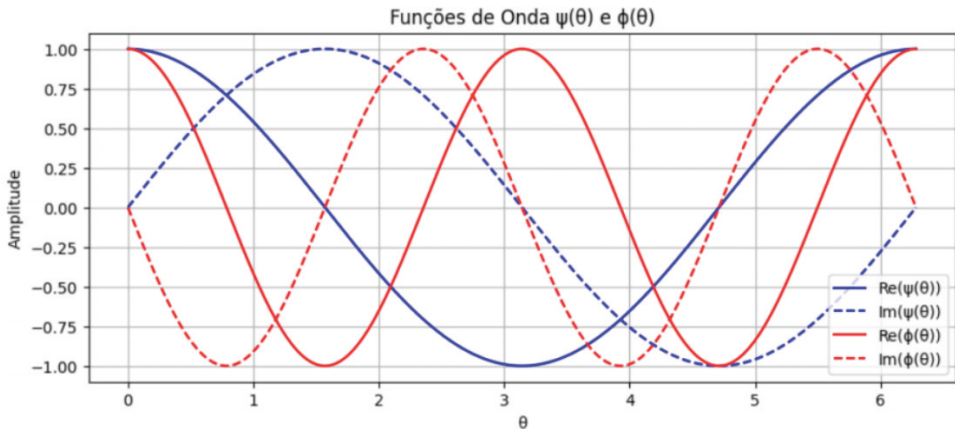


Gráfico 1: Gráfico dos comandos no Python das funções de onda complexas no círculo.

As funções complexas de onda são definidas no círculo, com a integração do produto escalar, com a utilização da função `np.trapz` para realizar a integração numérica do integrando em relação a θ , dividimos pelo comprimento do intervalo (2π) para obter o produto escalar desejado. Plotamos as partes real e imaginária das funções de onda $\psi(\theta)$ e $\phi(\theta)$ para visualizar como elas se comportam ao longo do círculo [11,12].

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A discussão envolve a estrutura do espaço-tempo em particular no termo de fronteira. Introduzimos a importância de abordar o espaço de Hilbert e estratégias de quantização, pois de maneira salutar padroniza uma ideia inicial e promove sequências significativas para descrever aspectos dinâmicos da LQG.

Inúmeros questionamentos serão levantados o que se espera de uma pesquisa complexa para o estudo de gravidade quântica, mas em uma primeira fase é crucial a abordagem de um espaço de configuração, apontando os fatores condicionantes para darmos seguimento ao que se propõe analisar.

Apresentamos o modelo de Penzano-Regge, modelado pelas propriedades de amplitude, consolidando com uma análise harmônica elementar, exemplificando num sistema circular, agregando as representações do espaço.

A amplitude de transição apresentada aqui é de caráter introdutório, pois está longe de finalizar o entendimento para essa estrutura, tendo em vista os fatores ainda em desenvolvimento como a matéria escura, energia escura, objetos compactos e outros efeitos possíveis no universo. Entendemos que é necessário a utilização de outras formulações, levando em consideração essa discussão de amplitude de transição, pois tornaria deficiente descrever um sistema com efeitos externos sem ao menos configurar o espaço adequado para essa descrição.

Ilustramos como a análise harmônica pode ser aplicada na quantificação da sobreposição de duas funções de onda em um espaço de estados quânticos no círculo. Utilizando Python, podemos não apenas calcular numericamente o produto escalar, mas também visualizar graficamente as funções de onda envolvidas, proporcionando uma compreensão mais profunda do conceito.

Estudos estão sendo realizados nessa direção, sendo analisados em regime de alta dimensionalidade, processos de interação matéria-antimatéria, efeitos cosmológicos e até mesmo uma modelação levando em conta outras variáveis na identificação da realidade física, favorecendo para consolidação do entendimento da textura do universo.

Formulações alternativas de amplitude de transição estão sendo analisadas para posterior aprofundamento, bem como a restrição de simplicidade na espuma de spin.

REFERÊNCIAS

[1] J. P. Silva. “Quantização do espaço-tempo no contexto da gravidade quântica em loop”, *Revista Brasileira de Física*, **3**, 1, e202303030107, 2023.pp. 1-9.DOI:<https://doi.org/10.5281/zenodo.7757517>.

[2] C.Rovelli.“Loop quantum gravity”, *Physics World*, **16**, 11, 2003, pp.37-41. ISSN:2058-7058. DOI:<https://doi.org/10.1088/2058-7058/16/11/36>.

[3] C.Rovelli e F.Vidotto.*Covariant loop quantum gravity: an elementary introduction to quantum gravity and spinfoam theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

- [4] R.Oeckl. "A general boundary formulation for quantum mechanics and quantum gravity". *Phys. Lett.*, B575, 318-324, arXiv: 0306025[hep-th] , 2003.
- [5] R.Oeckl. "General boundary quantum field theory: foundations and probability interpretation". *Adv. Theor. Math. Phys.*, **12**, 319-352, arXiv: 0509122 [hep-th] , 2008.
- [6] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics*. Oxford: Pergamon, 1959.
- [7] J. W. Barrett e I. Naish-Guzman. "The Ponzano-Regge model". *Class. Quant. Grav.*, **26**, 155014, arXiv: 0803.3319, 2009.
- [8] G. Ponzano e T. Regge. *Spectroscopy and group theoretical methods in physics*. In: Bloch, F (ed), Amsterdam: North-Holland, 1968.
- [9] C. Rovelli. "The basis of the Ponzano-Regge-Turaev-Viro-Ooguri model is the loop representation basis". *Phys. Rev. D.*, **48**, 2702-2707, 1993.
- [10] J. Roberts. "Classical 6j-symbols and the tetrahedron". *Geometry and Topology.*, **3**, 21-66, arXiv: 9812013 [math-ph] , 1999.
- [11] Hunter, J.D. *Matplotlib: A 2D Graphics Environment*. In: Python Data Science Handbook. Ed. Jake VanderPlas. O'Reilly Media, 1st Edition, 2016.
- [12] Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J. et al. *Array Programming with NumPy*. In: Python for Data Analysis. Ed. Wes McKinney. O'Reilly Media, 2nd Edition, 2017.