SISTEMAS PERIÓDICOS: PRINCIPIO DE INVARIANCIA UNIFORME

Data de submissão: 18/12/2024 *Data de aceite: 02/01/2025*

Wendhel Raffa Coimbra
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS, Paranaíba, MS, Campus de Paranaíba, CPAR, Paranaíba, MS

Luís Fernando Alberto Costa
Universidade de São Paulo, USP, São Carlos, SP
Departamento de Engenharia Elétrica e da Computação, EESC, São Carlos, SP

Trabalho apresentado no DINCON, Natal - RN, 2015.

RESUMO: Uma versão uniforme do princípio de invariância de LaSalle para sistemas periódicos é proposto e demonstrado neste trabalho. Esta versão é útil para obter estimativas uniformes, com relação aos parâmetros, do atrator e da região de atração de um sistema dinâmico periódico.

PALAVRAS-CHAVE: Princípio de Invariância, Uniforme, LaSalle, Sistema Dinâmico, Periódico

1 I INTRODUÇÃO

O Princípio de Invariância de LaSalle [3, 4] estuda o comportamento assintótico das soluções de um sistema sem a necessidade de conhecer explicitamente as soluções das equações diferenciais. Para isto, uma função escalar auxiliar, usualmente denominada função de Lyapunov, é utilizada. Mesmo sendo um resultado de extrema importância em diversas aplicações, apresenta alguns problemas, sendo o principal deles a não existência de um método específico para encontrar a função escalar auxiliar ou também chamada função de Lyapunov. Uma das condições mais restritivas na busca por esta função é que a derivada da mesma deve ser semi-definida negativa ao longo das trajetórias do sistema. Em vários sistemas, é difícil encontrar uma função escalar satisfazendo as condições do princípio de invariância e em particular satisfazendo a condição da derivada ser semi-definida negativa.

Uma versão mais geral do princípio

de invariância, denominada extensão do princípio de invariância de LaSalle, simplifica em parte este problema, permitindo que a derivada da função escalar assuma valores positivos em algumas regiões limitadas do espaço. Esta extensão foi provada para outras classes de sistemas [1,6,8,10,11]. Além da sua importância na teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares, a extensão do princípio de invariância foi aplicada com sucesso em problemas de ana´lise de estabilidade de sistemas elétricos de potência [2], e em problemas de sincronização [5, 8, 10].

Neste trabalho, investigamos a existência de um princípio de invariância uniforme para a classe de sistemas periódicos. Este resultado é útil para obter estimativas de atratores uniformes com respeito a seus parâmetros.

2 | EXTENSÃO DO PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA PARA SISTEMAS PERIÓDICOS

Nesta seção, uma revisão do princípio de invariância para sistemas periódicos [12] e sua extensão é apresentada. Considere o sistema dinâmico não autˆonomo não linear

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1. As soluções de (1) iniciando em x_0 no tempo t_0 serão denotadas por $s(t, t_0, x_0)$.

Antes de apresentarmos o teorema do princípio de invariância para sistemas periódicos, necessitamos definir alguns conjuntos de nível. Dado uma função escalar V : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, são eles: $S(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}$ tal que $V(t, x) \leq L\}$, $A(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) < L, \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $S(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}$ tal que $V(t, x) \leq l\}$, $A(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(t, x) < l, \forall t \in R\}$.

Sob certas condições sobre a derivada da função escalar V , podemos mostrar que os conjuntos de nível $S(L)$ e $A(L)$ possuem algumas propriedades de invariância, a qual omitiremos aqui [7]. Assim, apresentamos o princípio de pnvariância para sistemas periódicos.

Teorema 2.1. *[12][Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos] Suponha que o sistema (1) seja periódico e* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *seja uma funçaõ de classe* C^1 *tal que V seja periódica e com o mesmo período do sistema (1). Seja* $L \in \mathbb{R}$ *uma constante real, e considere os conjuntos* $S(L)$ *e* $A(L)$*. Suponha que* $S(L)$ *seja limitado e* $\dot{V}(t, x) \leq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in S(L)$*. Defina* $E := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $\dot{V}(t, x) = 0\}$*. Seja B o maior conjunto invariante contido em E. Entaõ: (i)* $x_0 \in A(L) \Rightarrow s(t, t_0, x_0) \to B$ *quando* $t \to +\infty$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$*; (ii)* $x_0 \in S(L) \Rightarrow \exists t_0$ *tal que* $s(t, t_0, x_0) \to B$ *quando* $t \to +\infty$*.*

A extensão do princípio de invariância de LaSalle para sistemas periódicos é apresentada, omitindo sua demonstração [7]. A característica fundamental desta extensão é a possibilidade da derivada da função escalar auxiliar V assumir valores positivos em algumas regiões limitadas do espaço de estados. Alguns lemas estudam a invariância de $S(L)$ e $A(L)$ quando $\dot{V} > 0$. Com esses resultados, entre outros [7], apresentaremos o teorema.

Teorema 2.2. *[7][Extensaõ do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos] Suponha que o sistema (1) seja periódico e* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *seja uma funçaõ de classe* C^1 *tal que V seja periódica e com o mesmo período do sistema (1). Seja* $L \in \mathbb{R}$ *uma constante real, e considere os conjuntos* $S(L)$ *e* $A(L)$*. Suponha que* $S(L)$ *seja limitado. Seja* $C \supseteq \{x \in S(L) : \exists t,\ \dot{V}(t, x) > 0\}$ *e admita que* $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} V(t, x) = l < L$*. Defina* $S(l)$*,* $A(l)$ *e* $E := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $\dot{V}(t, x) = 0\} \cup S(l)$*. Seja B o maior conjunto invariante contido em E. Entaõ: (i)* $x_0 \in A(L) \Rightarrow d(s(t, t_0, x_0), B) \to 0$ *quando* $t \to \infty$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$*; (ii)* $x_0 \in S(L) \Rightarrow \exists t_0$ *tal que* $d(s(t, t_0, x_0), B) \to 0$ *quando* $t \to \infty$*; (iii)* $x_0 \in A(l) \Rightarrow s(t, t_0, x_0)$ *tende para o maior conjunto invariante contido em* $S(l)$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$*; (iv)* $x_0 \in S(l) \Rightarrow \exists t_0$ *tal que* $s(t, t_0, x_0)$ *tende para o maior conjunto invariante contido em* $S(l)$*.*

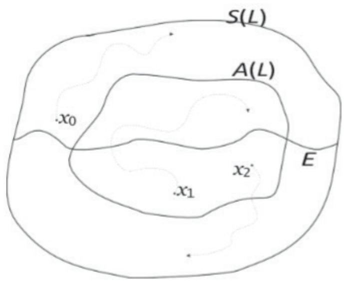

Figura 1: As soluções que iniciam em $A(L)$ não saem de $S(L)$, e para as soluções iniciando em $S(L)$, existe t_0 tal que a solução iniciando neste tempo não sai de $S(L)$.

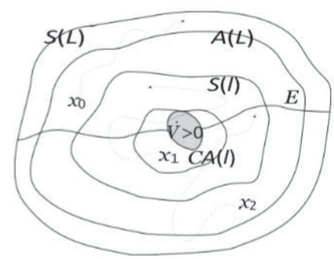

Figura 2: As soluções que iniciam em $A(l)$ não saem de $S(l)$. As soluções iniciando em $A(L)$ não saem de $S(L)$ e, uma vez entrando em $S(l)$, não saem de $S(l)$.

As Figuras 1 e 2 ilustram geometricamente os resultados dos Teoremas 2.1 e 2.2, respectivamente.

3 | PRINCÍPIO DE INVARIÂNCIA UNIFORME PARA SISTEMAS PERIÓDICOS

Nesta seção consideramos incertezas nos parâmetros do sistema e desenvolvemos um Princípio de Invariância Uniforme. O princípio de invariância uniforme para sistemas periódicos é útil para obter estimativas de atratores uniformes com respeito a seus parâmetros. Considere o sistema dinâmico não autônomo não linear

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \tag{2}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros do sistema. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1.

Teorema 3.1 (Princípio de Invariância Uniforme para Sistemas Periódicos). *Suponha que o sistema (2) seja periódico, que* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{R}$ *seja uma funçaõ de classe* C^1 *tal que V seja periódica e com o mesmo período do sistema (2) e* $a, b, c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sejam funções contínuas e periódicas, com o mesmo período do sistema (2). Admita que para qualquer* $(t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$*, tem-se* $a(t, x) \leq V(t, x, \lambda) \leq b(t, x)$*,* $-\dot{V}(t, x, \lambda) \geq c(t, x)$*. Para* $L >$

0*, seja* $S(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $a(t, x) \leq L\}$*. Admita que* $S(L)$ *seja não-vazio e limitado. Considere os conjuntos* $A(L) := \{x \in \mathbb{R}^n : b(t, x) < L, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $C \supseteq \{x \in A(L) : \exists t$ *tal que* $c(t, x) < 0\}$*. Suponha que* $\sup_{(t,x)\in[0,T]\times C} b(t, x) \leq l < L$ *e defina os conjuntos* $S(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $a(t, x) \leq l\}$ *e* $A(l) := \{x \in \mathbb{R}^n : b(t, x) < l, \forall t \in \mathbb{R}\}$*. Defina* $E := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $c(t, x) = 0\} \cup S(l)$ *e seja* B *o maior conjunto invariante contido em* E*. Se* λ *é um parâmetro fixo em* Λ *e todas as condições são satisfeitas, então para* $x_0 \in A(L)$ *a soluçaõ* $s(t, t_0, x_0, \lambda)$ *é definida em* $[t_0, \infty)$ *e as seguintes conclusões são obtidas: (i) Se* $x_0 \in A(l)$ *então* $s(t, t_0, x_0, \lambda) \in S(l)$ *para* $t > t_0$ *e* $d(s(t, t_0, x_0, \lambda), B) \to 0$ *quando* $t \to \infty$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$*; (ii) Se* $x_0 \in A(L) - A(l)$*, então* $s(t, t_0, x_0, \lambda)$ *não sai de* $S(L)$ *e* $d(s(t, t_0, x_0, \lambda), B) \to 0$ *quando* $t \to \infty$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Provaremos primeiramente a afirmação (i). Sejam $x_0 \in A(l)$ e $[t_0, \omega_p)$ o intervalo maximal de existência da solução $s(t, t_0, x_0, \lambda)$ de (2). Suponha que existe $\bar{t} \in [t_0, \omega_p)$ tal que $s(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda) \notin S(l)$. Então, temos que $V(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda)) \leq b(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda)) \leq l$ e $V(\bar{t}, s(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \geq a(\bar{t}, s(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda)) > l$, o que implica que existe $\tilde{t} < \bar{t}$ tal que $V(\tilde{t}, s(\tilde{t}, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = l$ e $b(t, s(t, t_0, x_0, \lambda)) \geq V(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) > l$ para $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$. Logo $s(t, t_0, x_0, \lambda) \notin A(l)$ para $t \in (\tilde{t}, \bar{t})$, o que nos leva a uma contradição, pois $-\dot{V}(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \geq c(t, s(t, t_0, x_0, \lambda)) \geq 0$, o que significa que $V(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$ é uma função decrescente de t neste intervalo. Como $s(t, t_0, x_0, \lambda) \in S(l) \subset S(L), \forall t \geq t_0$ e $S(L)$ é limitado para $t \geq t_0$, então $S(l)$ é limitado para $t \geq t_0$, o que implica que $\omega_p = \infty$ e portanto $s(t, t_0, x_0, \lambda) \in S(l), \forall t \in [t_0, \infty)$. Portanto, temos que o conjunto Ω-limite, $\Omega(t_0, x_0, \lambda) = \Omega_\lambda$, é não-vazio e a solução $s(t, t_0, x_0, \lambda) \to \Omega_\lambda$ quando $t \to \infty$. Como Ω_λ é um conjunto invariante [7] e $\Omega_\lambda \subset S(l)$, então a solução $s(t, t_0, x_0, \lambda)$ tende para o maior conjunto invariante de (2) contido em $S(l)$, quando $t \to \infty$, provando assim a afirmação (i).

Para provar a afirmação (ii), considere $x_0 \in A(L) - A(l)$ e seja $[t_0, \omega_p)$ o intervalo maximal de existência da solução $s(t, t_0, x_0, \lambda)$ de (2). Se existir t^* tal que $s(t^*, t_0, x_0, \lambda) \in A(l)$, então o problema se reduz ao item anterior. Suponha agora que $s(t, t_0, x_0, \lambda) \notin A(l)$ para $t \in [t_0, \omega_p)$ e portanto $s(t, t_0, x_0, \lambda) \notin C$ para $t \in [t_0, \omega_p)$. Se existe $\bar{t} \in [t_0, \omega_p)$ tal que $s(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda) \notin S(L)$ então $L \leq a(\bar{t}, s(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda)) \leq V(\bar{t}, s(\bar{t}, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$ e $V(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda)) < L$, contradição, uma vez que fora de $A(l)$ temos que $\dot{V}(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq 0$. Para o tempo $t \in [t_0, \omega_p)$, temos que $a(t, s(t, t_0, x_0, \lambda)) \leq V(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq V(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda)) = b(t_0, x_0) \leq L$ e portanto, $s(t, t_0, x_0, \lambda) \in S(L), \forall t \in [t_0, \omega_p), \forall \lambda$. Como $S(L)$ é limitado então $\omega_p = \infty$. Sendo Ω_λ o conjunto Ω-limite de $s(t, t_0, x_0, \lambda)$, temos que $\Omega_\lambda \subset \{x \in R^n : t \geq t_0, a(t, x) \leq b(t_0, x_0)\}$.

Como $s(t, t_0, x_0, \lambda) \notin C, \forall t \geq t_0$, então $-\dot{V}(t, x, \lambda) \geq c(t, x) > 0, \forall t \geq t_0$, implicando em $-\dot{V}(t, x, \lambda) > 0, \forall t \geq t_0$, isto é, $V^{\cdot}(t, x, \lambda) \leq 0$. Assim, V é uma função decrescente e então $V(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq V(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \leq b(t_0, s(t_0, t_0, x_0, \lambda)) = b(t_0, x_0) < L$. Por hipótese V é contínua e periódica em t e, por $S(L)$ ser limitado, então V é limitada, em particular, inferiormente limitada para $t \geq t_0$, então $\lim_{i\to\infty} V(t, s(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = \alpha \in R$. Seja $p \in \Omega_\lambda$. Então existe uma sequência $\{t_i\}$, $t_i \to \infty$ tal que $s(t_i, t_0, x_0, \lambda) \to p$. Para cada i, encontra-se $k_i \in Z$ tal que $t_i - k_i T \in [0, T)$. Então a sequência $\{\tau_i\} = \{t_i - k_i T\}$ é limitada, e portanto admite uma subsequência convergente. Escolha tal subsequência $\{\tau'_i\} = \{t'_i - k'_iT\}$ e enumere mais uma vez como $\{\tau_i\}_{\text{period.daV}}$. Seja $\tau \in [0, T)$ seu limite. $V(t'_i, s(t'_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = V(\tau'_i + k'_iT, s(t'_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = V(\tau'_i, s(t'_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$, onde $t'_i = \tau'_i + k'_iT$. Então podemos concluir que $\alpha = \lim_{i\to\infty} V(t'_i, s(t'_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda) = \lim_{i\to\infty} V(\tau'_i, s(t'_i, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$ cont. da $\underset{=}{\text{V}}$ $V(\tau, p, \lambda)$, implicando em $V(\tau, p, \lambda) = \alpha$.

Vamos mostrar que $V(u, s(u, \tau, p, \lambda), \lambda) = \alpha, \forall u \in \mathbb{R}$. Temos que $s(u + k_iT, t_0, x_0, \lambda)$ → period. da V $s(u, \tau, p, \lambda)$ quando $i \to \infty$ [7]. Logo, $\alpha = \lim_{i\to\infty} V(u + k_iT, s(u + k_iT, t_0, x_0, \lambda), \lambda) =$ $i\to\infty$ $\lim_{i\to\infty} V(u, s(u+k_iT, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$ period. da $\underset{=}{\text{V}}$ $\lim_{i\to\infty} V(u, s(u, \tau, p, \lambda), \lambda)$. Como Ω_λ é um conjunto invariante $i\to\infty$ então $s(u, \tau, p, \lambda) \in \Omega_\lambda, \forall u$. Portanto $V(u, s(u, \tau, p, \lambda), \lambda) = \alpha, \forall u \Rightarrow \dot V(\tau, p, \lambda) = 0$.

Como $C \cap \Omega_\lambda = \emptyset$ e $\Omega_\lambda \subset S(L)$ então $0 = -\dot V(t, x, \lambda) \geq c(t, x)$ para $x \in \Omega_\lambda$ e $t \geq t_0$. Logo $\Omega_\lambda \subset E$ e portanto $s(t, t_0, x_0, \lambda)$ tende para o maior conjunto invariante de (2) contido em E, quando $t \to \infty$. Portanto, provamos a segunda afirmação do teorema.

Com a existência das funções *a, b* e *c*, as quais não dependem dos parâmetros do sistema, é garantida a uniformidade com relação aos parâmetros. A Figura 3 representa o Teorema 3.1.

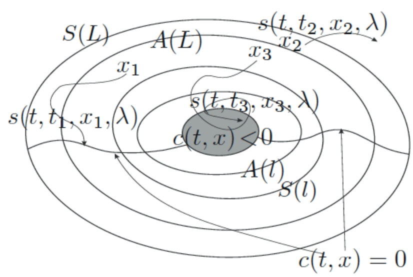

Figura 3: As soluções iniciando em $A(L)$ não saem de $S(L)$. Para as soluções inciando em $S(L) - A(L)$ nada se pode conluir (observe que a solução iniciando em x_2 deixa o conjunto $S(L)$ e não retorna). As soluções que entram em $A(l)$ não saem de $S(l)$.

Exemplo 3.1. *Considere o sistema dinâmico naõ linear e periódico descrito pela equaçaõ diferencial:* $\dot x = -x(x^2 + y^2 - 1) + y(\alpha + \sin(t))$*;* $\dot y = -x(\alpha + \sin(t)) - y(x^2 + y^2 - 1)$ (3), *onde* α é *um parâmetro do sistema. Seu valor nominal* é $\alpha = 2$ *e existe uma incerteza.*

De ±5% em sua determinação deste parâmetro. Portanto, o parâmetro pertence ao seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$: $\Lambda := \{\lambda := \alpha \in \mathbb{R} : \alpha_m \leq \alpha \leq \alpha_M\}$, onde $\alpha_m = 1, 9$ e $\alpha_M = 2, 1$.

Vamos empregar o princípio de invariância uniforme (Teorema 3.1) para obter uma estimativa do atrator uniforme com respeito a seus parâmetros.

Considere a função $V(\alpha, t, x, y) = \frac{x^2+y^2}{\alpha+\sin(t)}$ que é uma função periódica com o mesmo período do sistema (2). Podemos escolher as funções *a* e *b* como sendo $a(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\alpha_M + \sin(t)}$ e $b(t, x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\alpha_m + \sin(t)}$. Calculando a derivada de V ao longo das soluções 2 2 de (2), obtém-se a seguinte estimativa: $\dot V(\alpha, t, x, y) = -\frac{(x^2+y^2)}{(\alpha+\sin(t))^2}[2(x^2 + y^2 - 1)(\alpha + \sin(t))$

+ cos(t)]. Temos que: $-\dot{V} \geq \frac{2(x^2+y^2)^2}{\alpha_M+1} - \frac{(x^2+y^2)}{(\alpha_m-1)^2}$ [1 + 2(α_m − 1)] = $c(t, x, y) := (x^2 + y^2)\,[\gamma(x^2 + y^2) - \beta]$, onde $\gamma = \frac{2}{\alpha_M+1}$ e $\beta = \frac{1+2(\alpha_m-1)}{(\alpha_m-1)^2}$. Observe que $c(t, x, y) < 0$ se, e somente se $x^2+y^2 < \frac{\beta}{\gamma}$. Definindo o conjunto $C := \{x \in S(L) : \exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^2 + y^2 < \frac{\beta}{\gamma}\}$, γ temos que $\sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\mathrm{x}C} b(t, x) = \sup_{(t,\,x)\in[0,\,T]\mathrm{x}C} \frac{x^2+y^2}{\alpha_m+\sin(t)} = \sup_{x\in C} \frac{x^2+y^2}{\alpha_m-1} = \frac{\beta}{\gamma(\alpha_m-1)} = 5,9534 < l := 5,96$. Logo, $S(l) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n;\ x^2 + y^2 < 18,476\}$ e $A(l) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n;\ x^2 + y^2 < 5,96\}$. Portanto, as hipóteses do Teorema 3.1 saõ satisfeitas e então temos que as soluções tendem para o maior conjunto invariante contido em $S(l)$.

A estimativa anterior assim como uma representação numérica do atrator estão mostradas na Figura 4 para dois vetores de parâmetros diferentes. A circunferência externa é representada conjunto $S(l)$ e a circunferência interna conjunto $A(l)$.

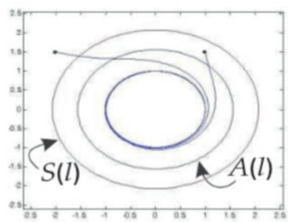

Figura 4: Estimativa uniforme do atrator global do sistema (3) para $\alpha_m = 1,9$ e $\alpha_M = 2,1$. As trajetórias iniciando nos pontos (1 , 1,5) e (-2 , 1,5), para α = 2, tendem para o mesmo atrator periódico dentro de $S(l)$.

4 I CONCLUSÕES

Neste trabalho, um princípio de invariância uniforme para a classe de sistemas periódicos foi demonstrado. A principal característica deste resultado é a possibilidade de con- siderarmos incertezas na determinação dos parâmetros do sistema. Este resultado foi útil para obtermos estimativas de atratores uniformes, com respeito a seus parâmetros, de sistemas periódicos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a todos amigos do laboratório LACO/EESC/USP que ajudaram na parte computacional e ao CNPq.

REFERÊNCIAS

[1] L.F.C. Alberto, T.R. Calliero, A.C.P. Martins and N.G. Bretas, An Invariance Principle for Nonlinear Discrete Autonomous Dynamical Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, 692–697, (2007).

[2] N.G. Bretas and L.F.C. Alberto, Lyapunov Function for Power System with Transfer Conductances: Extension of the Invariance Principle, IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, 769–777 (2003).

[3] J.P. LaSalle, Some extensions of liapunov's second method, IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-7, 520–527, (1960).

[4] J.P. LaSalle, The extent of asymptotic stability, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 46, 363–365, (1960).

[5] A.P. Mijolaro, L.F.C. Alberto and N.G. Bretas, Synchronization of a Class of Second- Order Nonlinear Systems, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 18, 3461–3471, (2010).

[6] M. Rabelo and L.F.C. Alberto, An Extension of the Invariance Principle for a Class of Differential Equations with Finite Delay, Advances in Difference Equations, vol. 2010, 1–14, (2010).

[7] W.C. Raffa, L.F.C. Alberto e F.M. Amaral, Uma Extensão do Princípio de Invariância para Sistemas Periódicos, XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA, vol. 1, 272– 279, (2014).

[8] H.M. Rodrigues, L.F.C. Alberto and N.G. Bretas, On the Invariance Principle. Ge- neralizations and Applications to Synchronism, IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Fundamental Theory and Applications, vol. 47, 730–739, (2000).

[9] H.M. Rodrigues, L.F.C. Alberto and N.G. Bretas, On the Invariance Principle. Uni- form Invariance Principle and Synchronization. Robustness with respect to parameter vatiation, Journal of Differential Equations, vol. 169, 228–254, (2001).

[10] H.M. Rodrigues, J. Wu and L.R.A. Gabriel Filho, On the Invariance Principle. Uni- form Dissipativeness and Robust Synchronization of Parametrized Discrete Systems: Location of the Attractor, International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 21, 1–14, (2011).

[11] M.C. Valentino, V.A. Oliveira, L.F.C. Alberto and D.S. Azevedo, An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems, Systems & Control Letters, vol. 61, 580–586, (2012).

[12] M. Vidyasagar, Nonlinear Sistems Analysis, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey - Second Edition, (1993).