

CAPÍTULO 11

REVISÃO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÕES APROXIMADAS DE EQUAÇÕES DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Data de submissão: 05/12/2024

Data de aceite: 02/12/2024

Clézio Abilio dos Santos

Centro Universitário das Faculdades Integradas de Ourinhos-UNIFIO
Ourinhos-São Paulo

<https://lattes.cnpq.br/9185139318984924>

Kamira Miksza Fragoso

Centro Universitário das Faculdades Integradas de Ourinhos-UNIFIO
Ourinhos-São Paulo

<http://lattes.cnpq.br/8973135701360405>

são o método de Euler, método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos, que são métodos muito utilizados para a solução de problemas envolvendo a mecânica dos fluidos.

PALAVRAS-CHAVE: Método de Euler; Diferenças Finitas; Elementos Finitos; Volumes Finitos; Fluidos.

REVIEW ABOUT NUMERICAL METHODS FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF FLUID MECHANICS EQUATIONS

RESUMO: Na vida real, a solução de problemas que envolvem diversos fenômenos é de difícil solução analítica, isso inclui os fenômenos que envolvem fluidos. Dentre eles, pode-se citar uma usina hidrelétrica, ou até mesmo em nossas casas com o saneamento básico, mas infelizmente diversos fenômenos que incluem líquidos ou gases não possuem solução analítica, sendo necessário buscar por soluções numéricas, que darão um resultado aproximado. O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns métodos numéricos que podem ser utilizados para encontrar soluções aproximadas para equações que envolvem fluidos. Os métodos que serão apresentados

ABSTRACT: In real life, solving problems involving various phenomena is difficult to solve analytically, this includes phenomena involving fluids. Among them, we can mention a hydroelectric plant, or even in our homes with basic sanitation, but unfortunately several phenomena that include liquids or gases do not have an analytical solution, making it necessary to search for numerical solutions, which will give an approximate result. The present work aims to present some numerical methods that can be used to find approximate solutions for equations involving fluids. The methods that will be presented are the Euler method, the finite difference method and the finite element

method, which are widely used methods for solving problems involving fluid mechanics.

KEYWORDS: Euler method; Finite Differences; Finite Elements; Finite Volumes; Fluids.

INTRODUÇÃO

Em muitos problemas envolvendo fluidos é interessante realizar uma análise diferencial, que consiste em estudar todos os pontos de uma região de escoamento. Em uma seção de volumes infinitesimais, onde no limite, tendendo a quantidade de volumes infinitos, o tamanho do volume tende a um ponto (Çengel, 2015).

Para realizar uma análise diferencial, a fim de encontrar soluções para uma equação, é importante especificar as condições de contorno, em toda a fronteira do domínio de escoamento. (Çengel, 2015).

Infelizmente muitas equações, como por exemplo as equações de Navier-Stokes ou ainda a equação de Colebrook, não possuem solução analítica, sendo necessário a utilização de métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas, a não ser em algumas situações que possuem campo de escoamento simples (Çengel, 2015). Assim, para resolução de equações complexas, utiliza-se a discretização do domínio, dando início a uma análise numérica. A discretização permite o uso computacional para tratamento das equações diferenciais. (Franco, 2012).

Em aplicações reais, diferente de idealizações, existem várias variáveis que influenciam no resultado de uma equação. Não é difícil perceber que estamos em um mundo que possui três dimensões, além de uma dimensão temporal, isso significa que, para formular alguma equação, ela possuirá quatro incógnitas, pelo menos, e as suas derivadas serão parciais, dando origem a equações diferenciais parciais.

As equações diferenciais parciais (EDP) são de maior complexidade do que equações diferenciais ordinárias (EDO), pois possuem mais variáveis e raramente possuem solução analítica (Franco, 2012). Isso não significa que todas as equações diferenciais ordinárias possuem solução analítica.

Métodos numéricos são usados para conseguir encontrar soluções aproximadas, e o presente trabalho tem por objetivo realizar uma revisão da literatura disponível sobre alguns destes métodos.

O primeiro é o método de Euler, que é o mais fácil, porém, a solução não possui muita qualidade, entretanto possui a sua importância teórica (Franco, 2012), e pode ser utilizado para resolução de EDO's.

O segundo método é o das diferenças finitas, que consiste em dividir o domínio em pontos discretizados, e substituir as derivadas por aproximações (Franco, 2012).

Por último, tem-se o método dos elementos finitos, que consiste em dividir o domínio em elementos. Ao se entender o comportamento de cada elemento de um conjunto, fica mais fácil entender o comportamento do domínio (Filho, 2009).

O presente trabalho possui a justificativa de ser necessário encontrar soluções para equações diferenciais onde não existe solução analítica, e isso inclui equações de mecânica dos fluidos. Assim sendo, é importante mostrar métodos numéricos para encontrar estas soluções, além de mostrá-las em algumas aplicações direcionadas à mecânica dos fluidos.

Soluções de equações diferenciais são muito úteis para várias aplicações, sendo então de interesse nas mais diversas áreas que elas se encontram.

Assim, o presente trabalho tem o objetivo de realizar uma revisão da literatura disponível sobre diferentes métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais, e aplicá-las em mecânica dos fluidos. O levantamento bibliográfico será realizado utilizando ferramentas gratuitas de busca, como o google scholar.

METODOLOGIA

Serão demonstrados alguns métodos numéricos utilizados para resolver equações de mecânica dos fluidos, além de mostrar os resultados em tabelas e simulação em CFD (dinâmica dos fluidos computacional).

Na análise dos fluidos, se encontra grande quantidade de situações que possuem uma análise diferencial pois quando se trata, por exemplo, de escoamento, o fluido se desloca e seu comportamento varia pelas três dimensões espaciais e/ou pelo tempo, podendo assim originar equações diferenciais se tratando de um volume infinitesimal onde as variações são infinitesimais. Outro exemplo é no regime transitório, onde as características do fluido variam com o tempo podendo assim originar equações diferenciais.

Primeiro será apresentado o método de Euler em alguma equação de mecânica dos fluidos, a seguir o método dos elementos finitos, das diferenças finitas e por fim o método dos volumes finitos.

Para utilizar o método de Euler é necessário saber o valor inicial da variável independente e da variável dependente. Já para conseguir utilizar o método das diferenças finitas e dos elementos finitos, é necessário determinar os valores de contorno, que dependerá de como será feito o experimento (se será com velocidade inicial zero e o valor da velocidade final fixo, por exemplo).

No método dos elementos finitos são encontradas equações que descrevem os graus de liberdade do fluido a ser analisado.

Serão apresentados os métodos em equações de mecânica dos fluidos pois nela existem várias análises diferenciais, e isso inclui análises em regime transitório, onde as características do fluido variam com o tempo.

No presente trabalho serão demonstradas algumas aplicações dos métodos estudados em soluções aplicadas à problemas da mecânica dos fluidos, vindo de trabalhos científicos publicados que serão revisados para esse presente artigo, sendo esse um estudo teórico de revisão bibliográfica.

REVISÃO DA LITERATURA

Expressões matemáticas que possuem o símbolo de igual denominam-se equações. Equações diferenciais são equações que possuem derivadas em suas funções (Çengel, 2014).

Vários problemas encontrados nas engenharias possuem formulação que envolvem derivadas, originando assim equações diferenciais (Çengel, 2014). Infelizmente, muitas dessas equações diferenciais não possuem solução fácil, sendo necessário a utilização de métodos numéricos.

Um método fácil é o método de Euler, que terá sua demonstração apresentada a seguir:

Considere que as equações 1 e 2 são contínuas e diferenciáveis (Franco, 2012):

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Considere $y(x)$ a solução exata. Utilizando série de Taylor para $y(x_n+h)$ em torno de x_n , obtemos a equação 3:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots + \frac{h^q}{q!}y^{(q)}(x_n) + \frac{h^{q+1}}{(q+1)!}(\xi_n), \\ , x_n < \xi_n < x_n + h. \quad (3)$$

O último termo é o erro de truncamento local.

Truncando a expressão (3), depois de $(q+1)$ termos, e, considerando que $y'=f(x, y)$, obtemos a equação 4:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \dots + \frac{h^q}{q!}f^{(q-1)}(x_n, y(x_n)). \quad (4)$$

Substituindo $y(x_n)$ por y_n e $f(x_n, y(x_n))$ por f_n , obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!}f'_n + \dots + \frac{h^q}{q!}f_n^{(q+1)}, \quad (5)$$

Esse é o método de Taylor de ordem q.

Fazendo-se $q=1$ em (5), conseguimos a equação 6:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \quad (6)$$

Obtemos por último o método de Euler.

Considerando $q=1$ em (3), teremos a fórmula progressiva do método das diferenças finitas, que usa a diferença progressiva e seu erro (Franco, 2012), mostrada na equação 7:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h) \quad (7)$$

De modo parecido, fazendo $-h$ em (3), mas continuando com $q = 1$, consegue a fórmula regressiva, que usa a diferença regressiva e seu erro (Franco,2012), conforme mostrado em 8:

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x) \quad (8)$$

Agora considerando $q = 2$ em (3), e h e $-h$, respectivamente, obtemos a seguinte equação:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y''' \quad (9)$$

$$y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) - \frac{h^2}{2!}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''$$

Calculando $y(x+h) - y(x-h)$, obtém-se a fórmula centrada que utilizada a diferença central e seu erro (Franco,2012), mostrada na equação 10:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3!}y'''(\xi) \quad (10)$$

Essas fórmulas obtidas do método das diferenças finitas podem ser aproximadas para derivadas parciais de funções de várias variáveis. Assim, segundo Franco (2012), e considerando u_t como derivada parcial de u em relação a t , temos as seguintes equações (11-13):

Progressiva:

$$u_t = \frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} - \frac{k}{2}u_{tt}(x, \zeta), \quad (t < \zeta < t+k) \quad (11)$$

Regressiva:

$$u_t(x, y) = \frac{u(x,t) - u(x,t-k)}{k} + \frac{k}{2}u_{tt}(x, \zeta), \quad (t - k < \zeta < t) \quad (12)$$

Central de segunda ordem:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u_{xxx}(\xi, t), \quad (x-h < \xi < x+h) \quad (13)$$

O método das diferenças finitas pode ser utilizado em situações 2d e 3d sendo ele recomendado para geometrias exatas sem muitas irregularidades, mas nada o impede de ser utilizado em geometrias exóticas.

Considere a equação 14:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

Pode-se utilizar diferença progressiva, regressiva ou central para aproximar a equação 14.

Considere a figura 1, nela percebe-se que deve-se reduzir muito o domínio nas bordas para a utilização do método de diferenças finitas, o que aumenta muito o custo computacional. Porém, utilizando um retângulo reto, tem-se uma aproximação melhor do resultado real, precisão essa que diminui com as irregularidades da malha que está tratando o método.

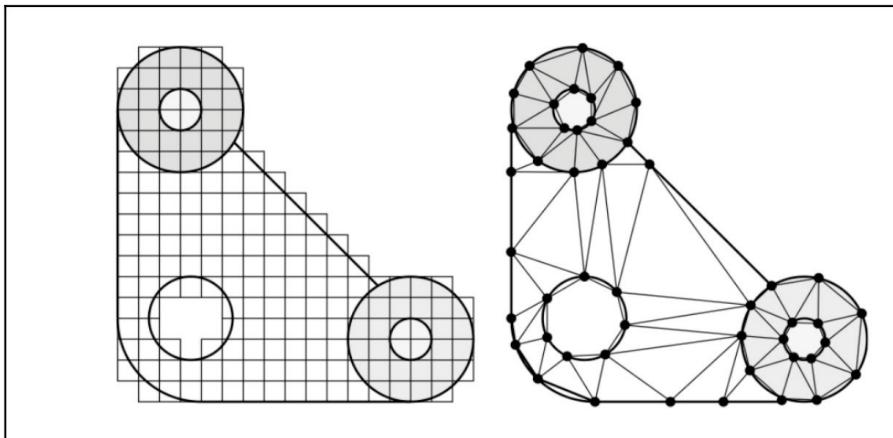


Figura 1 - Aproximações. (a) aproximação em diferenças finitas, e (b) em elementos finitos

Fonte: Métodos Numéricos para Engenharia

Com geometrias irregulares, a substituição do método das diferenças finitas pelo método dos elementos finitos, apresenta melhores valores de aproximação para tais geometrias. Na prática, isso significa que os resultados obtidos apresentam menos erros, o que se aproxima da realidade.

Ainda com base na figura 1, pode-se observar que em (b) existe uma melhor aproximação do que em (a). Os polinômios usados são em formato triangular.

Pode parecer estranho a utilização dos elementos finitos em mecânica dos fluidos, todavia existe formulação para isso, como por exemplo o método Petrov-Galerkin SUPG, uma formulação especial para a mecânica dos fluidos.

O método mais utilizado em fluidodinâmica é o método dos volumes finitos, pois ele possui uma característica que os outros métodos não possuem: Respeita a propriedade conservada das equações, pois ele faz um balanço, desta maneira considera todas as características de entrada e de saída no volume de controle considerado, não tendo criação ou destruição de nenhuma propriedade. Cabe ressaltar que por conta disso, o uso do método deve ser realizado para as equações em suas formas conservativas, caso contrário absurdos podem aparecer, como criação ou destruição de matéria, por exemplo.

O método dos elementos finitos consiste em subdividir o domínio em regiões simples. A solução do conjunto é obtida juntando as soluções individuais de cada parte (Chapra, 2016).

A relação existente entre as ações e os graus de liberdade são melhor expressos por meio de matriz. Assim (Filho,2009):

$$\{f\} = |k| \cdot \{u\} \quad (15)$$

Podemos, por exemplo, dividir em uma malha com triângulos o domínio de uma chapa bidimensional, como mostrado na figura 2:

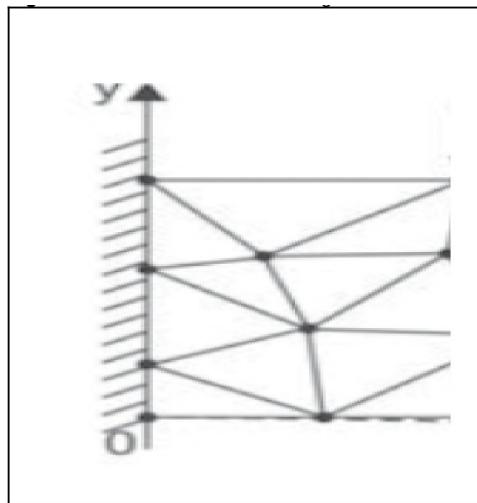


Figura 2- domínio em forma de triângulo

Fonte: Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE

Na imagem acima, cada ponto é um nó, que possui graus de liberdade.

Os graus de liberdade que compõem a matriz u , em uma situação bidimensional por exemplo, serão funções polinomiais, onde a potência dependerá da quantidade de graus de liberdade.

Os elementos finitos, apresentam solução manual trabalhosa, felizmente podem ser resolvidos com auxílio de programas computacionais.

Independente do problema que estiver sendo analisado, sempre será utilizado uma matriz (não necessariamente igual a (15)) que será resolvida iterativamente em um problema computacional.

Outra metodologia usada é o método dos resíduos ponderados. Uma metodologia simples, que consiste, de acordo com BRASIL, et al (2015), em uma formulação fraca, que é quando uma igualdade de equação diferencial que era para ser zero em todos os pontos do domínio não precisa ser em todos os pontos, mas sim em uma média ponderada, como na equação abaixo:

$$\int_0^L (R(x)W(x)) dx = 0 \quad (16),$$

onde $R(x)$ é o resíduo e $W(x)$ uma função de ponderação.

O método de Galerkin é basicamente quando a função peso $W(x)$ possui a mesma forma da função da equação que se quer achar a solução. A seguir será apresentado um exemplo do método. (Brasil et al, 2015).

Considere o seguinte problema:

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{q}{EA} = 0, \text{ tal que } u(0) = 0 \text{ e } u'(L) = \frac{P}{EA} \quad (17)$$

Se for utilizado uma aproximação para a função u , então essa igualdade deixará de ser zero, mas apresentará um resíduo:

$$\frac{du^2}{dx^2} + \frac{q}{EA} = R(x) \quad (18)$$

Assim:

$$\int_0^L (R(x)W(x)) dx = 0 \quad (19)$$

Uma aproximação para é:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \quad (20)$$

ou, de forma finita:

$$u(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad (21)$$

A função que aproxima normalmente é polinomial.

Como dito anteriormente, a função peso tem a forma da função que procuramos, assim podemos definir como sendo:

$$w(x) = \beta_j \phi_j(x) \quad (22)$$

Substituindo:

$$\beta_j \int_0^L \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{q}{EA} \right) \phi_j(x) dx = 0 \quad (23)$$

Que é satisfeito com:

$$\int_0^L \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{q}{EA} \right) \phi_j(x) dx = 0 \quad (24)$$

Rearranjando e integrante por partes, integrando e arrumando, obtém-se:

$$EA \frac{d(u(x))}{dx} \phi_j(L) - \int_0^L EA \frac{d(u(x))}{dx} \frac{d(\phi_j)}{dx} dx + \int_0^L q \phi_j dx = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^L EA \frac{d(u(x))}{dx} \frac{d(\phi_j)}{dx} dx = \int_0^L q\phi_j dx + P\phi_j(L) \quad (26)$$

Considerando a função de aproximação para u:

$$\alpha_i \int_0^L EA \frac{d(\phi_i)}{dx} \frac{d(\phi_j)}{dx} dx = \int_0^L q\phi_j dx + P\phi_j(L) \quad (27)$$

Agora define-se:

$$K_{ij} = \int_0^L EA \frac{d(\phi_i)}{dx} \frac{d(\phi_j)}{dx} dx \quad (28)$$

$$F_j = \int_0^L q\phi_j dx + P\phi_j(L) \quad (29)$$

Assim, chega-se na equação:

$$F = K\alpha \quad (30)$$

Onde a equação pode ser resolvida e colocada de forma matricial.

Agora, considere a seguinte equação (Ribeiro,2019):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\varphi) + \nabla \cdot (-k\nabla\varphi) = Q(x, y) \quad (31)$$

onde φ é a concentração da substância, $u\varphi$ é o fluxo convectivo e $k\nabla\varphi$ o fluxo difusivo (Ribeiro,2019).

Para esta situação, a formulação de Galerkin é mostrada abaixo (Ribeiro,2023):

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (N_i N_j \frac{d\varphi}{dt} + N_i N_j \nabla \cdot u\varphi_j + N_i (u \cdot \nabla N_j) \varphi_j + (\nabla N_i \cdot k \nabla N_j) \varphi_j) d\Omega = \int_{\Omega} N_i Q d\Omega + \int_{\Gamma} N_i F d\Gamma \quad (32)$$

onde $F = k\nabla\varphi \cdot n$

Ou, de forma matricial:

$$M \frac{d\varphi}{dt} + K\varphi = F \quad (33)$$

A seguir é mostrada a formulação SUPG:

$$\int_{\Omega} R(\varphi) w d\Omega + A_{e=1}^{numel} \int_{\Omega_e} R(\varphi) \tau u \cdot \nabla w d\Omega \quad (34)$$

onde:

$$\tau = \frac{\xi h}{2|u|} \quad (35)$$

$$\xi = \cotanh(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \quad (36)$$

$$\alpha = \frac{|u|h}{2||k||} \quad (37)$$

O método dos volumes finitos consiste basicamente em dividir o problema em quantidades pequenas e finitas de volume e realizar um balanço ou integração no volume (Maliska, 2004).

Nesse método também se utiliza normalmente diferenças centrais em algumas derivadas presentes (Maliska, 2004).

Como exemplo, considere a figura 3, onde realizaremos um balanço de propriedades (Maliska 2004):

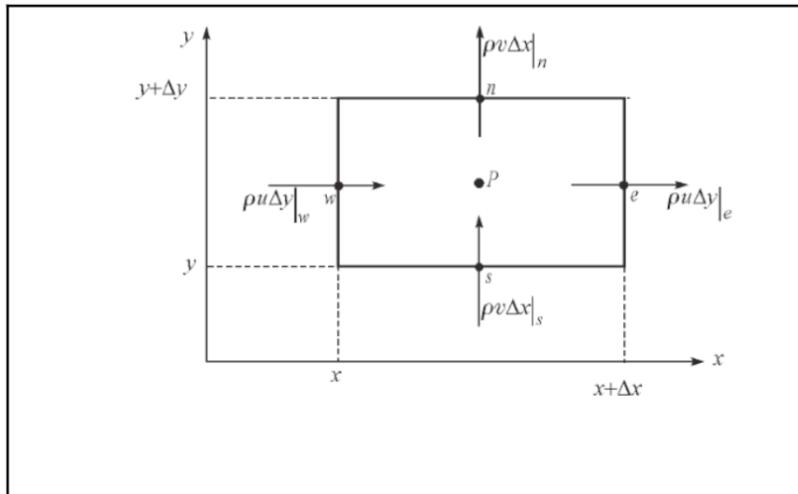


Figura 3 - Volume Elementar

Fonte: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluídos Computacional

$$\frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho u)_n - (\rho u)_s}{\Delta y} = 0 \quad (38)$$

Após aplicar limite, obtemos:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (39)$$

E agora integrando o volume e considerando que o fluxo de massa é a média da variação, obtemos:

$$\rho u \Delta Y_e - \rho u \Delta Y_w + \rho u \Delta X_n - \rho u \Delta X_s = 0 \quad (40)$$

ou

$$\frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_w}{dt} + \frac{dm_n}{dt} - \frac{dm_s}{dt} = 0 \quad (41)$$

Funções de Aproximação

Em relação às funções que aproximam os elementos, será mostrado dois tipos: um elemento triangular e outro retangular.

Em relação ao elemento triangular, ele pode possuir a característica de ser linear, como na equação 42 a seguir:

$$f(x, y) = a + bx + cy \quad (42)$$

Essa função deverá possuir o valor de 1 no nó de análise, e zero nos demais nós.

A mesma função pode ser generalizada para três dimensões, conforme pode-se observar na equação 43:

$$f(x, y, z) = a + bx + cy + dz \quad (43)$$

Onde a, b, c e d são constantes a determinar.

Usando-se dos polinômios de Lagrange pode-se obter os elementos para o caso quadrilátero:

$$N_i = l_i = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_{p+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_{p+1})}. \quad (44)$$

Para cada dimensão, conseguimos as funções de interpolação multiplicando os polinômios de Lagrange em cada direção. Como exemplo, para um quadrilátero de 4 nós, temos:

$$N_1 = 1/4(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (45)$$

$$N_2 = 1/4(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (46)$$

$$N_3 = 1/4(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (47)$$

$$N_4 = 1/4(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (48)$$

A seguir a imagem da parametrização utilizando o Software Octave:

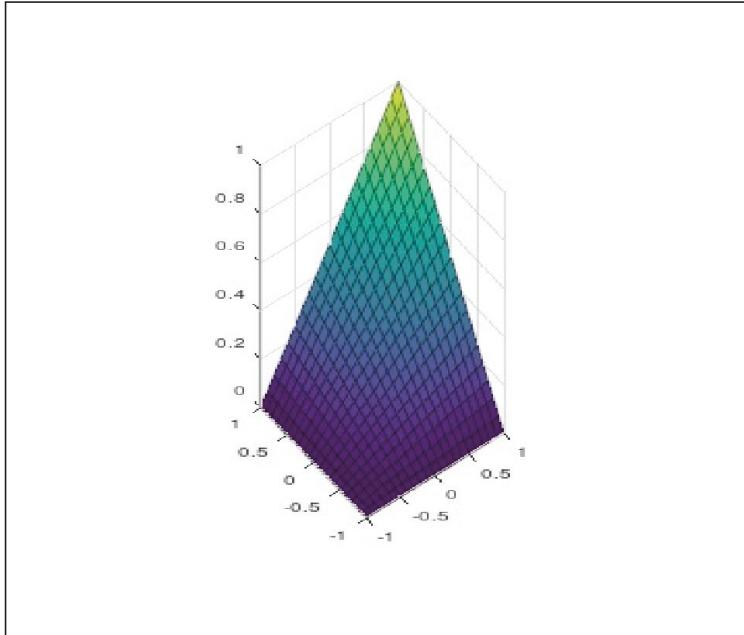


Figura 4 - Elemento N_1

Fonte: Própria

A matriz no método FEA possui N equações e incógnitas, ficando obviamente com um custo elevado computacional, quanto maior for o N .

Também fica maior a função de interpolação, pois como foi definido na forma genérica, o somatório varia de 1 até N .

Outro problema é a forma dos domínios que podem ser bastante trabalhosos para analisar.

Uma solução para esse problema é a parametrização das funções em elementos isoparamétricos, transformando o problema em uma geometria de fácil análise (Ribeiro,2019).

Em relação ao problema da quantidade de funções, elas apenas não serão zero na matriz K onde o domínio for definido no problema analisado, assim sendo, essa matriz possui uma quantidade grande de zeros nela. Pode-se, com a ajuda da facilidade de se trabalhar com elementos isoparamétricos, isolar cada elemento na mudança de variável, para trabalhar localmente com uma matriz local, e depois juntar os resultados na matriz global.

Para transformar as variáveis x e y em um sistema local N e, basta multiplicarmos o dA por $JdNdx$ (sendo J o jacobiano) e mudar os limites de integração.

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE MATRIZES

Sempre que resolvermos as equações por métodos numéricos, colocaremos elas em formas matriciais para resolução computacional, assim ficando fácil e organizado, além de ser possível a utilização de teoremas que são deduzidos da forma matricial tradicional.

Podemos reduzir uma matriz em uma forma escalonada (onde toda a parte inferior à diagonal principal é igual a zero), para assim ficar de fácil resolução por substituição direta. A seguir, os passos a serem seguidos. (Anton,2012):

Primeiro devemos localizar a coluna mais à esquerda que não seja inteira de zero. A seguir, se a_{ij} for um número a, devemos multiplicar a linha 1 por 1/a. Depois, permutar a linha não nula mais à direita com a primeira posição. Em seguida somar de forma conveniente a primeira linha com as linhas inferiores. Depois, deixamos fixo a primeira linha e repetimos o procedimento, agora com a segunda linha, até termos a situação desejada:

The diagram illustrates the row reduction process of a 3x6 matrix. It shows four stages of the matrix with annotations explaining each step:

- Initial Matrix:**
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Coluna não nula mais à esquerda
- Stage 1:**
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Foram permutadas a primeira e a segunda linhas da matriz precedente.
- Stage 2:**
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha da matriz precedente foi multiplicada por $\frac{1}{2}$.
- Final Matrix:**
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5 vezes a segunda linha foi somada à primeira linha.

Figura 5 - Método do Escalonamento

Fonte: Álgebra Linear com Aplicações

Agora, será abordado o Método Iterativo de Jacobi, método usado em sistema na forma de $Ax=b$.

Este método consiste em isolar o x_i do lado esquerdo da equação, e deixando x_j do lado direito. Em seguida, definasse o x_j como sendo a iteração k-1, e o x_i como sendo a iteração k, iterando-se até convergir. Em forma de equação, temos (Burder, 2016):

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i \right], \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Onde: a_{ij} é o elemento na posição ij da matriz A, e b_i o elemento na posição i da matriz B.

DESENVOLVIMENTO

O método de Euler utiliza-se em situações em que se quer saber o valor de uma EDO, sendo possível isolar a derivada de interesse de um lado da igualdade.

Considerando que se está trabalhando em um lugar que tem admissão por válvulas de algum gás, que leva um tempo para alcançar o regime permanente. Também considerando que a densidade varia apenas com o tempo, e a velocidade em relação ao eixo em que está o seu sentido.

Logo temos a equação a seguir:

$$\frac{dp}{dt} + p \frac{du}{dx} + p \frac{dv}{dy} = 0 \quad (49)$$

Se isolar o termo $\frac{dp}{dt}$ de um lado, e souber o valor de $p(0)$ (valor inicial), bem como a equação que rege $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dv}{dy}$, é possível descobrir o seu valor pelo método de Euler.

Este foi um exemplo da utilização do método em mecânica dos fluidos, pois o foco de utilização dos métodos aqui presentes é em equações de mecânica dos fluidos.

Agora considere a equação:

$-k \frac{d^2 u}{dx^2} + w \frac{du}{dx} = f(x)$, sendo k o termo difusivo constante e w o escalar de velocidade.

Utilizando a formulação feita por Corrêa (2024), tem-se:

$$f = -k \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{\Delta x^2} + w \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2\Delta x} \quad (50)$$

onde, generalizando para 2 dimensões, tem-se:

$$f = -k \left[\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{\Delta x^2} + \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{\Delta y^2} \right] + w \left[\frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2\Delta x} + \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{2\Delta y} \right] \quad (51)$$

Ainda de acordo com Corrêa (2024), deve-se alterar o esquema central de segunda ordem do gradiente de u, pelo esquema avançado ou atrasado. Ficando, assim:

$$f = -k \left[\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{\Delta x^2} + \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{\Delta y^2} \right] + w \left[\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{2\Delta x} + \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{2\Delta x} \right], \text{ ou}$$

$$f = -k \left[\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{\Delta x^2} + \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{\Delta y^2} \right] + w \left[\frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{2\Delta x} + \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{2\Delta x} \right] \quad (52)$$

O método dos volumes finitos é mostrado agora:

Ainda de acordo com Corrêa (2024), considere a seguinte equação:

$$-k \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) + \rho \omega \frac{du}{dx} = f \quad (53)$$

A qual se transforma em:

$$-k \int_{\Omega} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) d\Omega + \rho \omega \int_S \frac{du}{dx} ds = \int_{\Omega} f d\Omega \quad (54)$$

Se integrar a equação acima em um volume de controle obtemos:

$$[-k \frac{du}{dx_e}] - [-k \frac{du}{dx_w}] + (\rho \omega u_e - \rho \omega u_w) = f, \quad (55)$$

A qual se torna, após aproximação:

$$[(\frac{-k(uE - uP)}{\Delta x_e}) - (\frac{-k(uP - uW)}{\Delta x_w})] + \frac{1}{2} \rho \omega_e (u_E + u_P) - \frac{1}{2} \rho \omega_w (u_P + u_W) = f \quad (56)$$

Generalizando para duas dimensões:

$$-k \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \omega u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \omega u) = f$$

$$-k \int_{\Omega} \int_S \Delta u d\Omega + \rho \omega \oint_S \Delta u ds = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f d\Omega \quad (57)$$

Considerando o domínio de integração como sendo um volume bidimensional, obtemos:

$$-k \int_{S_w} \int_{S_e} [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}] dx dy + \omega \oint_S u ds = \int_{S_w} \int_{S_e} f dx dy \quad (58)$$

Que, após desenvolvimento e aproximações, obtemos:

$$\begin{aligned}
& [(\frac{k}{\Delta x} + \frac{1}{2}\rho\omega) + (\frac{k}{\Delta x} - \frac{1}{2}\rho\omega) + (\frac{k}{\Delta y} + \frac{1}{2}\rho\omega) + (\frac{k}{\Delta y} - \frac{1}{2}\rho\omega)]u_{i,j} + \\
& (\frac{-k}{\Delta x} + \frac{1}{2}\rho\omega)u_{i+1,j} + (\frac{-k}{\Delta x} - \frac{1}{2}\rho\omega)u_{i-1,j} + (\frac{-k}{\Delta y} + \frac{1}{2}\rho\omega)u_{i,j+1} + (\frac{-k}{\Delta y} - \frac{1}{2}\rho\omega)u_i \\
= f & \tag{59}
\end{aligned}$$

Considere agora as seguintes condições de contorno:

$$u(x, 0) = 0, \forall x \in]0, 0.2[$$

$$u(x, 0) = 10(x - 0.2), \forall x \in]0.2, 0.3[$$

$$u(x, 0) = 1, \forall x \in]0.3, 1[$$

$$u(x, 1) = 0, \forall x \in]0, 1[$$

$$u(0, y) = 0, \forall y \in]0, 1[$$

$$u(1, y) = 1, \forall y \in]0, 1[$$

velocidade constante $\omega(1,1)$

Sendo a representação desse gráfico dada pela figura 4:

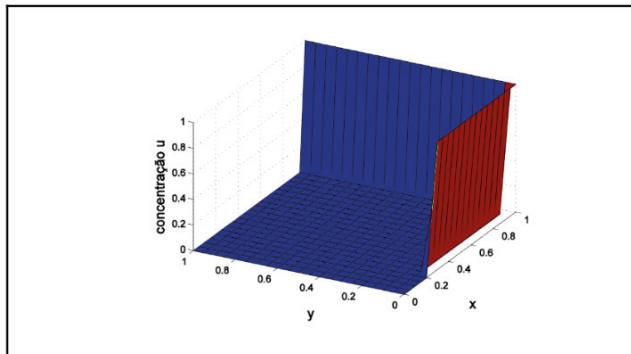


Figura 4 - representação de um contorno

Fonte: Métodos de Diferenças Finitas e Volumes Finitos para Problemas Convectivos Difusivos

Abaixo é mostrada a tabela 1 feita por Corrêa (2024), que traz os resultados usando uma malha de 11 nós utilizando o método das diferenças finitas centrado. A tabela 2 traz o resultado com o método dos volumes finitos.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,1140	0,1693	0,2968	0,2961	0,4820	0,3644	0,7134	0,3182	1,0936	0	
0	0,1330	0,1805	0,3560	0,3317	0,6090	0,4192	0,9403	0,3669	1,4651	0	
0	0,1399	0,1790	0,3706	0,3306	0,6405	0,4197	1,0002	0,3680	1,5655	0	
0	0,1426	0,1782	0,3750	0,3289	0,6485	0,4175	1,0144	0,3661	1,5888	0	
0	0,1433	0,1780	0,3761	0,3285	0,6500	0,4169	1,0169	0,3656	1,5928	0	
0	0,1426	0,1782	0,3750	0,3289	0,6485	0,4175	1,0144	0,3661	1,5888	0	
0	0,1399	0,1790	0,3706	0,3306	0,6405	0,4197	1,0002	0,3680	1,5655	0	
0	0,1330	0,1805	0,3560	0,3317	0,6090	0,4192	0,9403	0,3669	1,4651	0	
0	0,1140	0,1693	0,2968	0,2961	0,4820	0,3644	0,7134	0,3182	1,0936	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Alínea e Alínea

Tabela 1 - resultados em MDF centrado

Fonte: Métodos de Diferenças Finitas e Volumes Finitos para Problemas Convectivos Difusivos

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,1140	0,1693	0,2968	0,2961	0,4820	0,3644	0,7134	0,3182	1,0936	0	
0	0,1330	0,1805	0,3560	0,3317	0,6090	0,4192	0,9403	0,3669	1,4651	0	
0	0,1399	0,1790	0,3706	0,3306	0,6405	0,4197	1,0002	0,3680	1,5655	0	
0	0,1426	0,1782	0,3750	0,3289	0,6485	0,4175	1,0144	0,3661	1,5888	0	
0	0,1433	0,1780	0,3761	0,3285	0,6500	0,4169	1,0169	0,3656	1,5928	0	
0	0,1426	0,1782	0,3750	0,3289	0,6485	0,4175	1,0144	0,3661	1,5888	0	
0	0,1399	0,1790	0,3706	0,3306	0,6405	0,4197	1,0002	0,3680	1,5655	0	
0	0,1330	0,1805	0,3560	0,3317	0,6090	0,4192	0,9403	0,3669	1,4651	0	
0	0,1140	0,1693	0,2968	0,2961	0,4820	0,3644	0,7134	0,3182	1,0936	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2 - resultados em MVF

Fonte: Métodos de Diferenças Finitas e Volumes Finitos para Problemas Convectivos Difusivos

Observe que os resultados são iguais pois, de acordo com Corrêa (2024), os coeficientes das matrizes resolvidas são iguais.

Agora, considere a seguinte equação:

$$\frac{dp}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla p + \rho \frac{du}{dx} + \rho \frac{dv}{dy} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + \rho \frac{du}{dx} + \rho \frac{dv}{dy} = 0 \quad (61)$$

onde ρ é a densidade, u e v a velocidade em x e y respectivamente.

Formulando em diferenças finitas:

$$\frac{p(x,y,t+h) - p(x,y,t)}{\Delta t} + u \frac{p(x+h,y,t) - p(x,y,t)}{\Delta x} + v \frac{p(x,y+h,t) - p(x,y,t)}{\Delta y} + \rho \frac{u(x+h) - u(x,t)}{\Delta x} + \rho \frac{v(y+h) - v(y)}{\Delta y} = 0 \quad (62)$$

Considerando que $\Delta x = \Delta y = \Delta t = h$, obtemos:

$$\frac{\rho(x,y,t+h) - \rho(x,y,t)}{h} + u \frac{\rho(x+h,y,t) - \rho(x,y,t)}{h} + v \frac{\rho(x,y+h,t) - \rho(x,y,t)}{h} + \rho \frac{u(x+h) - u(xt)}{h} + \rho \frac{v(y+h) - v(y)}{h} = 0 \quad (63)$$

Considerando a função ρ conhecida em seu contorno, também conhecida a variação de u e v , temos uma equação que será analisada em n nós de uma região, resultando assim em uma matriz de n incógnitas e n equações. Está é a situação mais fácil de resolução, sem precisar de métodos numéricos para resolução das equações. Se soubermos o valor de v e de u , e de suas variações, e da densidade no contorno do objeto de análise, conseguimos resolver por métodos simples como escalonamento.

Agora, vamos formular para volumes finitos, assim:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla v \cdot \vec{\rho} = 0 \quad (64)$$

$$\int \left(\frac{d\rho}{dt} + \nabla v \cdot \vec{\rho} \right) dx dy dt = 0 \quad (65)$$

$$\int \frac{d\rho}{dt} dx dy dt = \int (\rho_{t+\Delta t} - \rho_t) dx dy = \int (\rho_{t+\Delta t} - \rho_t) \Delta x \Delta y \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \int \nabla(v \cdot \vec{\rho}) dx dy dt &= \int \left(\frac{\partial(v \cdot \vec{\rho})}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot \vec{\rho})}{\partial y} \right) dt dx dy = \int (u \rho_{x+\Delta x} - u \rho_x) dt dy + \\ &+ \int (v \rho_{y+\Delta y} - v \rho_y) dt dx \end{aligned} \quad (67)$$

Assim, obtemos:

$$(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t) \Delta x \Delta y + (u \rho_{x+\Delta x} - u \rho_x) \Delta t \Delta x + (v \rho_{y+\Delta y} - v \rho_y) \Delta t \Delta x = 0 \quad (68)$$

Ainda, se considerarmos que: $\Delta t = \Delta x = \Delta y$, obtemos:

$$(\rho_{t+\Delta t} - \rho_t) + (u \rho_{x+\Delta x} - u \rho_x) + (v \rho_{y+\Delta y} - v \rho_y) = 0 \quad (69)$$

Sendo de fácil resolução.

Acima, consideramos que a variação temporal e nos eixos x e y são iguais, para assim podermos “cortar” na equação. Podemos também supor que ambos possuem variação unitária, e definir a variação temporal como segundo, e a variação espacial como milímetro.

A seguir, o método dos elementos finitos aplicado em duas equações diferentes.

Primeiro, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(v^{\rightarrow} \rho) \right) w d\Omega = 0 \quad (70)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(u\rho)}{\partial x} w d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(v\rho)}{\partial y} w d\Omega = 0 \quad (71)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} w d\Omega = w\rho - \int_{\Omega} \rho \frac{\partial w}{\partial t} \Omega \quad (72)$$

$$w\rho = \int \nabla w \rho d\Omega = \int \rho n w dr \quad (73)$$

$$\int_{\Omega} \nabla(v^{\rightarrow} \rho) w d\Omega = v^{\rightarrow} \rho w - \int_{\Omega} v^{\rightarrow} \rho \nabla w d\Omega \quad (74)$$

$$\int_{\Omega} \nabla(v^{\rightarrow} \rho w) d\Omega = \int_r v^{\rightarrow} \rho w n dr \quad (75)$$

Juntando:

$$\int \rho w n dr + \int v^{\rightarrow} \rho w n dr - \int \rho \frac{dw}{dt} d\Omega - \int v^{\rightarrow} \rho \nabla w d\Omega = 0 \quad (76)$$

Aproximando as funções por polinômios de interpolação, tem-se:

$$\hat{u} = \sum_j N_j u_j \quad (77)$$

$$\hat{w} = \sum_i N_i u_i \quad (78)$$

$$N_1 = 1/8(1+x)(1+y)(1+t) \quad (79)$$

$$\int \sum_j N_j u_j \frac{dN_i u_i}{dt} d\Omega + \int v^{\rightarrow} \sum_j N_j u_j \nabla \sum_i N_i u_i d\Omega = \int \rho w dr + \int v^{\rightarrow} \rho w dr \quad (80)$$

Como u_i pode ser qualquer valor arbitrário que desejarmos, obtemos:

$$u_j \left(\int N_j \frac{dN_i}{dt} d\Omega + \int v^{\rightarrow} N_j \nabla N_i d\Omega \right) = \int \rho w dr + \int v^{\rightarrow} \rho w dr \quad (80)$$

ou:

$F=KX$

sendo que :

$$F = \int \rho w dr + \int v^{\rightarrow} \rho w dr \quad (81)$$

$$K = \int N_j \frac{dN_i}{dt} d\Omega + \int v^{\rightarrow} N_j \nabla N_i d\Omega \quad (82)$$

Nessa formulação acima, a condição de contorno é aplicada na integração do contorno r , assim precisamos saber o valor de ρ em r e o valor de v^{\rightarrow} em r , para assim

conseguirmos resolver este problema. Saber o valor de c significa saber qual a densidade na região r , e saber ∇c significa ter o valor da velocidade vetorial em r .

Agora, aplicando o modelo SUPG:

O modelo para equação do transporte de um traçador pelo fluido de um reservatório é (Ribeiro, 2024):

$$\varphi \frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c + \nabla \cdot (-D \nabla c) = 0, \text{ sendo:} \quad (83)$$

c a concentração do traçador, φ a porosidade do meio e D o tensor de difusão dado por:

$$D = \left(\frac{\alpha_{mol}}{\tau} + \alpha_T |u| \right) I + \frac{\alpha_L - \alpha_T}{|u|} u \cdot u^t \quad (84)$$

sendo que u é:

$$u = \nabla \cdot \left(-\frac{k}{\mu} \nabla p \right) \quad (85)$$

A seguir, é mostrado um gráfico de solução com as seguintes considerações (Ribeiro, 2024) : 1000m * 1000m de dimensão total, fluxo de entrada de $-50 \text{ m}^2/\text{dia}$, $k = 100 \text{ mD}$, $\mu=1$, $\varphi = 0.1$, $c_o = 0$, $c = 1 \text{ de 1 dia}$, $\alpha = 1$ e $\Delta t = 1 \text{ dia}$.

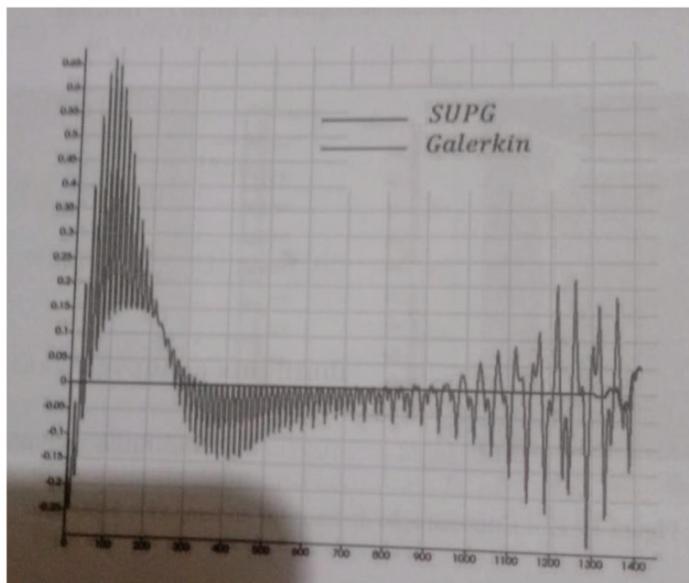


Figura 5 - Concentração do traçador em 2000 dias ao longo da diagonal entre os poços de injeção e produção

Fonte: Introdução ao Método dos Elementos Finitos

CONCLUSÕES

Nesta pesquisa de revisão bibliográfica, foram demonstradas diversas formas de solução a equações diferenciais e problemas dentro da engenharia mecânica, na área de mecânica dos fluidos. Tais equações tem importância na engenharia e suas soluções trazem informações úteis sobre o problema que está sendo analisado. Foi demonstrado a solução de problemas utilizando os quatro métodos propostos. É preciso também levar em consideração a quantidade enorme de soluções diferentes possíveis para uma equação utilizando métodos diferentes, ou até o mesmo método.

Considere por exemplo o método dos elementos finitos. Neste trabalho foi pesquisado e aplicado apenas o método de galerkin e a formulação semi-discreta SUPG, mas existem outros métodos e formulações, como o método de Rayleigh-Ritz.

Também foram apresentados alguns tipos de elementos possíveis de se aplicar, mas também existem elementos com formatos diferentes que não foram abordados nesta pesquisa.

Destaca-se o método de Euler em EDOs, com apenas uma derivada, onde iguala-se a derivada com o restante da equação. Para situações mais complexas, com mais derivadas na equação, ou se a equação for EDP, utiliza-se os outros métodos.

O método mais simples e fácil é o método das diferenças finitas, onde o domínio de análise é dividido em geometrias exatas, além de ter a vantagem de poder ser aplicado nas mesmas equações que os métodos dos volumes e elementos finitos podem ser aplicados. Porém, quanto mais complexo a geometria, mais demorado fica a convergência desse método, além de mais complexo, sendo portanto ideal para geometrias simples, onde acaba sendo mais fácil de formular o método se comparado com os outros dois. Porém, se a geometria for complexa, a sua dificuldade e demora de convergência faz com que seja justificado a aplicação dos outros métodos.

Em geometrias complexas, o método dos elementos finitos se sobressai em relação ao das diferenças finitas, pois consegue uma divisão de domínio de integração mais flexível, conseguindo assim uma formulação da maneira mais ideal possível, visando tanto uma convergência ótima, quanto uma quantidade menor de elementos.

Já o método dos Volumes Finitos é ideal em equações envolvendo fluidos, pois como já comentado, ele garante a conservação das propriedades, como por exemplo, a conservação da massa, algo que não ocorre com os outros métodos.

Todos os métodos são realmente muito úteis na engenharia, e o que foi apresentado aqui foi uma parte de uma área matemática vasta de materiais existentes, além de possíveis novas formulações futuras por cientistas ao redor do mundo, para cada vez mais chegarmos a valores mais próximos da realidade.

REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. Porto Alegre: Grupo A, 2012. E-book. ISBN 9788540701700. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788540701700/>. Acesso em: 11 jul. 2024.
- BRASIL, Reyolando M. L. R F.; BALTHAZAR, José M.; GÓIS, Wesley. **Métodos numéricos e computacionais na prática de engenharias e ciências**. [S.I.]: Editora Blucher, 2015. E-book. ISBN 9788521209362. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521209362/>. Acesso em: 25 abr. 2023.
- BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, Annette M. **Análise numérica**. Tradução da 10ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2016. E-book. ISBN 9788522123414. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522123414/>. Acesso em: 11 jul. 2024.
- CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. [Porto Alegre - RS]: Grupo A, 2016. E-book. ISBN 9788580555691. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580555691/>. Acesso em: 20 fev. 2023.
- ÇENGEL, Yunus A.; CIMBALA, John M. **Mecânica dos fluidos**. [Porto Alegre - RS]: Grupo A, 2015. E-book. ISBN 9788580554915. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580554915/>. Acesso em: 15 fev. 2023.
- ÇENGEL, Yunus A.; III, William J. P. **Equações diferenciais**. [Porto Alegre - RS]: Grupo A, 2014. E-book. ISBN 9788580553499. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788580553499/>. Acesso em: 15 fev. 2023.
- FILHO, Avelino A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. [São José dos Campos, SP]: Editora Saraiva, 2009. E-book. ISBN 9788536519708. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788536519708/>. Acesso em: 15 fev. 2023.
- MALISKA, Clovis R. **Transferência de calor e mecânica dos fluídos computacional**. 2ª ed. [Barueri I SP]: Grupo GEN, 2004. E-book. ISBN 9788521633365. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521633365/>. Acesso em: 25 abr. 2023.
- NEIDE, Bertoldi F. **Cálculo numérico**. 1. ed. [S.I.]: Pearson, 2015.
- REDONDA, V. et al. **Métodos de diferenças finitas e volumes finitos para problemas convectivos difusivos**. Disponível em: http://www.mcct.sites.uff.br/wp-content/uploads/sites/454/2018/09/Dissertacao_7.pdf. Acesso em: 26 jan. 2024.
- RIBEIRO, Fernando Luiz B. **Introdução ao método dos elementos finitos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2020.