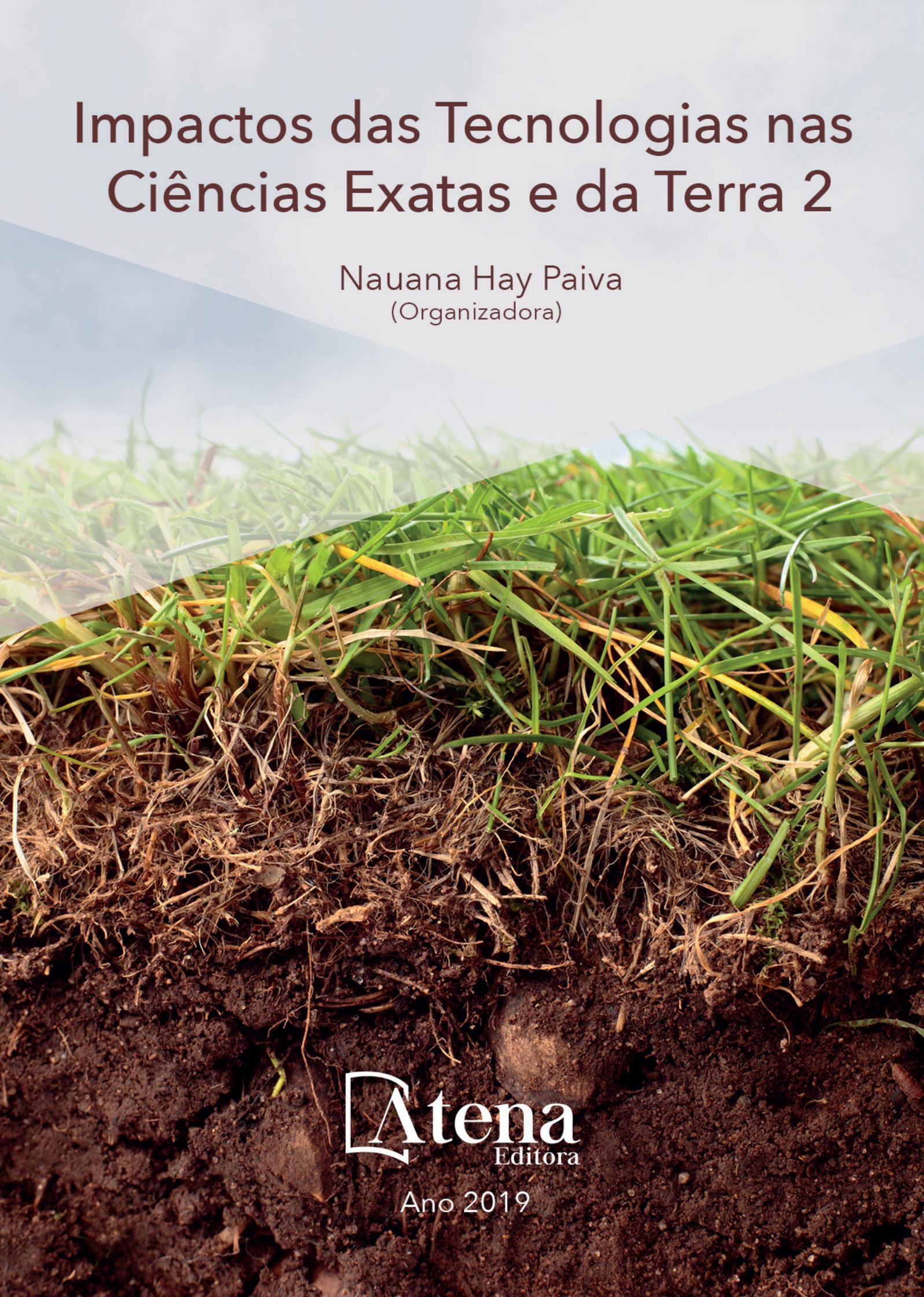


# Impactos das Tecnologias nas Ciências Exatas e da Terra 2

Nauana Hay Paiva  
(Organizadora)



**Atena**  
Editora

Ano 2019

Nauana Hay Paiva  
(Organizadora)

# Impactos das Tecnologias nas Ciências Exatas e da Terra 2

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora

Copyright © da Atena Editora

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Diagramação e Edição de Arte: Geraldo Alves e Karine de Lima

Revisão: Os autores

#### Conselho Editorial

- Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Profª Drª Deusilene Souza Vieira Dall’Acqua – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Profª Drª Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas  
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

134	Impactos das tecnologias nas ciências exatas e da terra 2 [recurso eletrônico] / Organizadora Nauana Hay Paiva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Impactos das Tecnologias nas Ciências Exatas e da Terra; v. 2)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-053-7 DOI 10.22533/at.ed.537192201  1. Ciências exatas. 2. Tecnologia. I. Paiva, Nauana Hay. II. Série.  CDD 016.5
-----	---

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

DOI O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores.

2019

Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
O ALUNO COMO SUJEITO ATIVO NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM: OS IMPACTOS DAS METODOLOGIAS ATIVAS EM DIFERENTES MODALIDADES DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Sidney Silva Simplicio Alexsandra da Costa Andrade Maria do Socorro Tavares Cavalcante	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5371922011</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>15</b>
COMPOSIÇÃO QUÍMICA DOS ÓLEOS ESSENCIAIS DE FOLHAS DE GOIABEIRAS: UMA REVISÃO DE LITERATURA	
Luiza Alves Mendes Amélia Carlos Tuler Carolina de Oliveira Bernardes Drielli Canal Marianna Junger de Oliveira Garozi José Henrique Soler Guilhen Lidiane Gomes dos Santos	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5371922013</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
INFLUÊNCIA DO TEMPO DE CONTATO NA ADSORÇÃO DE NI(II) EM BIOCÁRVÕES ORIUNDOS DAS CASCAS DE EUCALIPTO E PALHA DE CAFÉ	
Ruan de Oliveira Alves D'ávila Leal Polastreli Ueslei Giori Favero Yago Ricardo de Oliveira Tiago Guimarães Lucas Destefani Paquini Bruno Regis Lyrio Ferraz Renato Ribeiro Passos Demetrius Profeti Luciene Paula Roberto Profeti	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5371922014</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>30</b>
AVALIAÇÃO DA ADSORÇÃO DE CO(II) UTILIZANDO BIOCÁRVÕES DE PALHA DE CAFÉ COMO MATERIAL ADSORVENTE	
Ueslei Giori Favero Yago Ricardo de Oliveira D'ávila Leal Polastreli Ruan de Oliveira Alves Tiago Guimarães Lucas Destefani Paquini Bruno Regis Lyrio Ferraz Renato Ribeiro Passos Demetrius Profeti Luciene Paula Roberto Profeti	
<b>DOI 10.22533/at.ed.5371922015</b>	

**CAPÍTULO 5 ..... 36**

DEGRADAÇÃO DO FUNGICIDA FLUTRIAFOL UTILIZANDO NANOPARTÍCULAS BIMETÁLICAS DE FE/NI, FE/CU E CU COM ANÁLISE POR GC/MS

Maxwell Daniel de Freitas  
Karla Moreira Vieira  
Vanessa Moreira Osorio  
Isabela Cristina de Matos Cunha  
Renata Pereira Lopes Moreira

**DOI 10.22533/at.ed.5371922016**

**CAPÍTULO 6 ..... 50**

ANÁLISE TEMPORAL DA PRODUÇÃO AGROPECUÁRIA DO MUNICÍPIO DE ARROIO DO PADRE/RS, ENTRE OS ANOS DE 2001 E 2016

Alison André Domingues Teixeira  
Clismam Soares Porto  
Alexandre Felipe Bruch  
Angélica Cirolini  
Marciano Carneiro  
Jéssica Stern Behling

**DOI 10.22533/at.ed.5371922017**

**CAPÍTULO 7 ..... 63**

MAPEAMENTO DO USO DA TERRA E SEUS CONFLITOS EM ÁREAS DE PRESERVAÇÃO PERMANENTE NO MUNICÍPIO DE ARROIO DO PADRE, RS

Alison André Domingues Teixeira  
Clismam Soares Porto  
Angélica Cirolini  
Alexandre Felipe Bruch  
Marciano Carneiro  
Marinêz da Silva

**DOI 10.22533/at.ed.5371922018**

**CAPÍTULO 8 ..... 76**

AValiação DA CONdição CORPORAL DOS CÃES DOMICILIADOS DO MUNICÍPIO DE REALEZA/PR

Jhenifer Cintia Beneti  
Anne Caroline de Aguiar Pesenti  
Andressa Silveira dos Santos  
Glauco Eleutherio da Luz  
Everton Artuso  
Luciana Pereira Machado

**DOI 10.22533/at.ed.5371922019**

**CAPÍTULO 9 ..... 81**

IMPACTO DO TURISMO SOBRE A HIDROGRAFIA DO PARQUE ESTADUAL MARINHO DE AREIA VERMELHA, CABEDELO/PB: CONTRIBUIÇÕES PARA GESTÃO AMBIENTAL

Daniel Silva Lula Leite  
George Emmanuel Cavalcanti de Miranda

**DOI 10.22533/at.ed.53719220110**

**CAPÍTULO 10 ..... 98**

ESTUDO GEOLÓGICO E DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL EM ÁREA PARA PRODUÇÃO DE BRITA EM VERA CRUZ (RS)

Cândida Regina Müller  
Thays França Afonso  
Leandro Fagundes  
Luis Eduardo Silveira da Mota Novaes'

**DOI 10.22533/at.ed.53719220111**

**CAPÍTULO 11 ..... 106**

FLUXOS DE CALOR E RADIAÇÃO DE ONDA LONGA EM SUPERFÍCIE DURANTE TEMPESTADE TORNÁDICA EM TAQUARITUBA/SP

Kelli Silva de Lara  
Allef Patrick Caetano de Matos  
André Becker Nunes

**DOI 10.22533/at.ed.53719220112**

**CAPÍTULO 12 ..... 115**

SOBRE A INTERAÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS COM O MEIO CONTÍNUO MODELADOS PELO MEC

Welky Klefson Ferreira de Brito  
José Marcílio Filgueiras Cruz  
Ângelo Vieira Mendonça

**DOI 10.22533/at.ed.53719220113**

**CAPÍTULO 13 ..... 137**

FÍSICA DO MEIO AMBIENTE: ESTADO DA ARTE

Thiago Moura Zetti  
Milton Souza Ribeiro Miltão

**DOI 10.22533/at.ed.53719220114**

**CAPÍTULO 14 ..... 146**

ESTUDO DO GRUPO DE POINCARÉ E DE SUAS REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Ana Camila Costa Esteves  
Milton Souza Ribeiro Miltão

**DOI 10.22533/at.ed.53719220115**

**CAPÍTULO 15 ..... 165**

UMA REVISÃO SOBRE O PROBLEMA DE POSICIONAMENTO NO PROJETO DE CIRCUITOS INTEGRADOS MODERNOS

Mateus Paiva Fogaça  
Jacques de Jesus Figueiredo Schmitz Junior  
Paulo Francisco Butzen  
Cristina Meinhardt

**DOI 10.22533/at.ed.53719220116**

**CAPÍTULO 16 ..... 188**

UMA IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADOR DE ACESSOS DE BAIXO CUSTO UTILIZANDO CARTÕES RFID

Wagner Loch  
Rafael Iankowski Soares

**DOI 10.22533/at.ed.53719220117**

**CAPÍTULO 17 ..... 193**

AGROQUÍMICOS: LEVANTAMENTO DO USO NA CIDADE DE FORMOSA DA SERRA NEGRA/MA E  
UMA PROPOSTA PARA TRABALHOS EM SALA DE AULA

Janyeid Karla Castro Sousa  
Jemmla Meira Trindade Moreira  
Andréa Soares de Souza Barros

**DOI 10.22533/at.ed.53719220118**

**SOBRE A ORGANIZADORA..... 209**

## SOBRE A INTERAÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS COM O MEIO CONTÍNUO MODELADOS PELO MEC

**Welky Klefson Ferreira de Brito**

Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa –  
PB

**José Marcílio Filgueiras Cruz,**

Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa –  
PB

**Ângelo Vieira Mendonça**

Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa –  
PB

**RESUMO:** A interação-solo estrutura vem cada vez mais despertando o interesse da academia por trazer uma análise mais real do comportamento da estrutura como um todo. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise da interação de pórtico planos com o solo. Para a estrutura foram utilizadas formulações já consagradas e para o solo foram utilizadas as soluções fundamentais de Melan do semi-plano infinito, onde é composta pela solução fundamental de Kelvin bidimensional somada a uma parcela complementar. Resultados obtidos são mostrados ao término analisando esforços e deslocamentos na estrutura e reações na sapata.

**PALAVRAS-CHAVE:** Método dos Elementos de Contorno, AISE, Solução Fundamental de Melan.

### 1 | INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento da construção civil e conseqüentemente o desenvolvimento dos cálculos e técnicas construtivas, edificações mais altas e com formas diversas passaram a serem construídas, necessitando de conhecimentos mais avançados por parte dos projetistas sobre a estabilidade dessas edificações. Devido a tais arranjos nas edificações e alturas cada vez maiores, a análise estrutural vem sendo feita considerando diversos efeitos, como por exemplo a interação solo-estrutura, que aqui será visto. Com isso modelos matemáticos ganham importante papel neste universo uma vez que tais estruturas conduzem a sistemas algébricos de grandes dimensões, onde o cálculo a mão é algo impraticável.

Dessa forma, será visto aqui a análise de pórtico plano (PP) em meio contínuo (semi-plano infinito) modelados pelo Método dos Elementos de Contorno (MEC) considerando a interação entre eles (interação solo-estrutura).

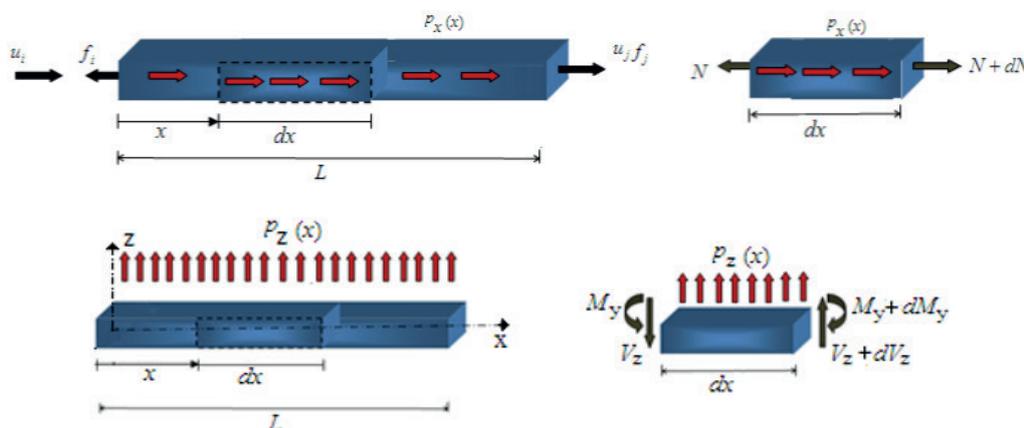
### 2 | ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS PELO MEC

No problema dos pórticos planos as barras da estrutura serão estudadas sobre os efeitos: do esforço axial e da flexão. No caso da flexão

será usado o modelo de Euler-Bernoulli, cujas hipóteses serão apresentadas a seguir:

1. O problema tridimensional é aqui reduzido a apenas uma dimensão, uma vez que foi considerado que a maior dimensão do elemento, seu comprimento, é muito maior que as outras duas;
2. Barra com seção transversal uniforme;
3. No regime estático, as cargas são aplicadas de tal modo que pode ser desprezado os efeitos da energia cinética;
4. Material Elástico linear, homogêneo e isótropo;
5. A planicidade das seções é mantida durante o processo de deformação;
6. Deformação transversais da seção (efeito Poisson) são desconsideradas;
7. Pequenos deslocamentos e pequenas deformação, permitindo a superposição dos efeitos.

Considere o problema real constituído de uma barra sob ação de carregamentos axial e transversal distribuídos, conforme respectivamente mostrados na Fig. 1 a-b.



**Figura 1** – a) Barra submetida a tração simples, b) barra sob flexão plana (Extraído de Cruz, 2012).

onde  $N$ ,  $V_z$ ,  $M_y$  representam os esforços normal, cortante e momento fletor. Do equilíbrio em forças na direção axial em um elemento infinitesimal, obtém-se a equação diferencial governante do problema da tração direta:

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p_x(x) = 0 \quad (1)$$

onde  $u(x)$  é deslocamento axial,  $E$  é módulo de elasticidade longitudinal e  $A$  é área transversal da barra. A relação força normal-deslocamento é dada por:

$$N(x) = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (2)$$

Já os equilíbrios em força e momento no problema de flexão (Fig1.b), geram uma equação governante final:

$$EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p_z(x) \quad (3)$$

onde  $w(x)$  é o deslocamento transversal e  $I_y$  é o momento principal de Inércia da barra. As relações força cortante-deslocamento e momento fletor-deslocamento são dadas respectivamente por:

$$V_z(x) = -EI_y \frac{d^3 w(x)}{dx^3}, \quad M_y(x) = -EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (4)$$

A solução do MEC requer a utilização das relações do problema real e as de um problema virtual, conhecido como problema fundamental. Esse é caracterizado como um problema análogo ao problema real, contudo ele tem dimensões infinitas e submetido a fontes pontuais. Assim a equação governante do problema fundamental de tração direta pode ser escrita de forma similar a Eq. (1), resultando em:

$$EA \frac{d^2 u^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -p_x^*(x, \hat{x}) \quad (5)$$

onde  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , onde  $\delta(x, \hat{x})$  é a delta de Dirac. Resolvendo a equação diferencial, Eq. (5), obtém-se a solução fundamental do problema de tração direta em termos de deslocamento (Cruz, 2012):

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{r}{2EA} \quad (6)$$

onde  $r = |x - \hat{x}|$ .

O esforço normal do problema fundamental, também análogo ao problema real, é dado por:

$$N^*(x, \hat{x}) = EA \frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (7)$$

Analogamente, quando uma fonte transversa é aplicada no problema fundamental, a equação governante do problema é a de flexão dada por:

$$EI_y \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} = p_z^*(x, \hat{x}) \quad (8)$$

Cujas soluções fundamentais são dadas por CRUZ (2012):

$$\begin{aligned} w^*(x, \hat{x}) &= \frac{L^3}{12EI_y} \left[ \left(\frac{r}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 2 \right] \\ \phi^*(x, \hat{x}) &= \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{L^2 \operatorname{sgn}(x - \hat{x})}{4EI_y} \left[ \left(\frac{r}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L}\right) \right] \\ M_y^*(x, \hat{x}) &= -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{L}{2} \left[ \frac{r}{L} - 1 \right] \\ V_z^*(x, \hat{x}) &= -EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \end{aligned} \quad (9a - d)$$

A equação integral é uma forma equivalente à equação diferencial governante do problema, que pode ser obtida mediante aplicação do Método dos Resíduos Ponderados (MRP). No caso da tração direta, o MRP permite escrever que:

$$\int_0^L \left[ EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p_x(x) \right] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (10)$$

onde  $u^*(x, \hat{x})$  é a função ponderadora de deslocamentos ou função peso. Já no problema de flexão, a relação do MRP fica:

$$\int_0^L \left[ EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - p_z(x) \right] w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (11)$$

Segundo Cruz (2012), integrando convenientemente por partes as Eq. (10) e (11), utilizando-se convenientemente as Eq. (5) e (8), e ainda aplicando-se as propriedades do delta Dirac, equações integrais dos deslocamentos axiais e transversais da barra podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} u(\hat{x}) - [N(x)u^*(x, \hat{x})]_0^L + [u(x)N^*(x, \hat{x})]_0^L \\ - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w(\hat{x}) - [V_z(x)w^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y(x)\phi^*(x, \hat{x})]_0^L + [\phi(x)M_y^*(x, \hat{x})]_0^L \\ + [w(x)V_z^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L [p_z(x)w^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

No caso de problema de flexão, tem-se duas condições de contorno desconhecidas, e apenas uma equação integral até o momento disponibilizada. Assim, para tornar possível a solução do problema é necessária a obtenção de uma equação adicional. Isso pode ser feito derivando-se no ponto fonte a Eq. (13),  $\phi(\hat{x}) = -\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}}$ , resultando na equação da inclinação da elástica dada por:

$$-\phi(\hat{x}) - [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] - [M_y(x)\phi_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] + [\phi(x)M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] + [w(x)V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] - \int_0^L [p_z(x)w^*(x, \hat{x})]dx = 0 \quad (14)$$

A transição da representação integral para a algébrica requer a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, isto é, em  $\hat{x} \rightarrow 0$  e  $\hat{x} \rightarrow L$  nas Eq. (12), (13) e (14). Além disso, após o cálculo das soluções fundamentais nas devidas colocações do ponto fonte o sistema algébrico toma a forma a seguir (Cruz, 2012):

$$\begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \phi_i \\ u_j \\ w_j \\ \phi_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\alpha_{y1} & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ \alpha_x & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & \alpha_{y1} \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \phi_i \\ u_j \\ w_j \\ \phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\beta_x & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{y1} & 0 & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & 0 & -\beta_{y3} & 0 & -\beta_{y2} & 0 \\ -\beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & \beta_{y1} & 0 \\ 0 & -\beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ V_{zi} \\ M_{yi} \\ N_j \\ V_{zj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{z1i} \\ f_{\phi1i} \\ f_{xj} \\ f_{z1j} \\ f_{\phi1j} \end{bmatrix}$$

onde  $\alpha_x = -1/2$ ,  $\beta_x = L/2EA$ ,  $f_{xi} = f_x(0) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x)x dx$  e  $f_{xj} = f_x(L) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x)(-x+L)dx$ ,  $\alpha_{y1} = L/2$ ,  $\beta_{y1} = L^3/6EI_y$ ,  $\beta_{y2} = L^2/4EI_y$ ,  $\beta_{y3} = L/2EI_y$ ,  $f_{z1}(0) = \int_0^L p_z(x)w^*(x,0)dx$ ,  $f_{z1}(L) = \int_0^L p_z(x)w^*(x,L)dx$ ,  $f_{\phi1}(0) =$  (15)

$-\int_0^L p_z(x)w^*_{,x}(x,0)dx$ ,  $f_{\phi1}(L) = -\int_0^L p_z(x)w^*_{,x}(x,L)dx$ ,. Convém notar que os termos do vetor de carga no caso deles serem constantes fica:

$$f_{xi} = f_{xj} = \frac{L}{2EA}, f_{z1}(0) = \frac{5L^4}{48EI_y}, f_{z1}(L) = \frac{5L^4}{48EI_y}, f_{\phi1}(0) = -\frac{L^3}{6EI_y}, f_{\phi1}(L) = \frac{L^3}{6EI_y}$$

Quando a estrutura é formada por barras inclinadas entre si a montagem do sistema final de equações pode requerer manipulações algébricas intermediárias muito

trabalhosas. Por isso neste trabalho optou-se por uma estratégia de sequenciamento conveniente das contribuições de cada barra. A primeira etapa é associada a unificação dos sistemas de coordenadas locais (SCLU), que constitui uniformizar as direções dos graus de liberdade dos esforços para os de deslocamento. Em seguida adota-se um segundo sistema de referência, chamado de global (SCG), associado a cada barra e com as direções associadas a estrutura. As grandezas grafadas com barra superior se referem ao SCLU enquanto sem barra SCL.

Dessa forma, o sistema algébrico da barra no SCLU será:

$$[I]\{\bar{u}\} + [\hat{h}]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (16)$$

A forma explícita de Eq.(16) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\alpha_{y1} & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ \alpha_x & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & \alpha_{y1} \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{y1} & 0 & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & 0 & \beta_{y3} & 0 & -\beta_{y2} & 0 \\ \beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & \beta_{y1} & 0 \\ 0 & -\beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{N}_j \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{z1i} \\ \bar{f}_{\varphi1i} \\ \bar{f}_{xj} \\ \bar{f}_{z1j} \\ \bar{f}_{\varphi1j} \end{bmatrix} \quad (17)$$

A Figura 2 mostra os graus de liberdade no SCLU.

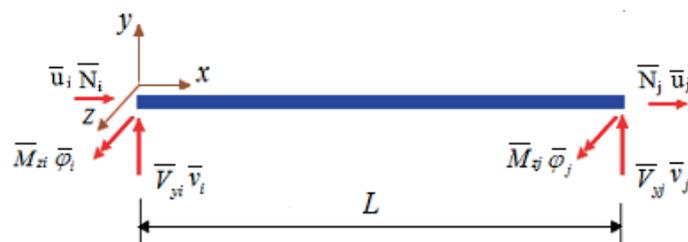
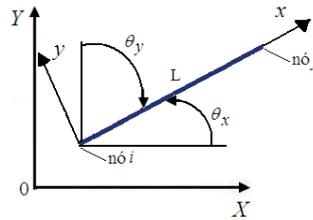


Figura 2 - SCLU de barra de pórtico plano. (Extraído de Cruz, 2012)

Para que seja viabilizado o acúmulo algébrico das contribuições advindas das barras para montagem do sistema da estrutura, são necessários que as equações referidas a seus sistemas locais (SCLU) sejam transformadas para o Sistema de Coordenadas Globais (SCG). Dessa forma, os deslocamentos, esforços e forças de corpo no SCLU são correlacionados ao SCG da seguinte maneira:

$$\{u\} = [R]\{U\}; \{p\} = [R]\{P\}; \{f\} = [R]\{F\} \quad (18a - c)$$

A Figura 3 mostra as coordenadas locais em relação às globais.



**Figura 3** - Coordenadas globais OXY e coordenadas locais principais 0xy. (Extraída de Cruz 2012).

A matriz de transformação para o pórtico plano é de ordem  $3.nno \times 3.nno$  e é representada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde,  $[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $[0]$  possui todos seus elementos nulos. Os elementos  $C_x$  e  $C_y$  correspondem aos cossenos diretores em relação ao SCG, sendo  $C_x = \cos\theta_x = \frac{X_j + X_i}{L}$  e  $L = \sqrt{(X_j + X_i)^2 + (Y_j + Y_i)^2}$ , comprimento da barra, como mostrado na Fig. 3.

Substituindo as Eq. (18) na Eq. (16), obtém-se:

$$[I]\{U\} + [\hat{H}]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\} \quad (20)$$

$$\text{onde } [\hat{H}] = [R]^T [\hat{h}] [R], [G] = [R]^T [g] [R] \text{ e } \{F\} = [R]^T \{f\}$$

Após a escrita das contribuições das barras no SCG, a montagem da representação algébrica do pórtico é baseada na utilização da técnica da sub-região, que consiste em impor condições de equilíbrio e condições de compatibilidade de deslocamentos em cada nó que recebe as barras concorrentes.

Para elucidar a montagem do sistema de equações do pórtico plano indicado na Fig. 4, serão considerados duas barras concorrentes no nó 3 e outras duas concorrentes no nó 4. Dessa forma, indicam-se as barras (1), (2) e (3) sendo que, as barras (1) e (3) concorrem no nó 3 e as barras (2) e (3) no nó 4.

Assim, as equações algébricas para cada uma das barras no SCG são:

$$\begin{cases} [H^{(1)}_{11}]\{U_1\} + [H^{(1)}_{12}]\{U_3\} = [G^{(1)}_{11}]\{P_9\} + [G^{(1)}_{12}]\{P_5\} \\ [H^{(1)}_{21}]\{U_1\} + [H^{(1)}_{22}]\{U_5\} = [G^{(1)}_{21}]\{P_9\} + [G^{(1)}_{22}]\{P_5\} \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} [H^{(2)}_{22}]\{U_2\} + [H^{(2)}_{23}]\{U_4\} = [G^{(2)}_{22}]\{P_6\} + [G^{(2)}_{23}]\{P_{10}\} \\ [H^{(2)}_{32}]\{U_4\} + [H^{(2)}_{33}]\{U_3\} = [G^{(2)}_{32}]\{P_6\} + [G^{(2)}_{33}]\{P_{10}\} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} [H^{(3)}_{33}]\{U_3\} + [H^{(3)}_{34}]\{U_4\} = [G^{(3)}_{33}]\{P_7\} + [G^{(3)}_{34}]\{P_8\} \\ [H^{(3)}_{43}]\{U_3\} + [H^{(3)}_{44}]\{U_4\} = [G^{(3)}_{43}]\{P_7\} + [G^{(3)}_{44}]\{P_8\} \end{cases} \quad (23)$$

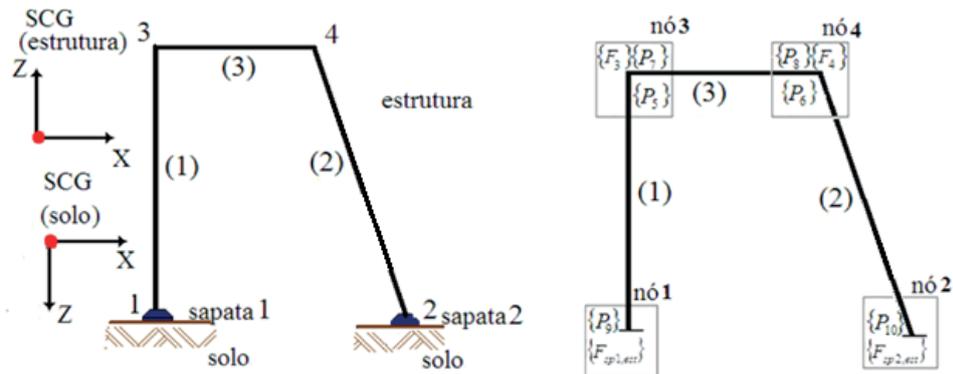


Figura 4 – Pórtico plano. (Extraída de Cruz, 2012).

Dessa forma, de acordo com a Fig. 4, devemos aplicar as condições de compatibilidade de deslocamento em todos os nós, resultando em:

$$\begin{aligned} \{U_1\} &= \{U_{sp1,est}\}; \{U_2\} = \{U_{sp2,est}\}; \\ \{U_3\} &= \{U_5\} = \{U_7\}; \{U_4\} = \{U_6\} = \{U_8\} \end{aligned} \quad (24 \text{ a - d})$$

E ainda deve-se garantir as condições de equilíbrio do mesmo:

$$\begin{aligned} \{P_9\} + \{F_{sp1,est}\} &= \{0\}; \{P_5\} + \{P_7\} = \{F_3\} \\ \{P_6\} + \{P_8\} &= \{F_4\}; \{P_{10}\} + \{F_{sp2,est}\} = \{0\} \end{aligned} \quad (25 \text{ a - d})$$

onde  $\{P_4\}$  e  $\{P_5\}$  correspondem aos vetores que contêm os esforços à direita e à esquerda, respectivamente, do nó 2 e  $\{F\}$  contém as forças e momentos que são aplicadas diretamente neste nó. Substituindo as Eq. (24) e (25) nas Eq. (21), (22) e (23), e reagrupando, é obtido o sistema algébrico da estrutura:

$$\begin{bmatrix}
[H_{11}^{(1)}] & [0] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{12}^{(1)}] & -[G_{11}^{(1)}] & [0] \\
[H_{21}^{(1)}] & [0] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{22}^{(1)}] & -[G_{21}^{(1)}] & [0] \\
[0] & [H_{32}^{(2)}] & [0] & [H_{33}^{(2)}] & -[G_{32}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{33}^{(2)}] \\
[0] & [0] & [H_{43}^{(3)}] & [H_{44}^{(3)}] & [0] & -[G_{43}^{(3)}] & -[G_{44}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [H_{22}^{(2)}] & [0] & [H_{23}^{(2)}] & -[G_{22}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{23}^{(2)}] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] \\
[0] & [0] & [H_{33}^{(3)}] & [H_{34}^{(3)}] & [0] & -[G_{33}^{(3)}] & -[G_{34}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\{U_1\} \\
\{U_2\} \\
\{U_3\} \\
\{U_4\} \\
\{P_6\} \\
\{P_7\} \\
\{P_8\} \\
\{P_9\} \\
\{P_5\} \\
\{P_{10}\}
\end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[I] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[I]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{F_3\} \\
\{0\} \\
\{F_4\} \\
\{F_{sp1,est}\} \\
\{F_{sp2,est}\}
\end{Bmatrix}
\quad (26)$$

### 3 | INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

A estratégia para representação da interação solo-estrutura tem como principais características:

- O solo tomado como um semi-plano elástico, homogêneo e isótropo submetido a ações estáticas horizontais e verticais atuando na sua superfície;
- Sapata admitida como rígida, cada uma apoiando uma única barra;
- Forças de corpo desprezadas;
- A superestrutura é um pórtico plano modelado pelo MEC.

Neste trabalho o solo será admitido como um problema contínuo elástico semi-plano, conhecido como problema de Melan. Esse problema fundamental está associado a um corpo elástico de domínio semi-plano, cuja superfície é livre de tensões e submetido a fontes pontuais em seu interior, conforme mostra a Fig. 5. As soluções desse problema apresentadas por Melan (1943) foram obtidas empregando-se ferramentas matemáticas mais avançadas.

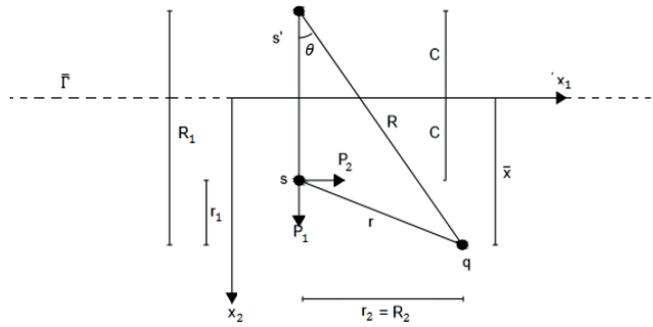


Figura 5 - Cargas pontuais unitárias aplicadas dentro do semi-plano.

Telles e Brebbia (1980) obtiveram as mesmas expressões de Melan utilizando-se um caminho alternativo. Na proposição deles, o problema de Melan pode ser recuperado pela superposição do problema de domínio plano infinito de Kelvin e de um problema complementar. Isto é:  $( )^M = ( )^k + ( )^c$ . Segundo Love(1944), as soluções do problema de Kelvin são dadas por:

$$u^k_{ij} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (27)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal do solo,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do solo e  $r=(r_1r_2)^{1/2}$ , sendo  $r_1=x_1(q) - x_1(s)$ .

Já as expressões complementares, dadas por Telles e Brebbia (1980) correspondentes aos deslocamentos na direção j devido a ação de uma força unitária na direção i no domínio do problema, são dadas por:

$$u_{22}^c = K_d \left\{ -[8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)]\ln R + \frac{[(3-4\nu)R^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R^2}{R^4} \right\}$$

$$u_{21}^c = K_d \left\{ \frac{(3-4\nu)r_1r_2}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1r_2}{R^4} - 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right\}$$

$$u_{12}^c = K_d \left\{ \frac{(3-4\nu)r_1r_2}{R^2} - \frac{4c\bar{x}R_1r_2}{R^4} + 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right\}$$

$$u_{11}^c = K_d \left\{ -[8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)]\ln R + \frac{[(3-4\nu)r^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} - \frac{4c\bar{x}r^2}{R^4} \right\}$$

(28 a - d)

onde:  $\theta = \arctg\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ ,  $R=(R_1R_2)^{1/2}$ ,  $R_1 = x_1(q) - x_1(s')$ ,  $c=x_1(s)\geq 0$ ,  $\bar{x} = x_1(q)\geq 0$ ,  $k_d=1/[8\pi G(1-\nu)]$ , s é o ponto fonte, q o ponto campo e s' a imagem de s.

Quando a colocação do ponto fonte e a resposta no ponto campo estão sobre a superfície livre, as soluções de Melan ficam:

$$\begin{aligned}
u_{22}^M &= u_{22}^k + u_{22}^c = -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \\
u_{21}^M &= u_{21}^k + u_{21}^c = -u_{12}^M = -\frac{(1-2\nu)}{2G} \operatorname{sgn}(x-\hat{x}) \\
u_{11}^M &= u_{11}^k + u_{11}^c = -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r + \frac{1}{2\pi G}
\end{aligned}
\tag{29 a - d}$$

$$\text{onde } \operatorname{sgn}(x-\hat{x}) = \begin{cases} -1 & \rightarrow x < \hat{x} \\ 1 & \rightarrow x > \hat{x} \end{cases}$$

Desprezando-se as forças volumétricas, a representação integral para sólidos elásticos, conhecida como identidade Somigliana, é escrita da seguinte forma (Telles e Brebbia, 1980):

$$c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} p^*_{ij}(q,s)u_j(q)d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*_{ij}(q,s)p_j(q)d\Gamma \tag{30}$$

onde  $c_{ij}$  caracteriza a natureza da localização do ponto, sendo  $c_{ij}(s) = 0$  para colocações do ponto-fonte fora do domínio;  $c_{ij}(s) = 1/2$  para colocações em contornos suaves, e  $c_{ij}(s) = 1$  para colocações no domínio.

Como o problema em estudo refere-se apenas a pórticos planos apoiados na superfície do solo, pode-se utilizar o conceito de superfícies livres de tensão que a solução de Melan é associada implicando em  $p_{ij}^* = 0$ , então a Eq. (46) pode ser reduzida a:

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^M p_j d\Gamma \tag{31}$$

onde  $u_i$  representa a componente do deslocamento na direção  $i$ ,  $p_j$  a componente da força de superfície na direção  $j$ ,  $i$  e  $j$  variam de 1 a 2.

Admitindo que as forças de superfície sofram variação linear no domínio dos elementos de contorno linear, elas podem ser interpoladas como:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \tag{32}$$

Onde  $\{p_n^m\}$  são as forças de superfícies nodais no nó  $n=1,2$  do elemento e  $m=1,2,3$  as coordenadas ou graus de liberdade em cada nó do elemento linear. As funções interpoladoras  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  estão indicadas na Fig. 6.

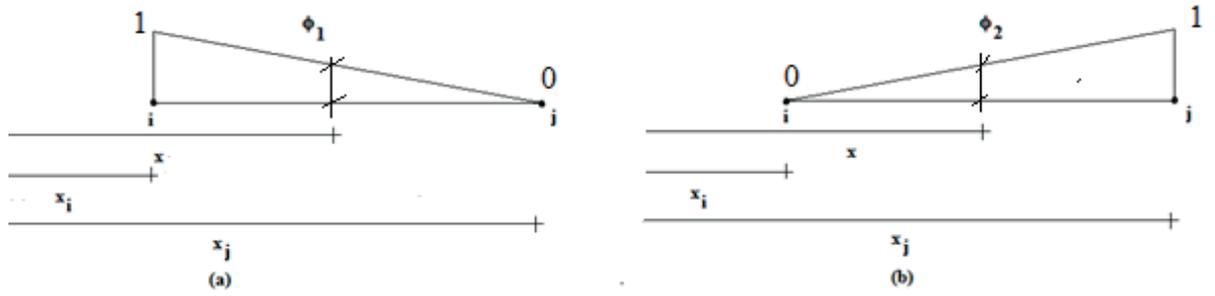


Figura 6 - Funções de interpolação.

De acordo com a Fig. 6 (a), são dadas as funções interpoladoras:

$$\varphi_1 = 1 - \frac{\bar{x}}{L}; \quad \varphi_2 = \frac{\bar{x}}{L} \quad (33 \text{ a - b})$$

onde  $\bar{x}$  é a coordenada global e  $\bar{x} = x - x_i$  e  $L = x_j - x_i$ . Da explicitação da integral Eq. (31) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_{el}} \begin{bmatrix} u_{11}^M & u_{12}^M \\ u_{21}^M & u_{22}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (34)$$

Substituindo Eq. (32) na (34), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

onde  $g = \int u^* \varphi d\Gamma$ , sendo definidos abaixo:

$$g_{11} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \varphi_1 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_1 d\Gamma + \int_0^L \frac{1}{2\pi G} \varphi_1 d\Gamma,$$

$$g_{13} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \varphi_2 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_2 d\Gamma + \int_0^L \frac{1}{2\pi G} \varphi_2 d\Gamma,$$

$$g_{12} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \varphi_1 d\Gamma = -g_{21}, \quad g_{14} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \varphi_2 d\Gamma = g_{21},$$

$$g_{21} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \varphi_1 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-2\nu)}{2G} \varphi_1 d\bar{x},$$

$$g_{22} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \varphi_1 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_1 d\bar{x},$$

$$g_{23} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \varphi_2 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-2\nu)}{2G} \varphi_2 d\bar{x},$$

$$g_{24} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \varphi_2 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_2 d\bar{x}$$

(36a - h)

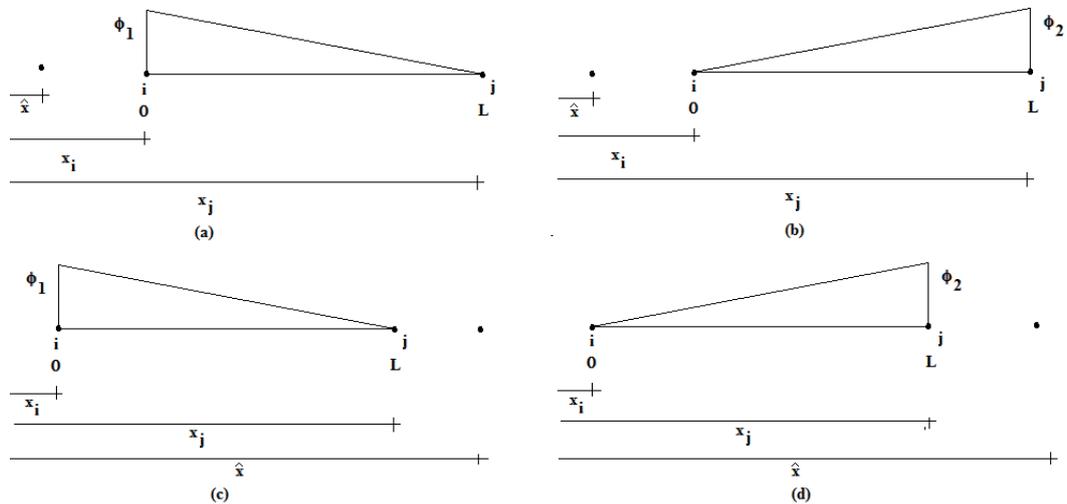
Torna-se necessário agora determinar o valor das integrais que aparecem nas Eq. (36a-h). Porém atenção deve ser dada quanto a colocação do ponto fonte, que pode ser antes do elemento de contorno ou após, fazendo com que se definam valores para  $\hat{x} < \bar{x} + x_i$  e  $\hat{x} > \bar{x} + x_i$ , conforme Fig. 7.

Assim foram calculadas as integrais analiticamente para os dois intervalos abaixo:

A.  $\hat{x} < \bar{x} + x_i$

Sendo a figura 7 (a) e (b), temos que  $r = |x - \hat{x}|$ , onde  $\bar{x} = x - x_i$  e  $r = |\bar{x} + x_i - \hat{x}|$ . Dessa forma foram calculadas as integrais Eq. (37) a (38) conforme Fig. 7 (a) e (b), respectivamente.

$$\blacksquare \quad \varphi_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_1 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\bar{x} + x_i - \hat{x}) \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$



**Figura 7** - Colocação do ponto-fonte no elemento de contorno e medindo seu efeito sobre um ponto  $x$  qualquer.

Fazendo  $z = \bar{x} + x_i - \hat{x}$ ,  $a = x_i - \hat{x}$ ,  $b = x_j - \hat{x}$  e sendo  $L = x_j - x_i$ , tem-se:

$$\int_a^b \ln z \left(\frac{a-z}{L} + 1\right) dz = -\frac{1}{L} [f_2(b) - f_2(a)] + \left(\frac{a}{L} + 1\right) [f_1(b) - f_1(a)] \quad (37)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2} \left(\ln z - \frac{1}{z}\right)$ .

$$\blacksquare \quad \varphi_2 = \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_2 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\bar{x} + x_i - \hat{x}) \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z = \bar{x} + x_i - \hat{x}$ ,  $a = x_i - \hat{x}$ ,  $b = x_j - \hat{x}$  e sendo  $L = x_j - x_i$ , tem-se

$$\int_a^b \ln z \left(\frac{z-a}{L}\right) dz = \frac{1}{L} [f_2(b) - f_2(a)] - \left(\frac{a}{L}\right) [f_1(b) - f_1(a)] \quad (38)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2}(\ln z - \frac{1}{2})$

B.  $\hat{x} > \bar{x} + x_i$

Sendo a figura 7 (c) e (d), tem-se que  $r=|\hat{x}-\bar{x}|$ , onde  $\bar{x}=x-x_i$  e  $r=|\hat{x}-x_i-\bar{x}|$ . Dessa forma foram calculadas as integrais Eq. (39) a (40) conforme Fig. 7 (c) e (d), respectivamente.

$$\bullet \quad \varphi_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_1 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\hat{x} - \bar{x} - x_i) \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z=\hat{x}-\bar{x}-x_i$ ,  $c=\hat{x}-x_i$ ,  $d=\hat{x}-x_j$  e sendo  $L=x_j-x_i$ , tem-se:

$$-\int_c^d \ln z \left(\frac{z-c}{L} + 1\right) dz = -\frac{1}{L}[f_2(d) - f_2(c)] - \left(1 - \frac{c}{L}\right)[f_1(d) - f_1(c)] \quad (39)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2}(\ln z - \frac{1}{2})$ .

$$\bullet \quad \varphi_2 = \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_2 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\hat{x} - \bar{x} - x_i) \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z=\hat{x}-\bar{x}-x_i$ ,  $c=\hat{x}-x_i$ ,  $d=\hat{x}-x_j$  e sendo  $L=x_j-x_i$ , resulta:

$$-\int_c^d \ln z \left(\frac{c-z}{L}\right) dz = \frac{1}{L}[f_2(d) - f_2(c)] - \left(\frac{c}{L}\right)[f_1(d) - f_1(c)] \quad (40)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2}(\ln z - \frac{1}{2})$ .

Para a colocação do ponto fonte à esquerda do elemento de contorno, as funções  $F1(c,d)$  e  $F2(c,d)$  ficam:

$a \geq 0$  e  $b \geq 0$

$$\begin{aligned} F1(a, b) &= -[f_2(b) - f_2(a)] + (a + L)[f_1(b) - f_1(a)] \\ F2(a, b) &= [f_2(b) - f_2(a)] - a[f_1(b) - f_1(a)] \end{aligned} \quad (41 a - b)$$

Com  $a=-\hat{x}-x_i$  e  $b=-\hat{x}+x_j$ . Já para a colocação à direita do elemento as funções  $F1(c,d)$  e  $F2(c,d)$  ficam:

$a < 0$  e  $v < 0$

$$\begin{aligned} F1(a, b) &= -[f_2(b) - f_2(a)] + (a + L)[f_1(b) - f_1(a)] \\ F2(a, b) &= [f_2(b) - f_2(a)] + a[f_1(b) - f_1(a)] \end{aligned} \quad (42 \text{ a - b})$$

Dessa forma, os elementos  $g$  são finalmente:

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\frac{(1-\nu)}{L\pi G} F1(a, b) + \frac{L}{4\pi G}; \quad g_{12} = -g_{21}; \quad g_{13} = -\frac{(1-\nu)}{L\pi G} F2(a, b) + \frac{L}{4\pi G} \\ g_{14} &= g_{21}; \quad g_{21} = -\frac{(1-2\nu)L}{4G}; \quad g_{22} = -\frac{(1-\nu)}{L\pi G} F1(a, b) \\ g_{23} &= -\frac{(1-2\nu)L}{4G}; \quad g_{24} = -\frac{(1-\nu)}{L\pi G} F2(a, b) \end{aligned} \quad (43a - h)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2}(\ln z - \frac{1}{2})$ .

Para o solo tem-se a expressão algébrica  $\{\bar{U}_s\} = [\bar{G}_s]\{\bar{P}_s\}$ , obtida a partir da Eq. (35) e das Eq. (43a-h) para todos os elementos, onde  $\{\bar{P}_s\}$  corresponde aos vetores das forças de superfície e  $\{\bar{U}_s\}$  dos deslocamentos de todos os nós dos elementos de contorno discretizados na superfície do solo. Escrevendo as forças de superfície em função dos deslocamentos, obtém-se:

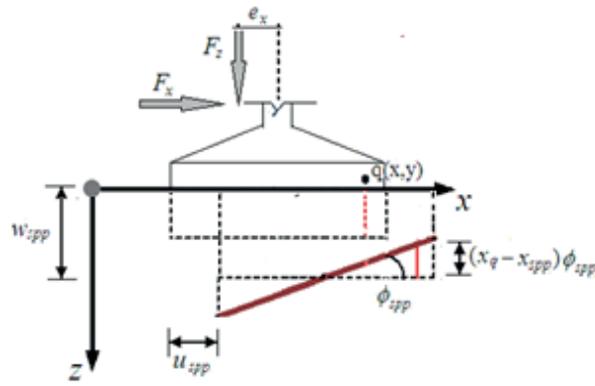
$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{T}]\{\bar{U}_s\} \quad (44)$$

com  $[\bar{T}] = [\bar{G}_s]^{-1}$ .

Para o acoplamento sapata-solo, as seguintes hipóteses são adotadas:

- Contato entre sapata e solo considerado ideal, ou seja, sem deslocamentos relativos na superfície de interação;
- Sendo elemento de fundação rígido, a cinemática dos pontos da interface sapata-solo se dá em duas descrições:
  - a) Translação pura;
  - b) Translação com rotação.

Para este trabalho, uma vez que a sapata é rígida e está sendo analisada no plano, haverá 2 translações e 1 rotação segundo as direções mostradas na Fig. 9. Os deslocamentos horizontal em  $x$  e vertical em  $z$  de um ponto de uma sapata ( $sp$ ) podem ser escritos respectivamente como:  $u_{sq}(x) = u_{spp}$ , e  $w_{sq}(x) = w_{spp} - (xq - x_{spp})\Phi_{spp}$ , onde  $u_{spp}$ ,  $w_{spp}$  e  $\Phi_{spp}$  são, na ordem, o deslocamento horizontal em  $x$ , vertical em  $z$  e rotação em  $y$  no nó  $spp$  (ligação da sapata  $sp$  com pilar  $p$ ). O vetor  $\{\bar{U}_{spp}\}$  é composto por esses elementos e  $x_{spp}$  é a coordenada do ponto da locação do pilar na sapata  $sp$ , no sistema de coordenadas do solo, que é mostrado na Fig. 8.



**Figura 8** - Estrutura da fundação submetida aos efeitos de translação e rotação, onde  $y=0$ .

Escrevendo  $\{\bar{U}_s\}$  para cada um dos nós discretizados do solo, temos:

$$\{\bar{U}_s\}^T = [\{\bar{U}_{s1}\}^T \quad \{\bar{U}_{s2}\}^T \quad \dots \quad \{\bar{U}_{sq}\}^T \quad \dots \quad \{\bar{U}_{snno}\}^T]^T \quad (45)$$

onde  $\{\bar{U}_{ssp}\}^T = [u_{spp} \quad w_{spp} \quad \varphi_{spp}]$ ,  $q$  representa o nó genérico e varia de 1 a  $nno$  (total de nós discretizados no solo). Escrevendo o vetor  $\{\hat{U}_s\}$  para cada sapata da fundação, temos:

$$\{\hat{U}_s\}^T = [\{\hat{U}_{s1}\}^T \quad \{\hat{U}_{s2}\}^T \quad \dots \quad \{\hat{U}_{ssp}\}^T \quad \dots \quad \{\hat{U}_{snsp}\}^T]^T \quad (46)$$

onde  $\{\hat{U}_{ssp}\}^T = [u_{spp} \quad w_{spp} \quad \varphi_{spp}]$ ,  $sp$  representa a sapata genérica e varia de 1 a  $nsp$  (total de sapatas da fundação). Assim:

$$\{\bar{U}_s\} = [D]\{\hat{U}_s\} \quad (47)$$

$$\text{onde } [D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [D_{sq}] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [D_{nsap}] \end{bmatrix}, \quad [D_{sp}] = \begin{bmatrix} [D_{1sp}] \\ [D_{2sp}] \\ \dots \\ [D_{qsp}] \\ \dots \\ [D_{nnossp}] \end{bmatrix} \text{ e } [D_{qsp}] =$$

$$[I] \quad [D_{Rsp}], \text{ com}$$

$$[D_{Rsp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_q - x_{spp} \end{bmatrix}$$

Notar que a dimensão da matriz  $[D]$  é  $(2nno \times 3nsp)$ , da matriz  $[D_{sp}]$  é  $(2nno \times 4)$ , da matriz  $[D_{qsp}]$  é  $(2 \times 4)$  enquanto a matriz  $[I]$  é de ordem 2.

Combinando a Eq. (44) com a Eq. (61), obtemos a representação algébrica do solo em termos das forças de superfície por unidade de comprimento:

$$\{P_s\} = [H]\{\hat{U}_s\} \quad (48)$$

onde  $[H]=[T][D]$  Para as forças nodais concentradas  $\{F_s\}$  que são obtidas do produto das matrizes  $[Q]$  e  $\{P_s\}$ , onde  $[Q]$  é a matriz de transformação quadrada de ordem  $2n_{nos}$ , temos:

$$\{F_s\} = [Q]\{P_s\} = [Q][H]\{\hat{U}_s\} = [R]\{\hat{U}_s\} \quad (49)$$

onde  $[R]=[Q][H]$ . Para o elemento de contorno linear, tem-se:

$$\{\bar{F}_{el}\} = [Q_{el}]\{\bar{P}_{el}\} \quad (50)$$

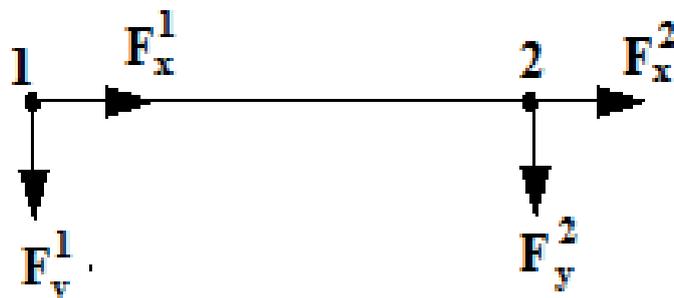
onde  $\{\bar{F}_{el}\}^T = \{\{\bar{F}_{el}^1\}^T \quad \{\bar{F}_{el}^2\}^T\}$  e  $\{\bar{P}_{el}\}^T = \{\{\bar{P}_{el}^1\}^T \quad \{\bar{P}_{el}^2\}^T\}$  sendo que cada vetor-elemento  $\{\bar{F}_{el}^i\}^T$  e  $\{\bar{P}_{el}^i\}$ , com  $i=1,2$ , representam as forças concentradas e as de superfície aplicadas em cada nó do elemento de contorno. Podemos fazer ainda  $\{\bar{F}_{el}^i\}^T = [\bar{F}_{xel}^i \quad \bar{F}_{yel}^i]^T$  e  $\{\bar{P}_{el}^i\} = [\bar{P}_{xel}^i \quad \bar{P}_{yel}^i]^T$ , onde os índices sobscritos se referem a direção da força. A matriz  $[Q_{el}]$  pode ser definida como:

$$[Q_{el}] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento de contorno. As forças que atuam no solo sob cada sapata produzem resultantes de forças e momentos individuais nos respectivos nós spp, sendo definidas por:

$$\{\bar{F}_s\} = [\hat{R}]\{\hat{U}_s\} \quad (52)$$

sendo  $[\hat{R}] = [C][R]$ .



**Figura 9** - Contribuição do elemento  $el$  no cálculo das forças e momentos resultantes no nó de ligação sapata pilar.

De forma explícita, a matriz  $[C]$  pode ser escrita como:

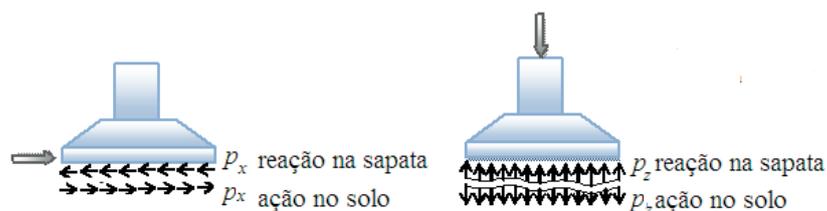
$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [C_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [C_{sp}] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [C_{nsap}] \end{bmatrix} \quad (53)$$

onde a submatriz da  $sp$ -ésima sapata é  $[C_{sp}] = [D_{sp}]^T$ . Assim é possível exibir as forças e momentos resultantes no nó de ligação da sapata com o pilar a partir da contribuição de cada elemento da sapata através da Eq. (54).

$$\begin{Bmatrix} F_{xsp} \\ F_{zsp} \\ M_{zsp} \end{Bmatrix} = \sum_{el}^{nel} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_q - x_{spp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xel}^1 \\ F_{zel}^1 \\ F_{xel}^2 \\ F_{zel}^2 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

Para que o problema final (montagem do sistema de equações, da interação solo-estrutura) fique bem definido, torna-se necessário fazer o acoplamento das contribuições definidas tanto por parte da estrutura quanto do solo. Dessa forma tem de haver uma compatibilização dos deslocamentos e deve ser garantido o equilíbrio de forças em cada nó da ligação sapata pilar ( $ssp$ ) com os deslocamentos e forças no nó  $k$  da estrutura ao qual está ligado o pilar na sapata  $sp$ .

Anteriormente foi calculado as forças resultantes no nó  $ssp$  de cada sapata devido as ações atuantes no solo. Assim tais forças devem ter seus sentidos invertidos para que se tenha as forças reativas do solo na sapata, pois dessa forma é garantido o equilíbrio de forças e momentos em cada apoio da estrutura, conforme Fig. 10.



**Figura 10** - Ação e reação do solo na sapata.

$$\{\hat{F}_{spp}\} = [\Delta_{sr}]\{\tilde{F}_{spp}\} \quad (55)$$

onde  $\{\hat{F}_{spp}\}$  é o vetor das resultantes de forças atuantes no solo, calculadas para o nó  $sp$  de cada sapata,  $\{\tilde{F}_{spp}\}$  é o vetor das forças oriundas do solo, que atuam na base do pilar que se liga à sapata, e  $[\Delta_{sr}] = -1[I]$ , com  $n = 3$ . Próximo passo é unificar os sistemas de coordenadas, uma vez que o SCG do solo e da estrutura são diferentes, eixo vertical do SCG da estrutura apontado para cima e do solo apontado para baixo, ao qual será feito da seguinte forma:

$$\{\tilde{F}_{spp}\} = [\Delta_{se}]\{F_{spp,est}\} \quad (56)$$

Somando a Eq. (55) com a Eq. (56) obtemos uma expressão para o cálculo direto do vetor  $\{F_{spp,est}\}$ :

$$\{\hat{F}_{spp}\} = [\Delta_{sr}][\Delta_{se}]\{F_{spp,est}\}$$

ou ainda

$$\{F_{spp,est}\} = -[\Delta_{se}]\{\hat{F}_{spp}\} \quad (57)$$

onde  $[\Delta_{se}]$  é a matriz de ordem 3x3 dada por:

$$[\Delta_{se}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Também se torna útil que reescrevamos os deslocamentos no nó de ligação sapata pilar da sapata  $sp$  para que possamos aplicar a compatibilidade de deslocamentos. A expressão é:

$$\{U_{spp,est}\} = [\Delta_{se}]\{U_{ssp}\} \quad (58)$$

Assim os vetores dos esforços e deslocamentos referidos ao SCG da estrutura, associados ao nó  $p$  e ao nó  $k$  correspondente, são:

$$\{U_{spp,est}\}^T = [u_{spp,est} \quad w_{spp,est} \quad \varphi_{spp,est}] \quad (59)$$

$$\{F_{spp,est}\}^T = [F_{xspp,est} \quad F_{zspp,est} \quad M_{zspp,est}] \quad (60)$$

$$\{U_k\}^T = [U_k \quad W_k \quad \varphi_k] \quad (61)$$

$$\{F_k\}^T = [F_{xk} \quad F_{zk} \quad M_{zk}] \quad (62)$$

As relações entre as forças reativas do solo e os deslocamentos na sapata podem ser obtidas a partir da Eq. (52), (57) e (58) resultando em:

$$\begin{aligned} \{P_{sp1,est}\} &= [R_{sp11}]\{U_{sp1,est}\} + [R_{sp12}]\{U_{sp2,est}\} \\ \{P_{sp2,est}\} &= [R_{sp21}]\{U_{sp1,est}\} + [R_{sp22}]\{U_{sp2,est}\} \end{aligned} \quad (63 \text{ a - b})$$

Então substituindo Eq. (63 a – b) na Eq. (26) e ainda com as equações de compatibilidade de deslocamento Eq. (24 a – d) e equilíbrio Eq. (25 a – d), obtém-se finalmente o sistema algébrico da interação solo-estrutura:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}^{(1)}] & [0] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{12}^{(1)}] & -[G_{11}^{(1)}] & [0] \\ [H_{21}^{(1)}] & [0] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{22}^{(1)}] & -[G_{21}^{(1)}] & [0] \\ [0] & [H_{32}^{(2)}] & [0] & [H_{33}^{(2)}] & -[G_{32}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{33}^{(2)}] \\ [0] & [0] & [H_{43}^{(3)}] & [H_{44}^{(3)}] & [0] & -[G_{43}^{(3)}] & -[G_{44}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [H_{22}^{(2)}] & [0] & [H_{23}^{(2)}] & -[G_{22}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{23}^{(2)}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [H_{33}^{(3)}] & [H_{34}^{(3)}] & [0] & -[G_{33}^{(3)}] & -[G_{34}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] \\ [R_{sp11}] & [R_{sp12}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [R_{sp21}] & [R_{sp22}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_3\} \\ \{U_4\} \\ \{P_6\} \\ \{P_7\} \\ \{P_8\} \\ \{P_9\} \\ \{P_5\} \\ \{P_{10}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{F_3\} \\ \{0\} \\ \{F_4\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

#### 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Considere um pórtico plano apoiado no solo conforme indicado na Fig. 11, onde as barras horizontais possuem comprimentos de 3,00 m e a vertical tem 4,00 m;  $E = 28$  GPa e  $G = 14$  GPa. O solo é considerado um meio contínuo semi-plano infinito, onde seu módulo de elasticidade é 2 MPa e o coeficiente de Poisson 0,5. Na estrutura está sendo aplicado um carregamento nodal de 10 N como indicado na Fig. 11.

Para os resultados obtidos,  $F$  e  $M$  representam as forças e momentos, respectivamente, os deslocamentos são representados por  $D$ , a rotação em torno de  $y$  é representada por  $\theta$ , os índices  $X$  e  $Y$  indicam os eixos do SCG, enquanto que  $x$  e  $y$  representam o SCL, e  $Nó_i$  e  $Nó_j$  correspondem ao nó inicial e final, respectivamente.

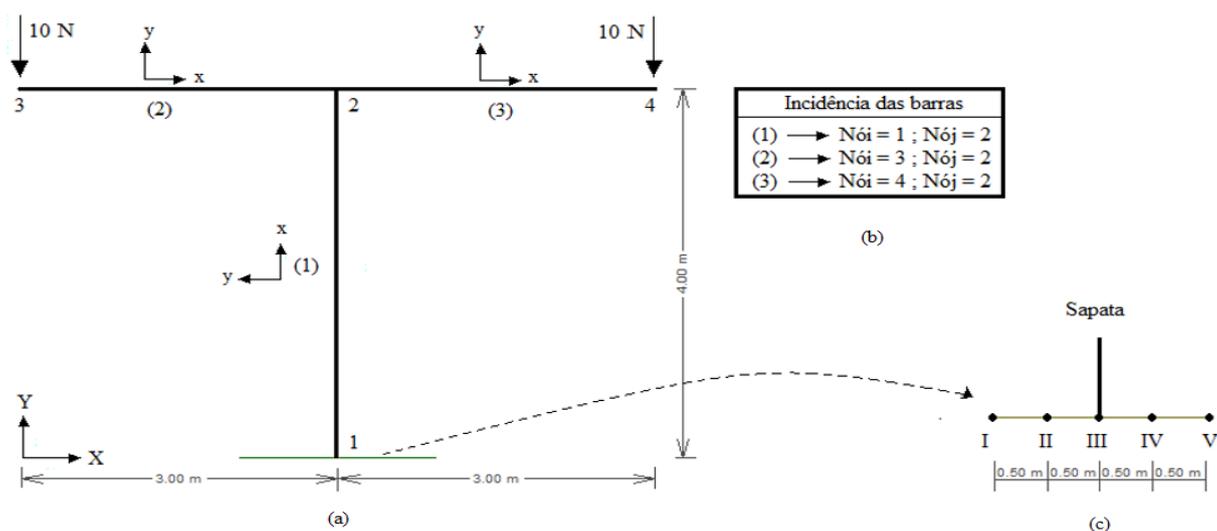


Figura 11 – (a) Discretização do Pórtico, (b) incidência de (a); (c) discretização da sapata

Na Tab. 1 estão mostrados os resultados obtidos no sistema local de coordenadas para os esforços atuantes na estrutura, onde a incidência de cada barra do pórtico, assim como o sentido dos eixos locais, é mostrada na Fig. 11 a-b. A discretização da sapata é mostrada na figura 11-c. Já na Tab. 2 são mostrados os deslocamentos no sistema local de coordenadas.

Barra	Fx (kN)		Fy (kN)		M (kN)	
	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>
1	20	-20	0	0	0	0
2	0	0	-10	10	0	-30
3	0	0	10	-10	30	0

Tabela 1. Esforços locais.

Barra	Dx (mm)		Dy (mm)		rad	
	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>
1	-4,7324E-5	-5,6848E-5	0	0	0	0
2	0	0	-1,4854E-3	-5,6848E-5	7,1428E-4	0
3	0	0	-5,6848E-5	-1,4854E-3	0	-7,1428E-4

Tabela 2 - Deslocamentos locais.

O exemplo proposto tem simetria tanto de geometria quanto de carregamento. Dessa forma é esperada respostas simétricas do ponto de vista de deslocamentos e esforços. Conforme pode ser observado nas Tab. 1 e 2 tais comportamentos foram representados pelos resultados. Além disso, a rotação nula nas extremidades das barras, que convergem para o nó 2, também foi verificada. Os equilíbrios tanto em momento quanto em forças foram recuperados pelo MEC.

## 5 | CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta uma análise da interação pórtico plano apoiado na superfície de um semi-plano modelado pelo Método dos Elementos de Contorno. Os resultados sugerem uma boa eficiência do método e confirma sua elegância de reduzir a dimensionalidade do problema em uma dimensão. Por exemplo, as barras do pórtico foram representadas por elementos de contorno pontuais e interface de contato da sapata com o solo (admitido como semi-plano) foi representada por elementos de contorno lineares discretizados apenas nas superfícies de contato com as sapatas.

Convém notar se essa análise fosse feita por elementos finitos o pórtico seria representado por elementos unidimensionais e o solo representado por elementos finitos planos. Nesse caso a discretização do solo (que é um semi-plano infinito) requereria um grande número de elementos para mapear todo o domínio desse espaço.

## REFERÊNCIAS

BARBIRATO, J.C.C. **Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin**. Dissertação, Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1991.

CRUZ, J. M. F. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno**. Tese, doutorado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.

LOVE, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. 1994.

MELAN, E. **Der spannungszustand der durch eine einzelkraft in innern beanspruchten halbscheibe**. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol 12, pp. 343–346, 1932.

TELLES, J. C. F., BREBBIA, C. A. **Boundary Element Solution for Half-Plane Problems**. International Journal of Solids and Structures, Vol 17, pp. 1149–115, 1981.