


COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA ARITMÉTICA EN ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA: UN ESTUDIO DE CASO

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.797112404114>

Data de aceite: 18/11/2024

Antonia Valenzuela-López

Universidad Católica del Maule
Talca, Chile
Facultad de Ciencias Básicas
<https://orcid.org/0009-0005-5602-7477>

María José Seckel

Universidad Católica de la Santísima
Concepción
Concepción, Chile
Facultad de Educación
<https://orcid.org/0000-0001-7960-746X>

Roxana Saavedra

Universidad Católica de la Santísima
Concepción
Concepción, Chile
Facultad de Educación
<https://orcid.org/0009-0000-7248-2414>

RESUMEN: El objetivo de este estudio es analizar la comprensión del concepto de media aritmética en un grupo de estudiantes chilenos de primaria y secundaria. Para esto se aplicó un cuestionario con preguntas abiertas a 41 alumnos de 13 y 16 años aproximadamente. El análisis de los datos siguió una metodología mixta, presentando un análisis cuantitativo descriptivo para caracterizar los elementos de significados

que propone el Enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) y un análisis cualitativo par reconocer lo tipos de errores presentes en las producciones del estudiantado. Los resultados evidencian que existe mayor comprensión del concepto de promedio en el grupo de estudiantes de 16 años y que la comprensión es de tipo algorítmico, sin considerar las propiedades estadísticas de este objeto matemático.

PALABRAS-CLAVE: Educación estadística, media aritmética, elementos de significado.

INTRODUCCIÓN

Varios de los países desarrollados han optado por adecuar sus currículos académicos (Batanero, 2000a), de manera tal, que puedan responder a la necesidad manifestada en la convivencia permanente con información a través de tablas, gráficos y datos estadísticos presentados de forma explícita o implícita en el diario vivir, lo que requiere de ciudadanos eficientes en la sociedad de la información (Pino y Estrella, 2012).

Una de las características que tiene la Estadística como objeto matemático que pretende ser enseñado, es su incuestionable naturaleza interdisciplinaria, permitiendo enlazar la matemática con otras áreas del saber, entre ellas, las ciencias naturales y ciencias sociales, ya que éstas le dan contexto y sentido a los valores con los que se trabaja (Pino y Estrella, 2012). En esta línea, diversos autores han manifestado el interés hacia la enseñanza de la Estadística dentro de la educación escolar, dado que ésta conlleva la formación de ciudadanos críticos, prepara a futuros profesionales (quienes necesitan de un dominio básico de la estadística), desarrolla un razonamiento objetivo para la toma de decisiones e inferencias y permite comprender otros temas del currículum (Cobo, 2003). De esta manera, se espera que la Educación Estadística vaya más allá de lo algorítmico, que se considere el contexto en que se generan los datos y se les otorgue un sentido real a éstos, es decir, focalizar la enseñanza en lo conceptual más que en lo operacional (Cobb y Moore, 1997; Pino y Estrella, 2012).

Dicho esto, el presente estudio busca ser un aporte en esta temática de estudio, centrando la mirada en las medidas de tendencia central, específicamente en el concepto de promedio, como medida imprescindible en el análisis exploratorio de datos y en los alcances interpretativos que este tiene en un sentido amplio, considerando que, a pesar de la simplicidad aparente de dicho concepto, varias investigaciones dan cuenta de las dificultades que presentan los alumnos, incluido futuros docentes, en su comprensión (Batanero, Godino y Navas, 1997). Lo anterior, permite señalar que el conocimiento de las reglas de cálculo y procedimiento para estas medidas, no implica necesariamente una comprensión del concepto, en otras palabras, la enseñanza basada meramente en lo algorítmico, conduce a errores conceptuales esperables en algunos problemas no tan sencillos (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 1994).

En Chile, la incorporación de la Estadística en el sistema escolar ha experimentado modificaciones en los últimos años, es así como el año 2009 se propone un ajuste en el currículum que incluía la incorporación de nuevas temáticas estadísticas en un eje llamado Datos y Azar. En el año 2012 se dan a conocer las Bases Curriculares que continúan en esta línea de dar más énfasis a la enseñanza de la Estadística, lo que obedece a una tendencia mundial que reconoce la importancia del aprendizaje de la Estadística en la sociedad actual.

El concepto de media aritmética o promedio está presente dentro del currículum chileno actual desde la etapa básica, desarrollando tempranamente conceptos básicos en el área de la estadística junto con el azar. Posteriormente, todos estos conceptos y aprendizajes actúan como conocimientos previos dentro de este eje. En particular, el concepto de media aritmética se presenta como objetivo de aprendizaje en quinto año básico, para luego ser retomado en séptimo año y, desde ahí, continuar como sustento para nuevos contenidos y aprendizajes, como es el caso de las medidas de posición en octavo básico, o el trabajo con diferentes representaciones y conceptos estadísticos en cursos superiores que se necesitan como base para la comprensión de nuevos conocimientos.

De esta manera, la selección de los niveles estudiados se fundamenta por un lado, en que en un primer momento el concepto de promedio aparece en el nivel de quinto básico (10 años) y luego el nivel de séptimo básico (12 años) está presente el contenido de Medidas de Tendencia Central y, posteriormente, este es un aprendizaje base para los próximos contenidos en niveles posteriores, es por eso la pertinencia de estudiar la comprensión del concepto de promedio en octavo básico (13 años) cuando ya han pasado por este contenido curricular. Por otro lado, la relevancia de estudiar un tercer medio (16 años) es el evidenciar si el concepto en estudio adquiere mayor significado luego de tres años de escolaridad.

Bajo este contexto, el propósito del estudio es analizar la comprensión del concepto de media aritmética en dos grupos de estudiantes chilenos, de primaria y secundaria respectivamente.

MARCO TEÓRICO

Para poder reflexionar sobre la dificultad en el aprendizaje de cierto objeto matemático es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico de su significado. Es por esto, que a continuación se explicará de donde emerge progresivamente el concepto denominado “media” o “promedio”.

En su origen el concepto de promedio fue la respuesta a un problema en donde se quiere medir una cantidad desconocida de una cierta magnitud, pero debido a la imperfección de los instrumentos, se obtienen resultados distintos al realizar diferentes mediciones, de aquí surge la expresión que comúnmente entendemos por: sumar un conjunto de valores y dividir por la cantidad de valores sumados. Posteriormente, el estudio y caracterización de este objeto matemático llevó a utilizarlo en otras situaciones problemáticas como el siguiente enunciado: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva, ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa? Para este caso, donde es necesario encontrar una cantidad equitativa a repartir para obtener una distribución uniforme, se usa la media aritmética (Batanero, 2000b). Otra situación en la que se utiliza la media aritmética, es utilizarla como elemento representativo de un conjunto de datos, cuya distribución es aproximadamente simétrica. Si no fuera simétrica, son otros valores lo que se utilizarían como representativos de la distribución, como la Moda o Mediana ya que estos podrían ser más representativos que la media (Batanero, 2000b).

Por otra parte, una problemática diferente es conocer el valor que se obtendrá con mayor certeza al escoger un elemento al azar de una población, por ejemplo, al predecir la esperanza de vida de una persona, donde a partir de la media poblacional se infiere un valor estimado (Batanero, 2000b). Es así, como estos diferentes problemas, han llevado a la definición del concepto de promedio, a identificar sus propiedades, a definir las otras medidas de tendencia central (Mediana y Moda), donde, además, se ha debido demostrar la validez de sus propiedades para aceptarlas como parte del conocimiento matemático (Batanero, 2000b).

Ahora bien, centrando la atención en los procesos de enseñanza, se observa que pese a que los conceptos estadísticos han surgido fuera del ámbito de la Matemática y, por ende, desde sus orígenes ha sido una ciencia interdisciplinar que ha alcanzado sus mayores progresos en la necesidad de resolver problemas en campos diversos, en los procesos de enseñanza de estos conceptos se ha dejado atrás sus aplicaciones originales, siendo estas las que les da un significado global a los mismos (Batanero et al., 1994). Es por esto que, dentro del estudio del concepto de media aritmética es fundamental la incorporación del contexto de la tarea a realizar. Esto porque el contexto motiva procedimientos y es quién le otorga significado a los valores obtenidos y, de este modo, se convierte en el sustento en la interpretación de los resultados (Garrett y García, 2008). En esta línea, varios autores reafirman esta idea (Strauss y Bichler, 1988; Leon y Zawojewski, 1991; Mokros y Rusell, 1995), Gal (1995), señala que es difícil juzgar lo que los estudiantes conocen sobre promedio si no se les ha proporcionado un contexto y Garfield (2003), defiende que en estadística los datos son vistos como números en un contexto.

A continuación, se llevará a cabo una revisión de las principales investigaciones realizadas sobre la comprensión del promedio, que indican lo complejo de este concepto a pesar de su carácter elemental (Garrett y García, 2008). Estas son:

Mokros y Rusell (1995) identificaron y analizaron cinco construcciones básicas sobre representatividad en los alumnos: la media como moda, la media como algoritmo, la media como algo razonable, la media como punto medio y la media como punto matemático de equilibrio.

Cai (1995), sugirió que el concepto de media aritmética no solo es muy complejo respecto del algoritmo de cálculo, sino que también debería ser impartido más allá del propio algoritmo.

Batanero, Godino y Navas (1997), realizaron un trabajo en el que se identificaron errores conceptuales y dificultades de aplicación práctica de los conocimientos sobre promedios. Las dificultades se relacionaban con el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de los promedios, posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones.

Cobo y Batanero (2004), presentan un estudio que continúa las investigaciones sobre las dificultades que los alumnos tienen con las medidas de tendencia central, indicando que a pesar de existir una buena comprensión de la media, algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia.

Molero (2017), realizó un estudio para evaluar la comprensión del concepto de promedio a través de un cuestionario con preguntas abiertas, lo que permitió identificar los objetos mejor y peor comprendidos por los estudiantes, así como clasificar algunos conflictos semióticos detectados en sus respuestas.

Las investigaciones señaladas, asocian las dificultades de comprensión de dicho objeto matemático a causas que tienen relación tanto con aspectos conceptuales y procedimentales, por lo tanto, es esta la orientación para avanzar en el desarrollo del aprendizaje de este concepto (Garrett y García, 2008). Asimismo, una posible causa a las dificultades asociadas a este concepto matemático, de inapreciada complejidad, es la temprana introducción de su algoritmo antes de comprender el concepto de representatividad (Mokros y Russell, 1995).

Para esta investigación se aplicó una estructura de análisis que se fundamenta en el EOS (Godino, 2002), lo que permite realizar un análisis epistémico y cognitivo, lo que se define como:

Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Idoneidad cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados (Godino, 2011, p.116).

Dichas herramientas teóricas fueron analizadas y focalizadas en Medidas de Tendencia Central por Cobo (2003), quien diseñó un cuestionario a partir de propuestas anteriores (Watson y Moritz, 1999; Watson y Moritz, 2000; Tormo, 1993; Cai, 1995; Carvalho y César, 1998; Reading y Pegg, 1996; Zawojewski, 1986; Eisenbach, 1994; Gattuso y Mary, 1996; Cobo, 1998, entre otros). Por esta razón, se valora dicho instrumento como una herramienta que permite alcanzar el objetivo propuesto en el presente estudio dado al carácter global que adquiere al articular y recoger las fortalezas de cada una.

Dicho esto, se destaca la estructura de análisis que plantea Cobo (2003) para el concepto de promedio, identificando una clasificación de elementos de significado. Estos elementos de significado corresponden a distintas entidades que se hacen presentes en el trabajo matemático, como lo son: enunciados de problemas, ejercicios; notaciones, símbolos, texto ordinario; operaciones, algoritmos; definiciones de conceptos, enunciados de proposiciones; demostraciones, comprobaciones.

METODOLOGÍA

La investigación se sitúa en el paradigma de investigación interpretativo, ya que busca analizar la comprensión del concepto de media aritmética. Para alcanzar los propósitos del estudio se llevó a cabo una complementariedad de enfoques metodológicos, es decir, los datos se analizaron cuantitativa y cualitativamente.

Los datos se recolectaron a través de un cuestionario con preguntas abiertas validado por Cobo (2003), utilizando aquellos ítems que permiten analizar el significado personal que los estudiantes le asignan al concepto de media aritmética, con especial énfasis en los elementos de significado y se realizó una adaptación al contexto de los participantes, teniendo en cuenta los aspectos indicados por Brent (citado en Cobo, 2003, p.136):

Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta sea razonable para el sujeto y pueda darla, evitar hipótesis implícitas, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos (citado en Cobo, 2003, p.136).

Dicho cuestionario se aplicó a 41 escolares de un colegio particular que evidencia buen rendimiento en pruebas estandarizadas a nivel nacional.

Para el análisis de los datos, en primer lugar, se efectuó un análisis cuantitativo donde se categorizaron las respuestas como correctas, incorrectas y omitidas, para luego analizar su índice de dificultad (Muñiz, 1994). También se estudió la puntuación en cada ítem, para cada alumno y curso, para luego realizar algunas comparaciones. Posteriormente, se llevó a cabo un análisis cuantitativo descriptivo en cada ítem centrado en los elementos de significado que los participantes evidencian en sus respuestas. Esto, con el propósito de responder al objetivo específico de describir los conocimientos estadísticos que tiene el estudiantado de primaria y secundaria sobre la comprensión del concepto de media aritmética. Para ello se observaron aquellos elementos de significado con mayor presencia o ausencia, es decir, identificando las tendencias en sus respuestas. En este análisis no importó si las respuestas estaban correctas o incorrectas sino que se buscó evaluar cuáles elementos de significado han sido utilizados, incluso si es que el estudiante no llegó a la solución del problema planteado. Posteriormente, se tabuló esta información para resumir esta información en cada ítem y nivel para, finalmente, realizar interpretaciones de los resultados obtenidos.

En el análisis cualitativo se reconocieron los errores comunes que emergen de las respuestas. Dicho proceso consistió en lo que Massot, Dorio y Sabariego (2016) denominan categorías de contenido, que consiste en la reducción de la información a partir de un proceso de selección, focalización y abstracción, donde se buscan temas comunes en un conjunto de narraciones o datos. En concreto, se seleccionaron (de las respuestas incorrectas) los errores que fueron comunes en las respuestas otorgadas en cada ítem y nivel, para luego levantar categorías de tipo inductivo, es decir, que no provienen del marco teórico si no que se levantaron a partir de las características en común observadas en las producciones de los estudiantes. Ya conformadas estas categorías, se registraron las frecuencias con las que se presentan estos tipos de errores

RESULTADOS

En primer lugar, se realizó una categorización de las respuestas considerando las correctas, incorrectas y omitidas. En relación a esto, por un lado, en octavo básico hubo un 28% de respuestas omitidas, 19% de respuestas correctas y un 53% de respuestas incorrectas, por otro lado, en tercero medio hubo un 3% de respuestas omitidas, 58% de respuestas correctas y un 39% de respuestas incorrectas. Como se puede observar, en octavo básico hubo mayor omisión de las respuestas, en tercero medio hubo casi el triple de respuestas correctas versus octavo básico, y la cantidad de respuestas incorrectas fue mayor en octavo básico. Con esto podemos concluir que la diferencia de niveles y el uso continuo del concepto de promedio (visto en quinto básico, posteriormente en séptimo básico, y luego como aprendizaje previo en los cursos siguientes) durante este período, permite mayor conocimiento, lo que se refleja en menor omisión de preguntas y mayor cantidad de preguntas correctas.

Siguiendo con la presentación de los resultados generales, en la tabla 1 se muestran los índices de dificultad (ID) para cada ítem en octavo básico y tercero medio:

Ítem	1.a	1.b	2	3	4.a	4.b	4.c	5.a	5.b	6.a	6.b	6.c	7	8
ID 8vo	10%	25%	24%	26%	56%	50%	0%	5%	0%	71%	17%	25%	50%	13%
ID 3ro	30%	68%	74%	70%	95%	89%	50%	5%	0%	95%	63%	75%	79%	37%

Tabla 1. Índices de Dificultad por ítem en los participantes de octavo básico y *tercero medio*

Fuente: elaboración propia

De la tabla anterior, podemos observar que los enunciados que resultaron más simples para el nivel de octavo básico fueron los ítems: 4.a y 6.a. Por el contrario, aquellos que resultaron con mayor dificultad fueron los ítems: 4.c y 5.b. De manera similar, podemos observar que los enunciados que resultaron más simples para el nivel de tercero medio fueron los ítems: 4.a y 6.a. Por el contrario, aquellos que resultaron con mayor dificultad fueron los ítems: 5.a y 5.b.

A continuación, se presentarán los resultados de algunos de los ítems del cuestionario. Esta selección evidencia, por un lado, aquellos que tuvieron relación con el índice de dificultad y, por otro lado, aquellos que presentaron mayor cantidad de errores.

Resultados del Ítem 6.a

Ítem 6
Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

a. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ Juan _____ Pablo _____

b. ¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados

c. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Figura 1: problema planteado en el ítem 6.a. Fuente: Cobo, 2003.

- Elementos de significado y tipos de errores en ítems 6.a – octavo básico:

Los elementos de significado presentes evidencian que todas las respuestas hacen relación con el campo de problema PM4, ya que al dar la media y tener que buscar una distribución para ella, se tiene presente el concepto de ser el representante de un conjunto de valores para distribuciones simétricas. Por ejemplo, algunas de las distribuciones entregadas por los estudiantes fueron: “11 – 11 – 11” y “10 – 11 – 12”. Asimismo, en todas las respuestas entregadas está presente el algoritmo AM7 que tiene relación con construir una distribución para una media dada que era justamente lo que se buscaba en este enunciado, por lo que se puede desprender que todos los que dieron respuesta entendían lo que se pedía en el enunciado, sin embargo, no todos logran tener su respuesta correcta dado que no utilizaron bien la definición DM2 que dice que la media es el promedio aritmético de un conjunto de datos, dado que algunos al formar esta distribución presentaron errores.

En relación a los tipos de errores en el ítem 6.a en el nivel de octavo básico, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 48% de respuestas correctas, 33% de respuestas omitidas, y dos tipos de errores: un 9% dividen el promedio en tres, y un 10% dan otros valores, un ejemplo de este último error es:

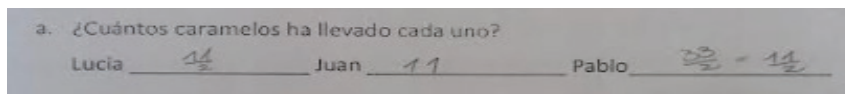
¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía 9 Juan 11 Pablo 10

- Elementos de significado y tipos de errores en ítems 6.a – tercero medio:

En cuanto a los elementos de significado presentes en este nivel, vemos que las respuestas hacen relación con el campo de problema PM4 (95%) que trata de conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad a tomar un elemento al azar de una población. Asimismo, en todas las respuestas está presente el procedimiento AM7 (95%) que consiste en construir una distribución para una media dada. Dentro de las respuestas entregadas las más comunes fueron las siguientes distribuciones “10-11-12” y “11-11-11”.

En relación a los tipos de errores en el ítem 6.a en el nivel de tercero medio, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 90% de respuestas correctas, 5% de respuestas omitidas, y un 5% en el error categorizado como uno de los valores esta incorrecto, un ejemplo de este es:



Resultados Ítem 5.b

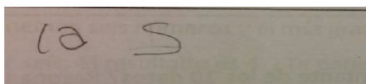
Ítem 5
 Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo:
 I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente.
 En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:
 Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
 Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N
 a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
 b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Figura 2: problema planteado en el ítem 5.b. Fuente: Cobo, 2003.

- Elementos de significado y tipos de errores ítems 5.b – octavo básico:

De acuerdo con los elementos de significado presentes, vemos una baja en la presencia de la propiedad A7 con un 33%. Esto porque algunas respuestas intentan transformar la variable cualitativa a una variable cuantitativa para sacar promedio, y en ese sentido, está la noción de que la media se puede obtener a partir de variables cuantitativas.

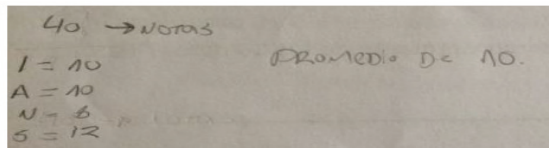
En relación a los tipos de errores en el ítem 5.b en el nivel de octavo básico, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 33% de respuestas omitidas, y tres tipos de errores: un 10% confunden con calcular la moda, un 19% utilizan las frecuencias para calcular el promedio y un 38% señala una respuesta incorrecta sin argumentación, un ejemplo de este último error es:



- Elementos de significado y tipos de errores ítems 5.b – tercero medio:

De acuerdo con los elementos de significado presentes, vemos que la propiedad algebraica A7, que considera datos cuantitativos para el cálculo de la media aparece en un 50% de las respuestas, esto porque varios participantes proponen transformar la variable cualitativa a cuantitativa definiendo valores para cada dato de la variable y así poder sacar promedio. Sin embargo, dentro de las respuestas se plantean diferentes procedimientos, pero solo uno de ellos hace el alcance de no poder calcular promedio con este tipo de datos, esta es la respuesta señalada por el participante A3.18 quien responde: “No sabría cómo llegar a sacar un promedio con estos datos, lo único que podría sacar es que de los 23 alumnos 18 el profesor les calificaría con A o mayor que A”.

En relación a los tipos de errores en el ítem 5.b en el nivel de tercero medio, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 10% de respuestas correctas, 10% de respuestas omitidas, y cuatro tipos de errores: un 10% Asignan valor numérico a una variable cualitativa para calcular promedio, un 20% no se explicita el procedimiento, 20% dan una alternativa diferente y un 30% utilizan valores de frecuencia absoluta o relativa, un ejemplo de este último error es:



Resultados Ítem 1.a

Ítem 1

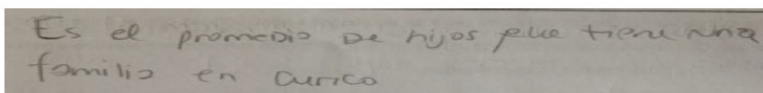
- Un periódico dice que el promedio de hijos por familia en Curicó es 1,2 hijos por familia. Explicanos qué significa para ti esta frase.
- Se han elegido 10 familias curicanas y el promedio de hijos entre las 10 familias es 1,2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿Cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1,2? Justifica tu respuesta.

Figura 3: problema planteado en el ítem 1.a. Fuente: Cobo, 2003

- Elementos de significado y tipos de errores ítems 1.a – octavo básico:

En cuanto a los elementos de significados, podemos ver que referido a los campos de problemas un 48% hace alusión a obtener una cantidad equitativa al realizar un reparto, haciendo hincapié en el algoritmo del cálculo de promedio DM2. También podemos ver que el 81% considera que como estamos hablando de números de hijos, y que su promedio es 1,2 entonces significa que es entre 1 y 2, o sea, se adecua el promedio al contexto de promedio. Por ejemplo, A8.12 señala: “Que una familia en promedio tiene 1 o 2 hijos”.

En relación a los tipos de errores en el ítem 1.a en el nivel de octavo básico, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 9% de respuestas correctas, 5% de respuestas omitidas, y cuatro tipos de errores: un 10% el promedio como valor exacto, un 14% extraen otro tipo de conclusiones, un 14% confunden el concepto de moda con el de promedio, y un 48% no aportan mayor información a la entregada, un ejemplo de este último error es:

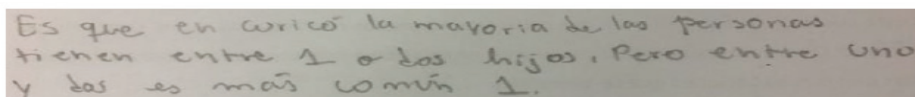


Es el promedio de hijos que tiene una familia en curico

- Elementos de significado y tipos de errores ítems 1.a – tercero medio:

En cuanto a los elementos de significados, vemos que todas las respuestas apuntan a un campo de problema. Por un lado, el campo de problema PM2 con un 55%, donde presentamos la respuesta del participante A3.2 quien señala: “Sumando los datos y dividiendo por la cantidad dio 1,2. No quiere decir que tengan 1,2 hijos porque eso es imposible”, de donde podemos desprender además la idea del algoritmo de cálculo de la media, y la propiedad A1 que hace referencia a que el cálculo del promedio no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado. Por otro lado, se hace presente con un 45% el campo de problema PM4, donde presentamos la respuesta del participante A3.4 quien señala: “La mayoría tiene 1 hijo, sin embargo, hay familias que tienen más o no tienen. Pero, por ejemplo, en 10 familias debería haber 12 hijos”, de aquí vemos que, si bien puede confundirse el concepto de promedio con el de moda, existe la idea de que valor se obtendrá con mayor probabilidad que si tienen relación con la idea de promedio. Además, está presente en esta respuesta también la propiedad AM6 al invertir el algoritmo de cálculo de la media como lo podemos ver al final de la respuesta. Cabe destacar, la alta presencia de la propiedad N2 con un 85% que señala que la media no tiene por qué coincidir con los valores de la variable como en este caso. Asimismo, en un 70% de las respuestas está presente la propiedad E1 que señala que la media es un representante de un colectivo como una definición general presente en las respuestas entregadas.

En relación a los tipos de errores en el ítem 1.a en el nivel de tercero medio, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 30% de respuestas correctas, y tres tipos de errores: un 10% el promedio como valor exacto, un 10% no aportan mayor información a la entregada y un 50% confunden el concepto de moda con el de promedio, un ejemplo de este último error es:



Es que en curico la mayoría de las personas tienen entre 1 o dos hijos, pero entre uno y dos es más común 1.

Resultados Ítem 4.c

Ítem 4

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

- ¿Cuál es el peso del niño mediano?
- ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
- En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos?
Razona la respuesta.

Figura 4: problema planteado en el ítem 4.c. Fuente: Cobo, 2003

- Elementos de significado y tipos de errores ítems 4.c – octavo básico:

En relación a los elementos de significados presentes, vemos presentes propiedades esenciales para el uso del promedio, pero que en este caso no fueron bien utilizadas o gestionadas. Entre ellas, vemos presente en un 10% de los casos la propiedad que dice que en el cálculo de la media se tienen presente todos los valores, pero no así en la mediana y en la moda. Por ejemplo, el sujeto A8.19 señala: “Si, porque la operación se haría con todos los números”, sin embargo, esta no es una justificación necesaria para escoger entre la mediana y la media.

Por otro lado, entre las propiedades estadísticas presentes que corresponden a E1 con un 24%, E3 con un 10% y E4 con un 14%, vemos que, si bien está instaurado tanto el concepto de promedio como de mediana, no se logra hacer una diferencia conceptual entre una y otra. Por ejemplo, el sujeto A8.4 señala que: “Promedio 23,3. Yo creo que sí, pero siento que sería mejor el promedio sin el niño que pesa 43kg ya que era algo más central, en cambio 23,2 es muy pasado hacia arriba, se aleja mucho del número más pequeño”. En esta respuesta, vemos un análisis de los datos, y la idea de observar como distribuyen los datos para obtener una decisión, sin embargo, faltan argumentos y conocimientos, para llegar a una respuesta correcta.

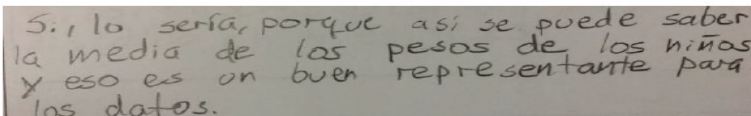
En relación a los tipos de errores en el ítem 4.c en el nivel de octavo básico, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 29% de respuestas omitidas, y un tipo de error, 71% no establece relación entre el concepto de mediana y promedio, un ejemplo de este es:

No porque la promedio nunca nos ayuda

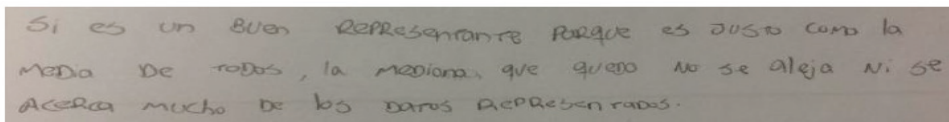
- Elementos de significado y tipos de errores ítems 4.c – tercero medio:

En relación a los elementos de significados presentes, vemos con un 90% la presencia de la propiedad estadística E1 que hace referencia a que la media es el representante de un colectivo, ya que en esta propiedad se fundamenta el enunciado. Así también está presente con un 45% la propiedad E4 que señala que la media es un estadístico poco resistente a valores extremos. En este caso presentaremos dos respuestas que clarifican muy bien las propiedades presentes, por ejemplo, el participante A3.6 señala que: “No, ya que el dato de los 43kg lo alteraría bastante ya que tiene mucha diferencia con el dato más pequeño (15kg) o sea, que la brecha entre el dato mayor y el menor es muy grande por lo tanto no sería representativo sacar el promedio”. Asimismo, el sujeto A3.18 justifica su respuesta de la siguiente manera: “No ya que el de 43kg hace que aumente de sobremanera el promedio por lo que no sería un promedio “real” viendo los datos”.

En relación a los tipos de errores en el ítem 4.c en el nivel de tercero medio, vemos que las respuestas se distribuyen de la siguiente forma, un 50% de respuestas correctas, y tres tipos de errores: un 10% responden, pero no justifican su respuesta, un 20% la media como un dato general e importante, y un 20% comparan con media y mediana, un ejemplo de estos dos últimos errores respectivamente es:



Si, lo sería, porque así se puede saber la media de los pesos de los niños y eso es un buen representante para los datos.



Si es un buen representante porque es justo como la media de todos, la mediana que quedo no se aleja ni se acerca mucho de los datos desordenados.

CONSIDERACIONES Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Respecto al análisis realizado se puede concluir que:

En cuanto a los *campos de problemas*, en ambos niveles el que apareció en mayor cantidad de ítems fue el que señala que sirve para conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar dentro de una población (PM4), esto permite interpretar que el promedio se entiende como un valor cercano al valor del promedio muestral, sin considerar las características de la población. Además, es importante señalar que el campo de problema que se relaciona con obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados, cuya distribución es aproximadamente simétrica (PM3), apareció en un ítem en octavo básico y no estuvo presente en tercero medio, por lo que podemos deducir que se desconoce esta aplicación del concepto de promedio.

En relación a *lenguaje y representaciones* utilizadas cabe señalar que están siempre correctos, dado que son el medio que se utiliza para entregar la respuesta, sin embargo, es importante mencionar que las formas utilizadas fueron expresiones verbales (LR1) y notaciones, símbolos y números (LR2).

Pasando a los *algoritmos y procedimientos* presentes en las respuestas entregadas, vemos que en ambos niveles las que tuvieron mayor presencia fueron: variable discreta con datos aislados (AM1), inversión del algoritmo de cálculo de la media (AM6) y construir una distribución para una media dada (AM7). Esto lleva a concluir que existe un énfasis en lo que es el algoritmo propio del cálculo de promedio, esto es, sumar datos y dividir por el total de datos, y viceversa, generar datos que al efectuar este procedimiento resulte un valor dado.

En cuanto a las definiciones, tanto en octavo básico como en tercero medio, la definición del concepto de promedio presente en las respuestas otorgadas es la de la media como promedio aritmético de un conjunto de datos (DM2) que siguiendo con la idea anterior refuerza la conclusión de que en ambos niveles existe una fuerte tendencia a ver el promedio solo como un algoritmo. En este caso la definición de promedio que tienen relación con la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable multiplicado por su frecuencia (DM2) no aparece en las respuestas otorgadas.

Luego, en cuanto a las *propiedades numéricas* vemos que, en los dos cursos, las cuatro propiedades numéricas se hacen presente en uno u otro ítem, por lo que existen nociones en cuanto a que la media: es un valor dentro del rango de la variable (N1), no tiene por qué coincidir con los valores de los datos (N2), para calcularla se tienen en cuenta todos los datos (N3) y su valor cambia si cambia cualquier dato (N4). Esto es muy importante, ya que se puede concluir que existe una noción sobre el concepto de promedio que si bien sigue estando dentro del ámbito de lo algorítmico da pie a un análisis mayor de las posibilidades y restricciones que implica ese algoritmo.

Respecto a las *propiedades algebraicas*, son tres las que estuvieron presentes en las respuestas otorgadas por los participantes, estas son: no es una operación interna (A1), al considerarla como operación algebraica no tiene elemento neutro ni simétrico (A2) y que la media siempre existe en datos numéricos (A7). De estas tres, cabe destacar la importancia que tiene la incorporación del cero, por ejemplo, en el cálculo del promedio, así como que el promedio solo existe en variables cuantitativas, dos ideas fundamentales en cuanto a la noción de promedio y que si bien están presentes en las respuestas otorgadas esto no implica que su uso este correcto, por lo que es necesario revisarlas de manera correcta para que se logre comprender el objeto matemático en estudio.

Respecto a las *propiedades estadísticas*, la que obtuvo mayor presencia fue la que señala que la media es un representante de un colectivo (E1). Esto, como idea central, es muy importante que esté presente, ya que corresponde a uno de sus principales usos y características. Sin embargo, existen otras propiedades estadísticas que son importantes, pero estuvieron ausentes en las respuestas de los participantes sobre todo las que tienen

relación con preferir la mediana a la media dado ciertas condiciones (E7 y E9). De esto podemos concluir que falta relacionar las características que tiene la distribución de los datos con la elección del estadístico a utilizar, esto es, que dado el comportamiento de los datos no siempre el promedio será el mejor representante, algunas veces lo será la moda, así como también la mediana.

Finalmente, en cuanto a los *argumentos* utilizados vemos que las formas de argumentar las respuestas entregadas fueron principalmente a través de la comprobación de casos particulares y contraejemplos (AR1) y razonamientos deductivos basados en propiedades previas (AR4), lo cual en ambos casos es esperable dentro de lo solicitado.

Respecto a *los tipos de errores identificados* podemos concluir que los principales errores son los siguientes: 1) Los participantes de ambos niveles presentan dificultad para definir lo que es un promedio al contextualizarlo en una situación real (ítem 1), 2) Los participantes de octavo básico no logran diferenciar y aplicar las propiedades que tiene la media versus la mediana (ítem 4) y 3) Los participantes ambos niveles tienden a utilizar propiedades del promedio para una variable cualitativa tratando de forzar su cálculo (ítem 5).

En general, se puede destacar que en este estudio se reconoce la presencia de la mirada algorítmica del concepto de promedio sin ir más allá en sus propiedades y significado quedándose solo en los procedimientos utilizados para su cálculo y algunas ideas que se pueden desprender de este algoritmo, existiendo así una debilidad en el conocimiento del concepto de promedio a cabalidad (idea similar a Cobb y Moore, 1997 y Pino y Estrella, 2012). Por otro lado, la necesidad de observar el comportamiento de la distribución de los datos al calcular el promedio está ausente, ya que en general no se relaciona con el contexto de los datos para darle un real sentido al valor promedio (idea similar a Russell y Mokros, 1991 y Gal, 1995). Esto es finalmente una idea fundamental, ya que como plantea Holmes (1980) y Pino y Estrella (2012), existe una necesidad en el mundo actual de tener ciudadanos estadísticamente cultos y que la Educación Estadística debe apuntar a aquello. Sin embargo, si continuamos manteniendo una enseñanza basada meramente en lo algorítmico se deja de lado muchos de los alcances que tienen las medidas de tendencia central, en especial, la más común y la que fue centro de esta investigación, la media o promedio.

Por otro lado, tal como ha señalado, esta investigación utilizó el instrumento Cobo (2003), por lo que interesa mencionar las similitudes en las conclusiones de ambas investigaciones. En primer lugar, un punto en común es manifestar la complejidad del significado personal y comprensión por parte de los participantes en cuanto a las medidas de posición central. Ahora bien, una de las conclusiones más importantes que podemos desprender de ambos estudios es que no podemos pretender que enseñando a calcular promedios, los alumnos puedan por si mismos deducir y comprender sus propiedades o puedan utilizar el concepto de promedio en distintas situaciones con diferentes dificultades (Cobo, 2003). Así también, ambas investigaciones concuerdan en que hay que analizar en qué momento del currículo es pertinente ubicar este contenido y con qué nivel de profundidad se enseñará en cada etapa para lograr abarcar su gran complejidad (Cobo, 2003).

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000a) ¿Hacia dónde va la Educación Estadística? *Blaix*, 15, 2-13.

Batanero C. (2000b), Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 2000, 25, 41 – 58.

Batanero C., Godino J., Green D., Holmes P. y Vallecillos A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.

Batanero C., Godino J., Navas F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa (Pp. 310-304). Granada: Universidad De Granada.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the psychology of Mathematics Education* (V.3, Pp.144-151). Universidad de Pernambuco.

Carvalho, C. y César, M. (1998). Peer interaction in an unusual statistical task.

Cobb, G. y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104(9), 801–823.

Cobo, B. (1998). Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Cobo B. (2003), Significados de las Medidas de Posición Central para los Estudiantes de Secundaria, Tesis Doctoral, Directora Dra. Carmen Batanero Bernabeu, Granada 2003.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*, 45, 79-86.

Eisenbach, R. (1994). Whats does the mean mean? Comunicación presentada en el Fourth International Conference on Teaching Statistics. Marrakesh, Marruecos.

Gal, I. (1995). Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of the Average. *Teaching Statistical*, 17 (3), 97-99.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

Garfield, J. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Education Research Journal* 2 (1), 22-38.

Garret A., García J. (2008). Caracterización de la comprensión de algunos aspectos de la media aritmética: Un estudio con alumnos de secundaria y universitarios. *Enseñanza de la Matemática*, 17(1), 31-57.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22, 2 - 3.

- Godino, J. (2011) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11, 111-132.
- Leon, M. y Zawojewski, J. (1991). Use of the arithmetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary results. En D. Vere- Jones (Ed.), Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 302-306). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.
- Massot, I., Dorio, I. y Sabariego, M. (2016). Estrategias de recogida y análisis de la información. En R. Bisquerra (Ed.). Metodología de la Investigación Educativa (pp. 321-357). Madrid, España: La Muralla.
- Mokros, J. y Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (1), 20-39.
- Muñiz, J. (1994). Teoría clásica de los tests. Madrid, España: Pirámide.
- Pino G., Estrella S. (2012). Educación Estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana, 49(1), 53-64.
- Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education(v.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.
- Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. Journal for Research in Mathematics Education, 19 (1), 64-80.
- Tormo, C. (1993). Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. Focus on Learning Problems in Mathematics. 21(4), 15-39.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. Mathematical Thinking and Learning, 2 (1-2), 11-50.
- Zawojewski, J. (1986). The teaching and learning processes of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures of central tendency. Tesis Doctoral. University Northwestern. Evanston, Illinois.