v. 4, n. 27, 2024

Journal of
Engineering
Research

Acceptance date: 07/11/2024

UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ A TRAVÉS DE SU ENERGÍA

Yolanda Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima-Perú
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

Victor Papuico Bernardo
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Lima-Perú
https://orcid.org/0000-0002-8835-7922

Resumen: En este artículo, probamos la unicidad de solución de la ecuación de Boussinesq homogénea y no homogénea en espacios de Sobolev periódico. Lo hacemos de un modo diferente a [3], en este caso realizamos cálculo diferencial en H^s_{per} y usamos propiedades de la derivada distribucional periódica, sin usar la cara de la solución. Mediante esta prueba evidenciamos la propiedad conservativa de la energía asociada al problema homogéneo.
Palabras-clave: Unicidad de solución. Ecuación de Boussinesq. Energía conservativa. Espacios de Sobolev periódico. Cálculo diferencial en espacios de Banach.

INTRODUCCIÓN

La ecuación de Boussinesq describe el movimiento de las ondas en aguas poco profundas, que pueden ser vistas en mares, lagos y ríos.

El modelo homogéneo (PB) con datos en espacios Sobolev periódico fue propuesto por Iorio en [1], de modo que partiremos estudiando este caso, motivados con la teoría de Iorio [1], Santiago y Rojas [2] para el caso de la ecuación de la onda, y Papuico y Santiago [3] para el caso de la ecuación de la onda de Boussinesq. Siguiendo las ideas plasmadas en Santiago y Rojas [2] para la ecuación de onda no homogéneo. De [3], se tiene que los problemas homogéneo y no homogéneo de la ecuación de Boussinesq en espacios de Sobolev periódico poseen existencia y unicidad de solución que se probaron a partir de la forma explícita de la solución de ambos problemas. Ahora, en este estudio logramos probar la propiedad conservativa de la energía asociada al problema homogéneo, partiendo de la existencia de solución del caso homogéneo y sin usar la forma explícita de la solución, haciendo cálculo diferencial en H^s_{per}. Esto está comprendido en el Teorema 1 que presentaremos en este artículo. Del Teorema 1 deduciremos resultados de unicidad de solución para ambos problemas: homogéneo y no homogéneo, respectivamente.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2, indicaremos la metodología usada y citamos las referencias usadas para los resultados preliminares que se pueden necesitar. En la Sección 3, estudiaremos los principales resultados obtenidos en este trabajo. Así, probaremos la propiedad conservativa de la energía asociada a la ecuación de Boussinesq. Luego, usando la propiedad conservativa probaremos la unicidad de solución de la ecuación de onda de Boussinesq, para el caso homogéneo y no homogéneo. Finalmente, en la Sección 4, damos las conclusiones de este estudio.

METODOLOGÍA

Como marco teórico usamos los resultados de existencia y regularidad de [3]. Usamos [1], [2], [3] y [4] para la teoría de Fourier y propiedades en los espacios de Sobolev periódico, y el cálculo diferencial en espacios de Banach.

PRINCIPALES RESULTADOS

Primero obtendremos la propiedad conservativa de la energía asociada al problema homogéneo. Luego, usando este resultado probaremos la unicidad de solución tanto para el problema homogéneo y no homogéneo, respectivamente.

ECUACIÓN HOMOGÉNEA DE BOUSSINESQ

Sea $T > 0$, $s \in$ R fijado. El problema

$$(\mathrm{P}_B)\quad \left| \begin{array}{l} u \in C\left([0,T], H^s_{per}\right) \cap C^1\left([0,T], H^{s-1}_{per}\right) \\ \partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) \in H^{s-4}_{per}, \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}, \\ \partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per}. \end{array} \right.$$

se denomina ecuación homogénea de Boussinesq.

Definición 1. *Definimos la energía asociada al problema* (P_B) *como*

$$E(t,u) := \|\partial_t u(t)\|_{s-4}^2 + \|\partial_x u(t)\|_{s-4}^2 + \left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_{s-4}^2 \quad (1)$$

Teorema 1. *Si u es solución de (PB) con datos iniciales* $\phi \in H_{per}^s$ *y* $\psi \in H_{per}^{s-1}$ *entonces*

$$\partial_t E(t,u) = 0\,,\ \forall\, t \in [0,T]. \quad (2)$$

Así, (2) implica que

$$E(t,u) = E(0,u) = 0\,,\ \forall\, t \in [0,T]. \quad (3)$$

Esto es, la energía asociada al problema (P_B) es conservativa.

Demostración. Usaremos la notación E(t) = E(t,u), Así,

$$\partial_t E(t) = \lim_{h\to 0} \frac{E(t+h)-E(t)}{h}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{E(t+h)-E(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\|\partial_t u(t+h)\|_{s-4}^2 + \|\partial_x u(t+h)\|_{s-4}^2 + \left\|\partial_x^2 u(t+h)\right\|_{s-4}^2 \right.\\
&\quad \left. - \|\partial_t u(t)\|_{s-4}^2 - \|\partial_x u(t)\|_{s-4}^2 - \left\|\partial_x^2 u(t)\right\|_{s-4}^2\right\}\\
&= \frac{1}{h}\left\{\langle \partial_t u(t+h), \partial_t u(t+h)\rangle + \langle \partial_x u(t+h), \partial_x u(t+h)\rangle\right.\\
&\quad + \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \partial_x^2 u(t+h)\right\rangle - \langle \partial_t u(t), \partial_t u(t)\rangle\\
&\quad \left. - \langle \partial_x u(t), \partial_x u(t)\rangle - \left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_x^2 u(t)\right\rangle\right\}\\
&= \left\langle \partial_t u(t+h), \frac{\partial_t u(t+h)}{h}\right\rangle + \left\langle \partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h)}{h}\right\rangle\\
&\quad + \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_t u(t)}{h}, \partial_t u(t)\right\rangle\\
&\quad - \left\langle \frac{\partial_x u(t)}{h} \partial_x u(t)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x^2 u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle\\
&= \underbrace{\left\langle \partial_t u(t+h), \frac{\partial_t u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_t u(t)}{h}, \partial_t u(t)\right\rangle}_{I_1(h):=}\\
&\quad + \underbrace{\left\langle \partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t)\right\rangle}_{I_2(h):=}\\
&\quad + \underbrace{\left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x^2 u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle}_{I_3(h):=}.
\end{aligned}$$

En primer lugar,

$$\begin{aligned}
I_1(h) &= \left\langle \partial_t u(t+h), \frac{\partial_t u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \partial_t u(t+h), \frac{\partial_t u(t)}{h}\right\rangle\\
&\quad + \left\langle \frac{\partial_t u(t+h)}{h}, \partial_t u(t)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_t u(t)}{h}, \partial_t u(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \partial_t u(t+h), \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h}, \partial_t u(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} I_1(h) = \left\langle \partial_t u(t), \partial_t^2 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_t^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle$$

Para el caso real, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_1(h) &= 2\left\langle \partial_t u(t), \partial_t^2 u(t)\right\rangle\\
&= 2\left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle
\end{aligned} \quad (4)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
I_2(h) &= \left\langle \partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h)}{h}\right\rangle + \left\langle \partial_x u(t+h), -\frac{\partial_x u(t)}{h}\right\rangle\\
&\quad + \left\langle \partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \partial_x u(t+h), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} I_2(h) = \langle \partial_x u(t), \partial_t \partial_x u(t)\rangle + \langle \partial_t \partial_x u(t), \partial_x u(t)\rangle$$

Para el caso real

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_2(h) &= 2\langle \partial_x u(t), \partial_t \partial_x u(t)\rangle\\
&= 2\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x u(t), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}\right\rangle\\
&= -2\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x^2 u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right\rangle\\
&= -2\left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle.
\end{aligned} \quad (5)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I_3(h) &= \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x^2 u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t+h)}{h}\right\rangle - \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t)}{h}\right\rangle\\
&\quad + \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t)}{h}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial_x^2 u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \partial_x^2 u(t+h), \frac{\partial_x^2 u(t+h) - \partial_x^2 u(t)}{h}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial_x^2 u(t+h) - \partial_x^2 u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{h\to 0} I_3(h) = \left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t \partial_x^2 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_t \partial_x^2 u(t), \partial_x^2 u(t)\right\rangle$$

Para el caso real, se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_3(h) &= 2\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t \partial_x^2 u(t)\right\rangle\\
&= 2\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x^2 u(t), \frac{\partial_x^2 u(t+h) - \partial_x^2 u(t)}{h}\right\rangle\\
&= -2\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x^3 u(t), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}\right\rangle\\
&= 2\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x^4 u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right\rangle\\
&= 2\left\langle \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle.
\end{aligned} \quad (6)$$

Por tanto, de (4), (5) y (6) se tiene para el caso real

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(t+h)-E(t)}{h} = \sum_{i=1}^{3} \lim_{h\to 0} I_i(h)$$

Así,

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI https://doi.org/10.22533/at.ed.3174272407116

$$\sum_{i=1}^{3} \lim_{h\to 0} I_i(h) = 2\left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle - 2\left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle$$
$$+2\left\langle \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle$$
$$= 2\left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle - 2\left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle$$
$$-2\left\langle -\partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle$$
$$= 2\left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle - 2\left\langle \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle$$
$$= 0.$$

En conclusión $\partial_t E(t) = 0$.

Ahora, veamos el caso general

$$\begin{aligned}\partial_t E(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{E(t+h) - E(t)}{h}\\ &= \left\langle \partial_t u(t), \partial_t^2 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_t^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad + \left\langle \partial_x u(t), \partial_t \partial_x u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_t \partial_x u(t), \partial_x u(t)\right\rangle\\ &\quad + \left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t \partial_x^2 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_t \partial_x^2 u(t), \partial_x^2 u(t)\right\rangle\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\partial_t E(t) &= \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad + \lim_{h\to 0} \left\langle \partial_x u(t), \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}\right\rangle\\ &\quad + \lim_{h\to 0} \left\langle \frac{\partial_x u(t+h) - \partial_x u(t)}{h}, \partial_x u(t)\right\rangle\\ &\quad + \lim_{h\to 0} \left\langle \partial_x^2 u(t), \frac{\partial_x^2 u(t+h) - \partial_x^2 u(t)}{h}\right\rangle\\ &\quad + \lim_{h\to 0} \left\langle \frac{\partial_x^2 u(t+h) - \partial_x^2 u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle.\end{aligned}$$

Ahora, usando las propiedades del cálculo diferencial en espacios de Sobolev se tiene

$$\begin{aligned}\partial_t E(t) &= \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad - \lim_{h\to 0} \left\langle \partial_x^2 u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right\rangle - \lim_{h\to 0} \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \partial_x^2 u(t)\right\rangle\\ &\quad + \lim_{h\to 0} \left\langle \partial_x^4 u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right\rangle + \lim_{h\to 0} \left\langle \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \partial_x^4 u(t)\right\rangle\\ &= \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad - \left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle - \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad + \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^4 u(t)\right\rangle\\ &= \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t)\right\rangle - \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^4 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle - \left\langle \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad - \left\langle \partial_x^2 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle - \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^2 u(t)\right\rangle + \left\langle \partial_x^4 u(t), \partial_t u(t)\right\rangle\\ &\quad + \left\langle \partial_t u(t), \partial_x^4 u(t)\right\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

El Teorema 1, que acabamos de estudiar, nos permite deducir el siguiente resultado.

Corolario 1. *Existe a lo más una solución de la ecuación de Boussinesq homogénea (P_B).*

Demostración. Si u y $\widetilde{u}$ son soluciones de (P_B), $\omega := u - \widetilde{u}$ es solución de (PB), con datos iniciales

$$\omega(0) = u(0) - \tilde{u}(0) = \phi - \phi = 0 \in H^s_{per},$$

$$\omega_t(0) = u_t(0) - \tilde{u}_t(0) = \psi - \psi = 0 \in H^{s-1}_{per}.$$

Por el Teorema 1, de la conservación de la energía, obtenemos: $\partial_t E(t,\omega) = 0$, para todo $t \in [0,T]$. Es decir,

$$\begin{aligned}E(t,\omega) &= E(0,\omega)\\ &= \left\|\partial_t \omega(0)\right\|_{s-4}^2 + \left\|\partial_x \omega(0)\right\|_{s-4}^2 + \left\|\partial_x^2 \omega(0)\right\|_{s-4}^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así,

$$\left\|\partial_t \omega(t)\right\|_{s-4}^2 = 0$$
$$\left\|\partial_x \omega(t)\right\|_{s-4}^2 = 0,$$
$$\left\|\partial_x^2 \omega(t)\right\|_{s-4}^2 = 0.$$

Por tanto, en H^{s-4}_{per} se tiene que

$$\partial_t \omega(t) = 0,$$
$$\partial_x \omega(t) = 0,$$
$$\partial_x^{\,2} \omega(t) = 0.$$

para todo $t \in [0,T]$. Así,

$$\omega(t) = \omega(0) = 0.$$

Luego, $u(t) = u(t)$ para todo $t \in [0,T]$.

ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA DE BOUSSINESQ

Sea T > 0, s ∈ R fijado y $F \in C\left([0,T], H^s_{per}\right)$. El problema

$$(\mathrm{P}_B^F)\ \left|\begin{array}{l} u \in C\left([0,T], H^s_{per}\right) \cap C^1\left([0,T], H^{s-1}_{per}\right),\\ \partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F(t) \in H^{s-4}_{per}\\ u(0) = \varphi \in H^s_{per},\\ \partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per}. \end{array}\right.$$

se denomina ecuación no homogénea de Boussinesq.

Ahora, usaremos el Corolario 1 para obtener el siguiente resultado.

Corolario 2. *Existe a lo más una solución de la ecuación de Boussinesq no homogénea (P^F_B), para F≠0.*

Demostración. Si u y ũ son soluciones de (P^F_B), ω := u− ũ es solución de (P_B). Con datos iniciales nulos ω(0) = 0 y $\omega_t(0) = 0$. Usando el Corolario 1 se concluye que ω = 0.

CONCLUSIONES

En nuestro estudio de la unicidad de la solución de la ecuación de Boussinesq en espacios de Sobolev periódico, tanto en el caso homogéneo y no homogéneo, hemos obtenido importantes resultados concretos. Entre ellos podemos destacar el cumplimiento de la propiedad conservativa de la energía asociada a la ecuación de Boussinesq. Con ella, sin necesidad de conocer la forma explícita de la solución de la ecuación, hemos demostrado la unicidad de la solución para el caso homogéneo y no homogéneo.

Además, en forma análoga a los resultados obtenidos, se consigue para ecuaciones de Boussinesq de mayor orden.

REFERENCIAS

1. Iorio, R. and Iorio, V., Analysis and Partial Differential Equations. Cambridge University (2001).

2. Santiago, Y. and Rojas, S., Existencia y dependencia continua de la solución de la ecuación de onda no homogénea en espacios de Sobolev periódico. Selecciones Matemáticas **7**(1), 52–73 (2020).

3. Papuico, V. and Santiago, Y., Existencia y dependencia continua de solución de la ecuación de Boussinesq de onda en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. **7**(1), 74–96 (2020).

4. Santiago, Y. and Rojas, S., Unicidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev periódico. Selecciones Matemáticas. **7**(1), 172–175 (2020).