

MÉTODO DE BORIS GRIGÓRIEVICH GALIORKIN APLICADO A LA DEFLEXIÓN EN VIGAS

Data de submissão: 06/09/2024

Data de aceite: 01/10/2024

Marco Antonio Gutiérrez Villegas

U.A.M Azcapotzalco. Departamento de
Sistemas, área sistemas computacionales
Alcaldía Azcapotzalco

Nicolas Domínguez Vergara

UAM Azcapotzalco. Departamento
sistemas, área de estadística e
investigación de operaciones
Alcaldía Azcapotzalco

Alfonso Jorge Quevedo Martínez

UAM Azcapotzalco. Departamento
sistemas, área de estadística e
investigación de operaciones
Alcaldía Azcapotzalco

Israel Isaac Gutiérrez Villegas

Departamento de Ingeniería y Ciencias
Sociales, ESFM-IPN, México, Cdmx
División de Ingeniería en Sistemas
Computacionales, TESE- TecNM, Estado
de México
Alcaldía Azcapotzalco

Alejandro Cruz Sandoval

U.A.M Azcapotzalco. Departamento de
Sistemas, área sistemas computacionales
Alcaldía Azcapotzalco

Esiquio Martin Gutierrez Armenta

U.A.M Azcapotzalco. Departamento de
Sistemas, área sistemas computacionales
Alcaldía Azcapotzalco

RESUMEN: El artículo se centra en la aplicación del método de Galerkin para aproximar la deflexión de una viga. Este método, que permite resolver ecuaciones diferenciales de forma aproximada, se destaca por su versatilidad y facilidad de aplicación en comparación con métodos como Laplace y Fourier. La estrategia consiste en integrar la ecuación diferencial y proponer una función de prueba que cumpla con las condiciones de frontera, obteniendo así una solución analítica aproximada

PALABRAS-CLAVE: Deflexión, Laplace, Fourier, Galerkin, viga

INTRODUCCIÓN

En 1915 Galerkin, propuso un método de aproximación de solución de problemas de valores en la frontera que no requiere la formulación variacional del problema, en el año 2016 se cumplieron 100 años de este método el artículo contiene una breve descripción y origen del método así como su desarrollo [1], por lo tanto proporciona una aproximación más clara y general. Este método se puede aplicar a la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico,

hiperbólico y parabólico, así como a problemas lineales y no lineales. Cuando la forma variacional de un problema con condiciones de frontera existe, se puede mostrar que los métodos de Ritz y Galerkin son equivalentes y producen resultados idénticos. Por lo tanto, en vez de tratar de desarrollar la forma variacional equivalente para un problema con valores en la frontera dado y aplicar el método de Ritz, se puede aplicar el método de Galerkin directamente al problema de valor en la frontera. El método de Galerkin es el medio por el cual se puede convertir una ecuación diferencial ordinaria o parcial a un problema integral con el fin de transformarlo a un sistema de ecuaciones lineales álgebra. Donde los coeficientes obtenidos se sustituyen en la función de prueba.

METODOLOGÍA O DESARROLLO

En este estudio, se resolvió la ecuación de una viga empotrada con una carga uniforme. Se utilizó el método de Galerkin para encontrar una solución aproximada y se comparó con la solución exacta a través de gráficos.

La idea fundamental del método de Galerkin puede ejemplificarse mediante el problema de valor de frontera descrito por las ecuaciones (1).

$$L[u(r)] = 0 \text{ en la región } R \quad (1)$$

$$B[u(r_s)] = f(r_s) \text{ sobre la frontera } S \quad (2)$$

Donde L es un operador lineal diferencial por ejemplo:

$$L[u] = \nabla^2 u + Au + \left(\frac{1}{k}\right)g \quad (3)$$

Donde B es un operador de condición lineal de frontera

$$B[u] = k \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) + hu \quad (4)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ denota la derivada a lo largo normal hacia afuera de la frontera en la superficie S en aplicación en transferencia de calor en estado permanente.

$$\nabla^2 T(r) + AT(r) + \frac{1}{k}g(r) = 0 \text{ en } R \quad (5)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = f(r_s) \quad (6)$$

las ecuaciones (5- 6) es del tipo elíptica la cual modela fenómenos de estado estacionario. Estas ecuaciones surgen en áreas como la dinámica de fluidos, la transferencia de calor, el electromagnetismo, la geofísica, la biología, entre otras. Las más conocidas de estas ecuaciones son las de Laplace y Poisson.

Para resolver estas ecuaciones se realiza el siguiente procedimiento.

Se propone $\phi_j(r) = 1, 2, 3 \dots, n$ es un conjunto de funciones base. Se construyó el término $\tilde{T}_n(r)$ La que se conoce como función de prueba es la siguiente:

$$\tilde{T}_n(r) = \Psi_0(r) + \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(r) \text{ en la región (7)}$$

Donde la función $\Psi_0(r)$ satisface la parte no homogénea de las condiciones de frontera de la ecuación (2) y las funciones $\phi_j(r) = 1, 2, \dots, n$ es un conjunto de funciones ortogonales, satisfacen la parte homogénea, es decir

$$B[\Psi_0(r)] = f(r_S) \quad (8)$$

$$B[\phi_j(r)] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Se propone una solución aproximada que cumple las condiciones de frontera pero no resuelve exactamente la ecuación diferencial, generando un error. Para minimizar este error, se ajustan los coeficientes de la solución de prueba de modo que el error sea ortogonal a un conjunto de funciones base. Este procedimiento es conocido como el método de Galerkin.

$$\tilde{T}_n(r) = \Psi_0(r) + \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(r) \quad (10)$$

Para encontrar una solución aproximada, se utilizan las mismas funciones de base de la ecuación (7). Si la parte no homogénea es nula, se simplifica el problema. Al aplicar el método de Galerkin, se busca minimizar el error generado por la solución aproximada, imponiendo condiciones de ortogonalidad del residuo con respecto a las funciones de base.

$$\nabla^2 \tilde{T}_n(r) + A \tilde{T}_n(r) + \frac{1}{k} g(r) = R(C_1, C_2, \dots, C_n; r) \neq 0 \quad (11)$$

Este método permite calcular los n coeficientes desconocidos C_1, C_2, \dots, C_n mediante

$$\int_R \left(\nabla^2 \tilde{T}_n(r) + A \tilde{T}_n(r) + \frac{1}{k} g(r) \right) \phi_j(r) dv = 0 \quad (12)$$

La ecuación (12) puede expresarse de manera más compacta, tal como se muestra en la ecuación

$$\int_R \phi_j(r) R(C_1, C_2, \dots, C_n; r) dv = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

El objetivo de establecer esta relación es obtener un sistema de ecuaciones que permita calcular los coeficientes desconocidos. La ecuación (13) asegura que el error sea mínimo en un sentido específico. Al restringir la solución a un espacio finito, el método de Galerkin proporciona una solución aproximada. Este método aprovecha el principio de ortogonalidad para resolver ecuaciones diferenciales de manera eficiente.

Se describe la construcción de las funciones de prueba, siguiendo las recomendaciones de [2]. Estas funciones deben ser suaves y formar un espacio funcional completo. Para condiciones de frontera de primer tipo, se buscan funciones que se anulen en la frontera y sean suficientemente regulares en el interior del dominio. Un enfoque común consiste en construir estas funciones a partir de productos de funciones de base y potencias de la variable independiente, como se indica en la ecuación (14)

$$\phi_1 = w, \phi_2 = wx, \phi_3 = wy, \phi_4 = wx^2, \phi_5 = wxy \quad (14)$$

Las funciones construidas satisfacen las condiciones de frontera, son suficientemente suaves y forman un sistema completo. El problema se reduce a encontrar los coeficientes de estas funciones. Estos coeficientes se obtienen al aplicar las condiciones de frontera

1. Para dominios con fronteras simples y suaves, como el círculo, hay disponibles conjuntos ortonormales de funciones base.

$$F(x, y) = 0 \quad (15)$$

La función $F(x, y)$ es continua y posee derivadas parciales continuas con respecto a x e y .

La función $W(x, y)$ puede seleccionarse como:

$$w(x, y) = \pm F(x, y) \quad (16)$$

Para una región circular de radio R centrada en el origen, la ecuación de la frontera satisface la ecuación

$$F(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (17)$$

La función de peso $W(x, y)$ se toma como

$$w(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (18)$$

2. En regiones delimitadas por polinomios convexos, las ecuaciones de sus lados se expresan como:

$$F_1(x, y) = a_1x + b_1y + d_1 = 0, \quad F_2(x, y) = a_2x + b_2y + d_2 = 0, \dots, \quad F_n(x, y) = a_nx + b_ny + d_n = 0 \quad (19)$$

la función de peso $W(x, y)$ se elige de la forma:

$$w(x, y) = \pm F_1(x, y), \quad w(x, y) = \pm F_2(x, y), \dots, \quad w(x, y) = \pm F_n(x, y) \quad (20)$$

Se busca una función que se anule en toda la frontera del dominio y satisfaga la parte homogénea de las condiciones de frontera de primer tipo en la región de interés. Para cada una de las cuatro geometrías ilustradas en la Figura 1, se obtendrán múltiples soluciones para dicha función, tal como se definió previamente. Las condiciones de frontera específicas para cada una de estas geometrías (1a, 1b, 1c y 1d) se detallan a continuación.

$$a - x = 0, \quad a + x = 0, \quad b - y = 0, \quad b + y = 0 \quad (21)$$

$$y - \alpha x = 0, \quad y + \beta x = 0, \quad L - x = 0 \quad (22)$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad (23)$$

$$R_1^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad R_2^2 - (x - L)^2 - y^2 = 0 \quad (24)$$

Las funciones de peso $W(x, y)$ para cada geometría se presentan a continuación:

$$w(x, y) = (a^2 - x^2)(b^2 - y^2) \quad (25)$$

$$w(x, y) = (y - \alpha x)(y + \beta x)(L - x) \quad (26)$$

$$w(x, y) = xy\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \quad (27)$$

$$w(x, y) = (R_1^2 - x^2 - y^2)(R_2^2 - (x - L)^2 - y^2) \quad (28)$$

Para cada conjunto de condiciones de frontera, se requiere una función de peso específica. La solución de prueba se construye como una combinación lineal de estas funciones.

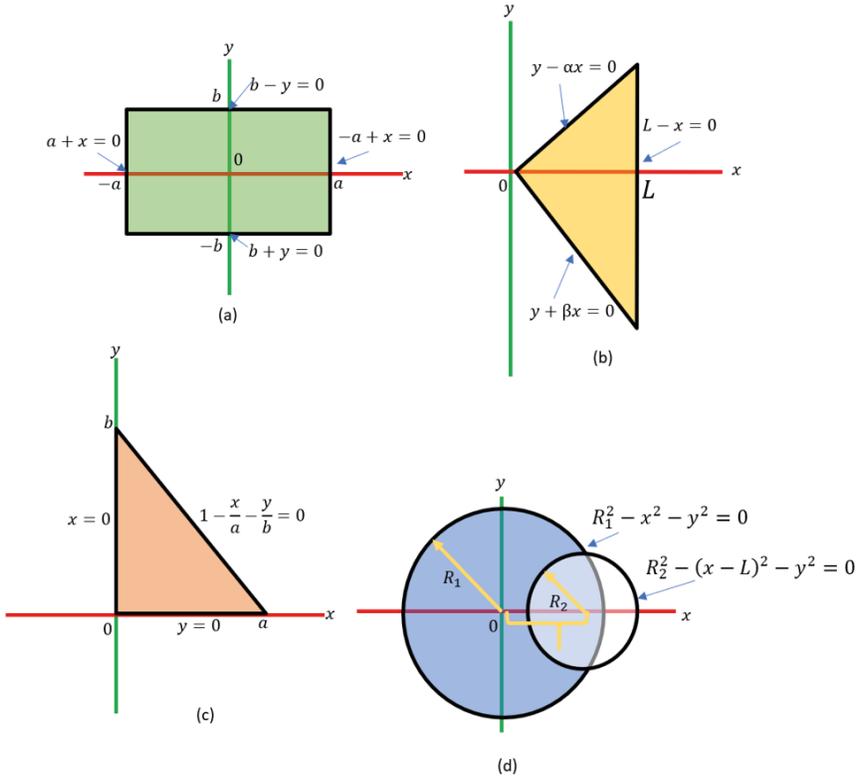


Figura. (1) región de contorno obtenida de [2].

Aplicación

Una aplicación considere una viga como se muestra en la Figura. 2.

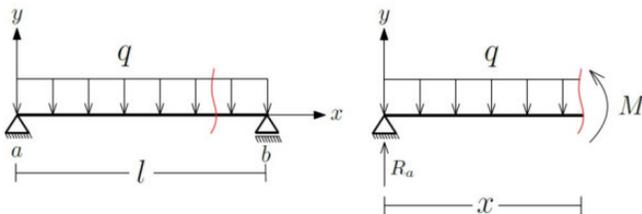


Figura 2. Viga doblemente apoyada con corte a distancia , donde . [3]

Como caso de estudio, se considera la aplicación del método de Galerkin a una viga simplemente apoyada sometida a momentos flectores en sus extremos (Figura 2). donde l es la longitud de la Distancia horizontal entre los puntos de sujeción del conductor en dos apoyos consecutivos, q es la intensidad de la carga estática que se distribuya uniformemente sobre toda la superficie y Ra es la reacción en el apoyo, se debe obtener la ecuación de momento flector para la viga en cuestión.

La ecuación gobernante de manera general:

$$EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (29)$$

condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Para un caso particular [3].

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{qx}{EI} (l - x) \quad (31)$$

Donde: $M(x) = \frac{qx}{EI} (l - x)$

condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

La u representa deflexión de la viga en función de la posición x se denota por $M(x)$. Los parámetros $M(x)$ representan el momento flector, I y E , el momento de inercia y el módulo de Young, respectivamente. La longitud de la viga es l . Sustituyendo estos valores en la ecuación (29), se obtiene la solución analítica [3]. Esta dada por la ecuación (33).

$$u(x) = \frac{q}{EI} \left(\frac{lx^3}{16} - \frac{x^4}{24} - \frac{x l^3}{48} \right) \quad (33)$$

A continuación, se aplicará el método de Galerkin al problema.

Como función de prueba se selecciona, en general, una combinación lineal de polinomios ortogonales de la forma dada por la ecuación (31).

$$\tilde{y} = C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2 + \dots, C_n \phi_n \quad (31)$$

donde las ϕ_i satisfacen las condiciones de frontera, para este caso en particular se propone la siguiente

$$\tilde{y} = c_1 \phi_1, \text{ donde } \phi_1 = \text{sen} \left(\frac{\pi x}{l} \right) \quad (32)$$

$$\tilde{y} = C_1 \phi_1 \quad \text{donde } \phi_1 = \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) \quad (33)$$

Donde:

$$\tilde{y} = C_1 \text{seno} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (34)$$

La ecuación satisface las condiciones de frontera como se muestra a continuación:

$$\tilde{y}(0) = C_1 \text{seno} \left(\frac{\pi(0)}{l} \right) = 0 \quad (35)$$

$$\tilde{y}(l) = C_1 \text{seno} \left(\frac{\pi l}{l} \right) = C_1 \text{seno}(\pi) = 0 \text{ para } \pi = 0, 2\pi, \dots, n\pi, n \text{ múltiplo de dos} \quad (36)$$

Sustituyendo (20) en (7) se obtiene

$$\int_0^l \left(EI \frac{d^2 \tilde{y}}{dx^2} - M(x) \right) \phi_1 dx = 0 \quad (37)$$

$$\int_0^l \left(\left[C_1 \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) - \frac{qx}{EI} (l-x) \right] \right) \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = 0 \quad (38)$$

donde

$$\tilde{y} = \left(C_1 \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right) \quad (39)$$

$$\tilde{y}' = C_1 \left(\frac{\pi}{l} \text{coseno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right) \quad (40)$$

$$\tilde{y}'' = -C_1 \left(\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right) \quad (41)$$

$$\int_0^l \left(-C_1 \left(\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right) - \frac{qx}{EI} (l-x) \right) \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = 0 \quad (42)$$

$$-C_1 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \text{seno}^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx - \int_0^l \frac{qx}{EI} (l-x) \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = 0 \quad (43)$$

Integran utilizando la identidad:

$$\text{seno}^2(\theta) = \frac{1 - \text{coseno}(2\theta)}{2} \quad (43)$$

$$-C_1 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \text{seno}^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = -C_1 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{l}{2} \right) = -C_1 \left(\frac{\pi^2}{2l} \right) \quad (44)$$

$$\int_0^l x(l-x) \text{seno} \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = -4 \frac{q}{EI} \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 \quad (45)$$

Sustituyendo en la ecuación (38), las ecuaciones (44-45)

$$-C_1 \left(\frac{\pi^2}{2l} \right) - 4 \frac{q}{EI} \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 = 0 \quad (46)$$

$$C_1 = -\frac{4 \frac{q}{EI} \left(\frac{l}{\pi} \right)^3}{\left(\frac{\pi^2}{2l} \right)} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{8l^3}{\pi^5} \right) \quad (47)$$

Sustituyendo la ecuación (47) en la ecuación (33) se tiene la solución aproximada.

$$\tilde{y} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{8l^3}{\pi^5} \right) \text{seno} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (48)$$

Tomando Valores $q = 1$ $E = 1$ $L = 1$ se graficará la ecuación (33) y ecuación (48)

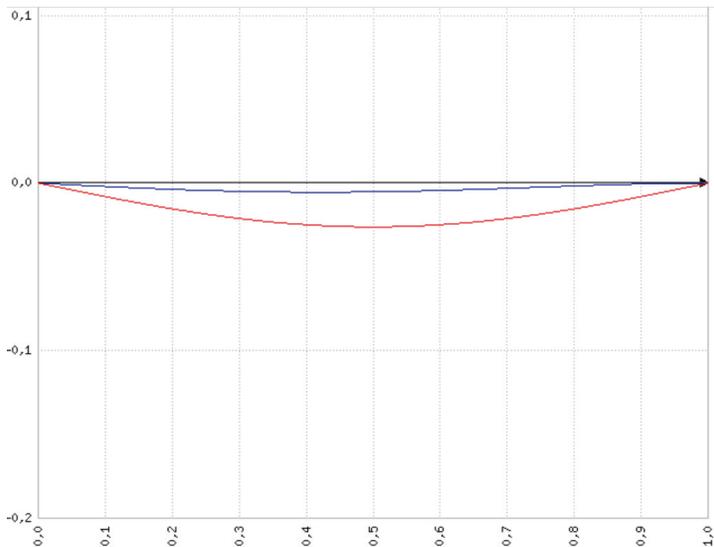


Figura. 3. Grafica de la solución analítica(roja) y aproximada (azul).

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Con el avance de la tecnología, el software actual permite calcular de manera rápida y precisa derivadas e integrales simbólicas. Esta herramienta resulta invaluable para la aplicación del método de Galerkin. Al aumentar el número de términos en la función de prueba, se obtiene una aproximación cada vez más cercana a la solución analítica exacta. Si bien en algunos casos es posible encontrar esta solución analítica, en la mayoría de las situaciones, especialmente cuando se enfrentan ecuaciones no lineales, resulta muy difícil o incluso imposible de obtener.

La Figura 3 ilustra cómo, al utilizar un solo término en la función de prueba, la diferencia entre la solución numérica y la solución analítica (si existiera) puede ser significativa. Sin embargo, a medida que se incorporan más términos, esta diferencia se reduce considerablemente.

CONCLUSIONES

El método de Galerkin, al aplicarse a ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias, permite transformar el problema en una forma integral. Esta transformación facilita la obtención de una solución analítica aproximada, la cual puede compararse con la solución exacta para evaluar el error. Este método constituye una alternativa viable para resolver problemas de vigas simplemente apoyadas sujetas a momentos concentrados en los extremos.

REFERENCES

[1] Computational Methods in Applied Mathematics, (2017), One Hundred Years of the Galerkin Method, Sergey Repin, <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0013>

[2] DAVID W. HAHN. NECATI ÖZISIK. (2012) HEAT CONDUCTION, JOHN WILEY & SONS, INC. PP. 521-523.

[3] Mariana Coelho Portilho Bernardi¹ , Adilandri Mércio Lobeiro , Rogério Zolin Bertechini¹ and Tamara Liz Schwab Ribeiro,(2020), Comparative Analysis of the Deflections of Two Beams Using the Finite Difference Method, Journal of Mechanics Engineering and Automation 10 (2020) 84-86 doi: 10.17265/2159-5275/2020.03.002