NO NUMERABILIDAD: LA DIAGONAL Y EL TEOREMA DE CANTOR

Fecha de aceptación: 02/09/2024

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: Usando el método de la diagonal de Cantor probamos que ciertos conjuntos son no numerables. Además, estudiamos la no existencia de una función sobreyectiva entre un conjunto y su conjunto potencia, y su conexión con no numerabilidad
PALABRAS CLAVE: Conjuntos numerables, conjuntos no numerables, método de la diagonal de Cantor, el Teorema de Cantor.

UNCOUNTABILITY: THE DIAGONAL AND CANTOR'S THEOREM

ABSTRACT: Using Cantor's diagonal method we prove that certain sets are uncountable. Furthermore, we study the non-existence of a surjective function between a set and its power set, and its connection with uncountability.
KEYWORDS: Countable sets, uncountable sets, Cantor's diagonal method, Cantor's Theorem.

INTRODUCCIÓN

En este artículo, iniciaremos nuestro estudio abordando conjuntos numerables, de modo intuitivo. Luego, estudiaremos la existencia de conjuntos no numerables. Esto es, introduciremos el método de la diagonal de Cantor para probar que ciertos conjuntos son no numerables. Este método se basa en construir un elemento que no pertece a un conjunto infinito numerable. Finalizaremos, enunciando y demostrando el Teorema de Cantor sobre la no existencia de una función sobreyectiva entre un conjunto y su conjunto de partes, y conectandolo con no numerabilidad.

Cabe destacar a Georg Cantor (1845-1918), matemático ruso, nacionalizado Alemán, reconocido por sus obras en Teoría de conjuntos, realizados durante los años 1876-1895. Para esto, podemos citar [1], [2], [3] y [4].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, damos las definiciones y resultados que usaremos. En la sección 3, estudiamos y generamos intuitivamente algunos conjuntos numerables. Así, desarrollamos el producto, cociente y unión de conjuntos numerables. En la sección 4, abordamos la existencia de conjuntos no numerables usando el método de la diagonal de Cantor y además estudiamos el conocido Teorema de Cantor. Finalmente, en la sección 5 damos las conclusiones de este estudio.

PRELIMINARES

Rápidamente introduciremos algunas definiciones y resultados que serán usados en este estudio. Para esta sección citamos [2].

Conjuntos finitos

Introduciremos el siguiente subconjunto de IN:

$$I_n := \{x \in IN, x \leq n\} = \{1,2,...,n\}.$$

Definición 2.1 *Sea X un conjunto, diremos que X es* **finito** *si es vacío o existe* $n \in IN$ *y existe* $f : I_n \rightarrow X$ *biyectiva (i.e. existe f biyección entre* I_n *y X).*

Así, a cada $i \in I_n$ se le asocia $f(i) \in X$ que podemos denotarlo como x_i, luego

$$X := \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Observación 2.1 *f inyectiva nos indica que* $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$. *Y f sobreyectiva nos indica que* $f(I_n) = X$.

La biyección f es llamada **contador** de los elementos del conjunto X y n es llamado el número de elementos de X o también el cardinal del conjunto X, i.e. $n = card(X)$.

Lema 2.1 *Si existe* $f : X \rightarrow Y$ *biyección entonces dados* $x_o \in X$ *y* $y_o \in Y$ *existe una* biyección *que conecta* x_o *a* y_o, *i.e.* $\exists g : X \rightarrow Y$ biyección *tal que* $g(x_o) = y_o$.

Teorema 2.1 *Sea* $n \in N$, *si* $A \subset I_n$ *propiamente entonces no puede existir una* biyección *entre A e* I_n, *i.e.* $\nexists\ f : A \rightarrow I_n$ biyección.

A seguir veremos que el número cardinal está bien definido, esto es independe de f.

Corolario 2.1 *Si* $f : I_m \rightarrow X$ *e* $g : I_n \rightarrow X$ *son biyecciones entonces* $m = n$.

Corolario 2.2 *Sea X un conjunto finito. Una función* $f : X \rightarrow X$ *es inyectiva si y solamente si f es sobreyectiva.*

Corolario 2.3 *Sea X un conjunto finito, si* $A \subset X$ *propiamente entonces no puede existir una* biyección *entre A y X.*

Teorema 2.2 *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

Corolario 2.4 *Dado* $f : X \rightarrow Y$, *se tiene*

1. Si Y es finito y f inyectiva entonces X es finito.
2. Si X es finito y f sobreyectiva entonces Y es finito.

Definición 2.2 *Sea $X \subset IN$, diremos que X es acotado si $\exists p \in IN$ tal que $m \leq p$, $\forall m \in X$.*

Corolario 2.5 *Sea $X \subset IN$, X es finito si y solamente si X es acotado.*

Conjuntos infinitos

Definición 2.3 *Diremos que un conjunto es* **infinito** *cuando no es finito.*

Así, X es infinito si $X \neq \emptyset$ y $\nexists f : I_n \to X$ biyección, para todo $n \in IN$. Ejemplos de conjuntos infinitos: IN, kIN; sale como consecuencia del Corolario 2.5 del Teorema 2.2.

Teorema 2.3 *Si X es un conjunto infinito, entonces $\exists f : IN \to X$ inyectiva.*

Corolario 2.6 *Un conjunto X es infinito si y solamente si existen un subconjunto propio Y de X ($Y \subset X$) y una* biyección $\varphi : X \to Y$.

Observación 2.2 *Si $N_1 := IN - \{1\} = \{2,3,...\}$ y $\varphi : IN \to N_1$ definida por $\varphi(n) = n + 1$, entonces φ es* biyección.

En general, si fijamos $p \in IN$ y $N_p := IN - \{1,2,...,p\} = \{p + 1, p + 2,...\}$ y $\varphi : IN \to N_p$ definida por $\varphi(n) = n + p$, entonces φ es biyección.

Si $P := \{2,4,6,...,\}$ y $\varphi : IN \to P$ definida por $\varphi(n) = 2n$, entonces φ es biyección.

Si $I := \{1,3,5,...,\}$ y $\varphi : IN \to I$ definida por $\varphi(n) = 2n - 1$, entonces φ es biyección.

Se observa que $IN - P = I$ y $IN - I = P$ son conjuntos infinitos. $IN - N_p = I_p = \{1,2,...p\}$ es finito.

Conjuntos numerables

Definición 2.4 *Diremos que un conjunto X es* **numerable** *cuando es finito o cuando existe una* biyección *f entre IN y X (i.e. $\exists f : IN \to X$* biyección*, que denotaremos $IN \overset{f}{\equiv} X$).*

Así, a cada $i \in IN$ se le asocia $f(i) \in X$ que podemos denotarlo como x_i, luego

$$X := \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$$

Observación 2.3 *f inyectiva nos indica que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Y f sobreyectiva nos indica que $f(IN) = X$.*

La biyección f es llamada **función enumeración** de los elementos del conjunto X.

Teorema 2.4 *Todo subconjunto de IN es numerable.*

Corolario 2.7 *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Corolario 2.8 *Dado $f : X \to Y$, se tiene*

1. Si Y es numerable y f inyectiva entonces X es numerable.
2. Si X es numerable y f sobreyectiva entonces Y es numerable.

EXISTENCIA DE CONJUNTOS NUMERABLES

En esta sección construiremos algunos conjuntos numerables.

Proposición 3.1 $\{m\} \times I\!N$ *es infinito numerable* $\forall m \in I\!N$.

Prueba.- Fácilmente se observa que $\{m\} \times I\!N$ no puede ser finito. Definimos

$$\begin{aligned} \psi : I_1 \times I\!N &\to I\!N \\ (1,n) &\mapsto n \end{aligned}$$

entonces ψ es inyectiva, luego $I_1 \times I\!N$ es infinito numerable.

Observe que ψ también es sobreyectiva.

En forma análoga, para $m \in I\!N$ fijo (arbitrario), definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} : \{m\} \times I\!N &\to I\!N \\ (m,n) &\mapsto n \end{aligned}$$

y vemos que $\widetilde{\psi}$ es inyectiva. Luego, $\{m\} \times I\!N$ es infinito numerable.

Se observa que $\widetilde{\psi}$ también es sobreyectiva.

Proposición 3.2 $I_n \times I\!N$ *es infinito numerable,* $\forall n \in I\!N$.

Prueba.- Sea $m \in I_n$,

$$\underbrace{\{m\} \times I\!N}_{\text{inf. num}} \subset I_n \times I\!N$$

entonces $I_n \times I\!N$ no puede ser finito.

Ahora, sean $n \in I\!N$ (arbitrario), p y q números primos $\neq 1$, definimos

$$\begin{aligned} \Psi : I_n \times I\!N &\to I\!N \\ (r,s) &\mapsto p^r \cdot q^s \end{aligned}$$

entonces Ψ es inyectiva, pues

$$\underbrace{p^r \cdot q^s}_{=\psi(r,s)} = \underbrace{p^u \cdot q^v}_{\psi(u,v)=} \;\Rightarrow\; r = u \text{ y } s = v\,.$$

"la descomposición en factores primos es única"; i.e. $(r,s) = (u,v)$.

Luego, Ψ inyectiva y $I\!N$ numerable implica $I_n \times I\!N$ infinito numerable.

Proposición 3.3 *Si A y B son conjuntos disjuntos e infinitos numerables entonces $A \cup B$ es infinito numerable.*

Prueba.- Como $\underbrace{A}_{\text{inf. num}} \subset A \cup B$ entonces $A \cup B$ no puede ser finito.

Si A es infinito numerable entonces $\exists g : I\!N \to A$ biyección. También como B es infinito numerable entonces $\exists f : I\!N \to B$ biyección. Ahora, definimos $F : I\!N \to A \cup B$, asignando $F(2i) = f(i)$ y $F(2i + 1) = g(i)$ para $i \in I\!N$.

Afirmamos que F es sobreyectiva. En efecto, si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ ó $x \in B$. Si $x \in A$ entonces $\exists i \in I\!N$ tal que $g(i) = x$. Luego, $\exists 2i{+}1 \in I\!N$ tal que $F(2i{+}1) = g(i) = x$.

Análogamente, si $x \in B$ entonces $\exists i^{*} \in I\!N$ tal que $f(i^{*}) = x$. Luego, $\exists 2i^{*} \in I\!N$ tal que $F(2i^{*}) = f(i^{*}) = x$.

Luego, F sobreyectiva implica $A \cup B$ es infinito numerable.

Observación 3.1 *Usando la proposición 3.3 e inducción probaremos la proposición* 3.2.

En efecto, de la proposición 3.1 tenemos que $I_1 \times I\!N$ es in infinito numerable. Si $I_n \times I\!N$ es infinito numerable, probaremos que $I_{n+1} \times I\!N$ también es infinito numerable.

Expresamos

$$I_{n+1} \times I\!N = [I_n \times I\!N] \cup [\{n+1\} \times I\!N]$$

como es unión disjunta de conjuntos infinito numerables, entonces es infinito numerable.

Proposición 3.4 *$I\!N \times I\!N$ es infinito numerable.*

Prueba.- Sea $m \in I\!N$,

$$\underbrace{I_m \times I\!N}_{\text{inf. num}} \subset I\!N \times I\!N$$

entonces $I\!N \times I\!N$ no puede ser finito.

Ahora, sean p y q números primos $\neq 1$, definimos

$$\psi : I\!N \times I\!N \rightarrow I\!N$$

$$(m,n) \mapsto p^m \cdot q^n$$

entonces ψ es inyectiva, pues

$$\underbrace{p^m \cdot q^n}_{=\psi(m,n)} = \underbrace{p^u \cdot q^v}_{\psi(u,v)=} \;\Rightarrow\; m = u \text{ y } n = v\,.$$

"la descomposición en factores primos es única"; i.e. $(m,n) = (u,v)$.

Luego, ψ inyectiva implica $I\!N \times I\!N$ es infinito numerable.

Proposicíon 3.5 *Si A es infinito numerable y B es finito tal que $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es infinito numerable.*

Prueba.- Como $\underbrace{A}_{\text{inf. num}} \subset A \cup B$ entonces $A \cup B$ no puede ser finito.

Si A es infinito numerable entonces $\exists g : I\!N \rightarrow A$ biyección. También como B es finito entonces $\exists I_n$ y $\exists f : I_n \rightarrow B$ biyección. Ahora, definimos $F : I\!N \rightarrow A \cup B$, asignando $F(i) = f(i)$ si $i \in I_n$ y $F(i) = g(k)$ si $i = n + k$ con $k \in I\!N$.

Afirmamos que F es sobreyectiva. En efecto, si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ ó $x \in B$. Si $x \in A$ entonces $\exists i \in IN$ tal que $g(i) = x$. Luego, $\exists n + i \in IN$ tal que $F(n + i) = g(i) = x$.

Análogamente, si $x \in B$ entonces $\exists i^* \in I_n$ tal que $f(i^*) = x$. Luego, $\exists i^* \in I_n \subset IN$ tal que $F(i^*) = f(i^*) = x$.

Luego, F sobreyectiva implica $A \cup B$ es infinito numerable.

Proposición 3.6 *Si A es infinito numerable y B es finito tal que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ es infinito numerable.*

Prueba.- Como $A \cup B = A \cup (B - A)$ y A disjunto de $B - A$, con $B - A$ finito, entonces $A \cup B$ es infinito numerable.

Proposición 3.7 *Si A es infinito numerable y B es finito, entonces $A \cup B$ es infinito numerable.*

Prueba.- Es consecuencia de las proposiciones 3.5 y 3.6.

Proposición 3.8 *Si A y B son infinitos numerables tal que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ es infinito numerable.*

Prueba.- Como $A \cup B = A \cup (B - A)$ y A disjunto de $B - A$, con $B \cap A$ finito o infinito numerable pues $B \cap A \subset A$.

Si $B \cap A$ es finito entonces $B - A$ es infinito numerable. Luego, usando 3.3 tenemos que $A \cup B$ es infinito numerable.

Si $B \cap A$ es infinito numerable entonces $B - A$ puede ser finito o infinito numerable.

En cualquiera de los dos casos se obtiene que $A \cup B$ es infinito numerable.

Proposición 3.9 *Si A y B son finitos tal que $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \cup B$ es finito.*

Prueba.- Si A es finito entonces $\exists I_m$ y $\exists g : I_m \to A$ biyección. También como B es finito entonces $\exists I_n$ y $\exists f : I_n \to B$ biyección. Ahora, definimos $F : I_{m+n} \to A \cup B$, asignando $F(i) = g(i)$ si $i \in I_m$ y $F(i) = f(k)$ si $i = m + k$ con $k \in I_n$.

Afirmamos que F es sobreyectiva. En efecto, si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ ó $x \in B$.

Si $x \in A$ entonces $\exists i \in I_m$ tal que $g(i) = x$. Luego, $\exists i \in I_m \subset I_{m+n}$ tal que $F(i) = g(i) = x$.

Analogamente, si $x \in B$ entonces $\exists i^* \in I_n$ tal que $f(i^*) = x$. Luego, $\exists m+i^* \in I_{m+n}$ tal que $F(m + i^*) = f(i^*) = x$.

Luego, F sobreyectiva implica $A \cup B$ es finito.

Proposición 3.10 *Si A y B son finitos tal que $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $A \cup B$ es finito.*

Prueba.- Como $A \cup B = A \cup (B - A)$ y A disjunto de $B - A$, con $B - A$ finito, entonces $A \cup B$ es finito.

Proposición 3.11 *Si A y B son conjuntos finitos entonces $A \cup B$ es finito.*

Prueba.- Es consecuencia de las proposiciones 3.9 y 3.10.

Proposición 3.12 *Unión finita de conjuntos finitos es finito. Esto es, si A_i son finitos para $i = 1,...n$, con $n \in IN$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es finito.*

Prueba.- Obviamente ya se probó que $A_1 \cup A_2$ es finito. Si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es finito, probaremos que $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ es finito. En efecto,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1},$$

aplicando el caso $n = 2$, concluimos que $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ es finito.

Proposición 3.13 *Unión finita de conjuntos infinitos numerables es infinito numerable. Esto es, si A_i son infinitos numerables para $i = 1,...n$, con $n \in IN$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es infinito numerable.*

Prueba.- Obviamente ya se probó que $A_1 \cup A_2$ es infinito numerable. Si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es infinito numerable, probaremos que $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ es infinito numerable. En efecto,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcup A_{n+1},$$

aplicando el caso $n = 2$, concluimos que $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ es infinito numerable.

Proposición 3.14 *Unión finita de conjuntos numerables es numerable. Esto es, sólo nos restaría probar el caso: si A_i son finitos para $i = 1,...k$ y A_{k+j} es infinito numerable, con $j \in I_{n-k}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es infinito numerable.*

Prueba.- En efecto,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}_{finito}\right) \bigcup \left(\underbrace{\bigcup_{i=k+1}^{n} A_i}_{inf.\,num}\right).$$

Luego, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es infinito numerable.

Proposición 3.15 *Unión infinita numerable de conjuntos finitos (no vacíos) es numerable. Esto es, si A_i son finitos para $i \in IN$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.*

Prueba.- Sean $g_i : A_i \to I_{m_i} \subset IN$ inyectivas, $\forall i \in IN$, donde $m_i \in IN$. Definimos la aplicación $G : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \to I\!N \times I\!N$ tal que a cada $u \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ le asigna $G(u) = (k, g_k(u))$ donde $k = \min\{n \in IN, u \in A_n\}$; aquí estamos considerando el caso $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ con $i \neq j$. Entonces G es inyectiva.

Siendo G inyectiva y $I\!N \times I\!N$ infinito numerable, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Observación 3.2 *Daremos una prueba intuitiva de la proposición 3.15 para el caso de conjuntos disjuntos.*

En efecto, consideraremos que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Observemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ no puede ser finito. En efecto, basta tomar un elemento x_i de cada A_i y obtenemos $\{x_i\}_{i \in I\!N} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Sean $f_i : I_{m_i} \to A_i$ biyección, $\forall i \in I\!N$, donde $m_i \in I\!N$. Definimos la aplicación

$F : I\!N \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tal que a $i \in I\!N$ le asigna

$$F(i) = \begin{cases} f_1(i), & \text{si } i \in I_{m_1} \\ f_2(k), & \text{si } i = m_1 + k\,, k \in I_{m_2} \\ f_3(j), & \text{si } i = m_1 + m_2 + j\,, j \in I_{m_3} \\ \vdots & \\ f_{\overline{m}}(s), & \text{si } i = m_1 + m_2 + \ldots + m_{\overline{m}-1} + s\,, s \in I_{\overline{m}} \\ \vdots & \end{cases}$$

entonces F es sobreyectiva. En efecto, sea $u \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces existe $i^* \in I\!N$ tal que $u \in X_{i^*}$, esto es, $\exists r \in I_{m_{i^*}}$ tal que $f_{i^*}(r) = u$.

$\exists \widetilde{r} := m_1 + \ldots + m_{i^*-1} + r \in I\!N$ tal que $F(\widetilde{r}) = f_{i^*}(r) = u$.

Por lo tanto, F sobreyectiva implica que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es infinito numerable.

Proposición 3.16 *Unión infinita numerable de conjuntos infinitos numerables es infinito numerable. Esto es, si A_i son infinitos numerables para $i \in I\!N$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es infinito numerable.*

Prueba.- Como $A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ para todo $k \in I\!N$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ no puede ser finito.

Ahora, sean $f_i : I\!N \to A_i$ biyección, $\forall i \in I\!N$. Definimos la aplicación.

$$\begin{aligned} \phi : I\!N \times I\!N &\to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\ (m,n) &\to \phi((m,n)) = f_n(m)\,, \end{aligned}$$

entonces ϕ es sobreyectiva. En efecto, sea $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ entonces $\exists i^* \in I\!N$ tal que $x \in A_{i^*}$. Como f_{i^*} es sobreyectiva, existe $m \in I\!N$ tal que $f_{i^*}(m) = x$. Luego, existe $(m,i^*) \in I\!N \times I\!N$ tal que $\phi((m,i^*)) = f_{i^*}(m) = x$.

Finalmente, ϕ sobreyectiva y $I\!N \times I\!N$ infinito numerable, implica que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es infinito numerable.

Observación 3.3 *Análogamente a la prueba de la proposición 3.15 podemos demostrar la proposición 3.16.*

Proposición 3.17 *Unión infinito numerable de conjuntos numerables es infinito numerable. Esto es, sólo nos restaría probar el caso: si A_i son finitos para $i \in N_1$ y A_j es infinito numerable, para $j \in N_2$, entonces $\bigcup_{i\in I\!N} A_i$ es infinito numerable; donde $I\!N = N_1 \cup N_2$.*

Prueba.- En efecto,

$$\bigcup_{i\in I\!N} A_i = \left(\underbrace{\bigcup_{i\in N_1} A_i}_{F_1:=}\right) \bigcup \left(\underbrace{\bigcup_{i\in N_2} A_i}_{F_2:=}\right).$$

Se observan 3 casos:

Caso 1: N_1 finito y N_2 infinito numerable.

Caso 2: N_1 infinito numerable y N_2 finito.

Caso 2: N_1 y N_2 infinitos numerables.

En el primer caso tenemos que F_1 es finito y F_2 es infinito numerable.

Luego, $\bigcup_{i\in I\!N} A_i = F_1 \cup F_2$ es infinito numerable.

En el segundo caso tenemos que F_1 es infinito numerable y F_2 es infinito numerable.

Luego, $\bigcup_{i\in I\!N} A_i = F_1 \cup F_2$ es infinito numerable.

En el tercer caso tenemos que F_1 es infinito numerable y F_2 es infinito numerable.

Luego, $\bigcup_{i\in I\!N} A_i = F_1 \cup F_2$ es infinito numerable.

Previamente necesitamos enunciar algunos resultados que usaremos:

Proposición 3.18 *Sea $k \in I\!N$, el conjunto $\{k\} \times I_m$ es finito, $\forall m \in I\!N$.*

Prueba.- Para $k \in I\!N$ fijo, definimos

$$\varphi : \{k\} \times I_m \to I_m$$
$$(k,j) \mapsto j$$

y observamos que φ es inyectiva, luego $\{k\} \times I_m$ es finito.

Observe que φ también es sobreyectiva.

Proposición 3.19 *$I_n \times I_m$ es finito, $\forall n,m \in I\!N$.*

Prueba.- En efecto, basta expresar

$$I_n \times I_m = \bigcup_{k=1}^{n} \{k\} \times I_m$$

como unión finita de conjuntos finitos, luego $I_n \times I_m$ es finito.

Corolario 3.1 *El producto cartesiano de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Prueba.- Estudiaremos los siguientes casos:

Caso I: Sean X e Y infinitos numerables entonces $X \times Y$ es infinito numerable. En efecto, si X es infinito numerable entonces $\exists f : IN \to X$ biyección. También, como Y es infinito numerable entonces $\exists g : IN \to Y$ biyección.

Definimos,

$$H : IN \times IN \to X \times Y$$

$$(m,n) \mapsto H(m,n) := (f(m),g(n))$$

entonces H es sobreyectiva. En efecto, sean $(x,y) \in X \times Y$ entonces $x \in X$ e $y \in Y$, luego $\exists m \in IN$ tal que $f(m) = x$ y $\exists n \in IN$ tal que $g(n) = y$. Luego, existe $(m,n) \in IN \times IN$ tal que $H(m,n) = (f(m),g(n)) = (x,y)$.

Se observa que H también es inyectiva.

Luego, H sobreyectiva implica que $X \times Y$ es infinito numerable.

Caso II Sean X e Y finitos entonces $X \times Y$ es finito.

En efecto, si X es finito entonces $\exists f : I_n \to X$ biyección. También, como Y es finito entonces $\exists g : i_m \to Y$ biyección.

Definimos,

$$\widetilde{H} : I_n \times I_m \to X \times Y$$

$$(k,j) \mapsto \widetilde{H}((k,j)) := (f(k),g(j))$$

entonces $\widetilde{H}$ es sobreyectiva. En efecto, sean $(x,y) \in X \times Y$ entonces $x \in X$ e $y \in Y$, luego $\exists k^* \in I_n$ tal que $f(k^*) = x$ y $\exists j^* \in I_m$ tal que $g(j^*) = y$. Luego, existe $(k^*,j^*) \in I_n \times I_m$ tal que $\widetilde{H}((k^*,j^*)) = (f(k^*),g(j^*)) = (x,y)$.

Se observa que $\widetilde{H}$ también es inyectiva.

Luego, $\widetilde{H}$ sobreyectiva e $I_n \times I_m$ finito implica que $X \times Y$ es finito.

Caso III Se X finito e Y infinito numerable entonces $X \times Y$ es infinito numerable. En efecto, si X es finito entonces $\exists f : I_n \to X$ biyección. También, como Y es infinito numerable entonces $\exists g : IN \to Y$ biyección.

Definimos,

$$\widetilde{F} : I_n \times IN \to X \times Y$$

$$(k,j) \mapsto \widetilde{F}((k,j)) := (f(k),g(j))$$

entonces $\widetilde{F}$ es sobreyectiva. En efecto, sean $(x,y) \in X \times Y$ entonces $x \in X$ e $y \in Y$, luego $\exists k^* \in I_n$ tal que $f(k^*) = x$ y $\exists j^* \in IN$ tal que $g(j^*) = y$. Luego, existe $(k^*,j^*) \in I_n \times IN$ tal que $\widetilde{F}((k^*,j^*)) = (f(k^*),g(j^*)) = (x,y)$.

Se observa que $\widetilde{F}$ también es inyectiva.

Luego, $\widetilde{F}$ sobreyectiva e $I_n \times IN$ infinito numerable implica que $X \times Y$ es infinito numerable.

Proposición 3.20 $\underbrace{I\!N \times I\!N \times \ldots \times I\!N}_{n-veces}$ *es infinito numerable.*

Prueba.- Su prueba es análoga al caso $n = 2$.

En la siguiente sección veremos que IN^{IN} no es numerable.

Proposición 3.21 *Si X_i son infinito numerables para $i = 1,...,n$ con $n \in IN$, entonces $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ es infinito numerable.*

Prueba.- Su prueba es análoga al caso $n = 2$.

Observación 3.4 *Cabe resaltar que del Teorema 2.3 se tiene: ser infinito numerable es el menor de los infinitos. Equivalente a decir:*

"Todo conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable".

Observación 3.5 *El conjunto de los números enteros* Z *es infinito numerable.*

Como $IN \subset Z$, Z no puede ser finito. Ahora, definimos $f : IN \to Z$ como

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{si n es impar} \\ \frac{-n}{2} & \text{si n es par} \end{cases}$$

y se verifica fácilmente que f es biyectiva.

Otra prueba, sería expresar

$$Z = IN \cup \{0\} \cup (-IN)$$

como unión finita de conjuntos numerables, donde $-IN := \{-n,\ n \in IN\}$ y este es infinito numerable desde que existe ϑ

$$\vartheta : IN \to -IN$$

$$n \mapsto \vartheta(n) = -n$$

biyección.

Luego, Z es infinito numerable.

Observación 3.6 *Cabe mencionar que a pesar de que IN está contenido propiamente en* Z*, ambas tienen la misma cardinalidad.*

Observación 3.7 $Z^* := Z - \{0\}$ *es infinito numerable.*

Como $IN \subset Z^*$, Z^* no puede ser finito. Ahora, definimos $\Lambda : IN \to Z^*$ como

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si n es impar} \\ \frac{-n}{2} & \text{si n es par} \end{cases}$$

y se verifica fácilmente que Λ es biyectiva.

Otra prueba, sería expresar

$$Z^* = IN \cup (-IN)$$

como unión finita de conjuntos infinito numerables. Luego, Z^* es infinito numerable.

Observación 3.8 *El conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ *es infinito numerable.*

Como $IN \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ no puede ser finito. Ahora, se observa que $Z \times Z^*$ es infinito numerable, definimos la función $\Delta : Z \times Z^* \to \mathbb{Q}$ como $\Delta(m,n) = \frac{m}{n}$, se demuestra fácilmente que Δ es sobreyectiva. Luego, $\mathbb{Q}$ es infinito numerable.

Proposición 3.22 *Sea* $A \neq \emptyset$, *y* $\sim$ *una relación de equivalencia en A. Si A es numerable entonces el conjunto cociente de A:* $A/\sim$ *es numerable.*

Prueba.- Si A es numerable entonces existe $f : IN \to A$ sobreyectiva. Como la proyección natural $P : A \to A/\sim$ es sobreyectiva, entonces $P \circ f : IN \to A/\sim$ es sobreyectiva, luego $A/\sim$ es numerable.

Proposición 3.23 *Sea* $P_f(IN) := \{X \subset IN$ *tal que* X *es finito*$\}$ *entonces* $P_f(IN)$ *es infinito numerable.*

Prueba.- Para cada $n \in IN$, definimos el siguiente conjunto

$$P_n := \{X \subset IN \text{ tal que } card(X) = n\}.$$

Primero, observemos que P_1 es infinito numerable. En efecto, existe $\psi : IN \to P_1$ biyección que asocia a cada $m \in IN$ al conjunto $\{m\} \in P_1$.

Luego, como $\underbrace{P_1}_{inf\ num} \subset P_f$ entonces P_f no puede ser finito.

Probaremos que P_n es infinito numerable $\forall n \in IN$. En efecto, para $n \in IN$ fijado, basta definir

$$\begin{aligned} F : P_n &\to \underbrace{IN \times \ldots \times IN}_{n-veces} \\ X &\mapsto F(X) := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

donde $IN \supset X$ es finito de cardinalidad n, i.e. $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, mejor aún: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Luego, F es inyectiva. En efecto, sean $X, Y \in P_n$ tal que $F(X) = F(Y)$ entonces $(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, esto es $x_i = y_i$ para $i = 1,\ldots,n$; i.e. $X = Y$.

Luego, F inyectiva y IN^n infinito numerable implica P_n infinito numerable.

Vale la siguiente igualdad:

$$P_f(IN) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) \cup \{\emptyset\}.$$

Por lo tanto, $P_f(IN)$ es infinito numerable, al ser unión numerable de conjuntos numerables.

En la siguiente sección veremos que $P(IN)$ no es numerable.

EXISTENCIA DE CONJUNTOS NO NUMERABLES

Definición 4.1 *Sea X un conjunto, diremos que X es no nummerable cuando no f cumple: X es finito o* ∃*f* biyección *entre IN y X (notación: IN* $\overset{f}{\equiv}$ *X). Esto es, X no es finito (i.e. X es infinito) y* ∄ biyección *entre IN y X.*

Usaremos el "Método de la Diagonal de Cantor" para probar que algunos conjuntos son no numerables.

Proposición 4.1 $\{0,1\}^{IN} := \{s : IN \to \{0,1\}$ *función* $\}$ *es no numerable.*

Prueba.- Antes de iniciar con la prueba observemos que $\{0,1\}^{IN}$ no es finito, mejor aún observemos que posee un subconjunto infinito numerable "trivial": la sucesión

$$e_j \,:\, 0, \ldots, 0, \underbrace{\;1\;}_{\text{j-ésima}}, 0 \ldots 0, \ldots$$

Luego, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{0,1\}^{I\!N}$.

Lo que también nos permite obtener: *card*(*IN*) ≤ *card*($\{0,1\}^{IN}$). Y usando que ∄*f* bisección entre *IN* y $\{0,1\}^{IN}$, concluimos que

$$card(IN) < card(\{0,1\}^{IN}).$$

Podemos observar otros elementos de $\{0,1\}^{IN}$, como son las sucesiones constantes: $\overline{0}$ y $\overline{1}$.

Ahora, pasamos a probar que $\{0,1\}^{IN}$ no es numerable.

Sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ un conjunto infinito numerable (arbitrario) de elementos de $\{0,1\}^{IN}$. Así,

*s*1	: **s11**	*s*21	*s*31	*s*41	...	*sm*1	...
*s*2	: *s*12	**s22**	*s*32	*s*42	...	*sm*2	...
*s*3	: *s*13	*s*23	**s33**	*s*43	...	*sm*3	...
*s*4	: *s*14	*s*24	*s*34	**s44**	...	*sm*4	...
	⋮	:					
sm	: *s*1*m*	*s*2*m*	*s*3*m*	*s*4*m*	...	**smm**	...
	⋮	:					

Construimos

$$s^* \quad : \quad s_1^* \quad s_2^* \quad s_3^* \quad s_4^* \quad \ldots \quad s_m^* \quad \ldots$$

tal que $s_m^* \neq s_{mm}, \; \forall m \in I\!N$. Esto es posible desde que tenemos *card*({0,1}) = 2; así, para cada $m \in IN$ tomamos

$$s_m^* = \begin{cases} 0 & \text{si } s_{mm} = 1 \\ 1, & \text{si } s_{mm} = 0. \end{cases}$$

Luego, $s^* \in \{0,1\}^{IN}$ y satisface: $s^* \neq s_m$, $\forall m \in IN$.

Esto es, $s^* \notin \{s_1,s_2,...,s_n,...\}$. O sea, "ningún conjunto infinito numerable de $\{0,1\}^{IN}$ llega a ser todo $\{0,1\}^{IN}$".

Otra forma de redactar esta prueba, sería proceder por el absurdo. Supongamos que exista una f biyección entre IN y $\{0,1\}^{IN}$; luego $IN \equiv f(IN) = \{0,1\}^{IN}$, denotemos a $f(IN) = \{s_1,s_2,...,s_n,...\}$. Para esta familia numerable aplicamos la diagonal de Cantor para construir $s^* \in \{0,1\}^{IN} - \{s_1,s_2,...,s_n,...\} \neq \emptyset$. Lo que contradice $f(IN) = \{0,1\}^{IN}$.

Proposición 4.2 *Si $a \neq b$ entonces $\{a,b\}^{IN}$ es no numerable.*

Prueba.- La prueba es análoga a la demostración de la Proposición 4.1.

Proposición 4.3 *Si A es un conjunto con $card(A) = n \geq 2$ entonces A^{IN} es no numerable.*

Prueba.- La prueba es análoga a la demostración de la Proposición 4.1.

Proposición 4.4 *IN^{IN} es no numerable.*

Prueba.- Como $\{1,2\} \subset IN$ entonces $\{1,2\}^{IN} \subset IN^{IN}$. Luego, IN^{IN} no puede ser numerable.

Podemos dar otra prueba usando el método de la Diagonal de Cantor, conservando, viendo a los elementos de IN^{IN} como funciones de IN a IN.

En efecto, sea $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...\}$ un conjunto infinito numerable (arbitrario) de elementos de IN^{IN}. Así,

$$\begin{array}{cccccccc}
\varphi_1 & : & \varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}) & \varphi_1(2) & \varphi_1(3) & \varphi_1(4) & \cdots & \varphi_1(m) & \cdots \\
\varphi_2 & : & \varphi_2(1) & \varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{2}) & \varphi_2(3) & \varphi_2(4) & \cdots & \varphi_2(m) & \cdots \\
\varphi_3 & : & \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \varphi_{\mathbf{3}}(\mathbf{3}) & \varphi_3(4) & \cdots & \varphi_3(m) & \cdots \\
\varphi_4 & : & \varphi_4(1) & \varphi_4(2) & \varphi_4(2) & \varphi_{\mathbf{4}}(\mathbf{4}) & \cdots & \varphi_4(m) & \cdots \\
\cdots & : & & & & & & & \\
\varphi_m & : & \varphi_m(1) & \varphi_m(2) & \varphi_m(2) & \varphi_m(4) & \cdots & \varphi_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}) & \cdots \\
\vdots & : & & & & & & &
\end{array}$$

Construimos

$$\varphi* \quad : \varphi^*(1) \quad \varphi^*(2) \quad \varphi^*(3) \quad \varphi^*(4) \quad \cdots \quad \varphi^*(m) \quad \cdots$$

tal que $\varphi^*(m) \neq \varphi_m(m)$, $\forall m \in IN$. Esto es posible desde que tenemos $card\ (IN) > 2$; así, para cada $m \in IN$ tomamos

$$\varphi^*(m) = \{k \neq j \quad \text{si } \varphi_m(m) = j\ .$$

Luego, $\varphi^* \in IN^{IN}$ y satisface: $\varphi^* \neq \varphi_m$, $\forall m \in IN$.

Esto es, $\varphi^* \notin \{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n,...\}$. O sea, "ningún conjunto infinito numerable de IN^{IN} llega a ser todo IN^{IN}".

Otra forma de redactar esta prueba, sería proceder por el absurdo. Supongamos que exista una f biyección entre $I\!N$ y $I\!N^{I\!N}$; luego $I\!N \equiv f(I\!N) = I\!N^{I\!N}$, denotemos a $f(I\!N) = \{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots\}$. Para esta familia numerable aplicamos la diagonal de Cantor para construir $\varphi^* : I\!N \to I\!N$, tal que $\varphi^* \in I\!N^{I\!N} - \{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots\} \neq \emptyset$.

Lo que contradice $f(I\!N) = I\!N^{I\!N}$.

Proposición 4.5 *Si X_n es infinito numerable $\forall n \in I\!N$ entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es no numerable.*

Prueba.- Sea $\{y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\}$ un conjunto infinito numerable (arbitrario) de elementos de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Así,

$y1$	: **y11**	$y21$	$y41$		...	$ym1$	...	
$y2$	: $y12$	**y22**	$y32$	$y42$	...	$ym2$	...	
$y3$	: $y13$	$y23$	**y33**	$y43$	...	$ym3$	...	
$y4$	: $y14$	$y24$	$y34$	**y44**	...	$ym4$	...	
$\vdots$	:							
ym	:	$y1m$	$y2m$	$y3m$	$y4m$	... **ymm** ...		
$\vdots$	:							

Construimos

$$y^* \;\; : \;\; y_1^* \;\; y_2^* \;\; y_3^* \;\; y_4^* \;\; \ldots \;\; y_m^* \;\; \ldots$$

tal que $y_m^* \neq y_{mm}$, $\forall m \in I\!N$. Esto es posible desde que tenemos $card(X_m) = card(I\!N) > 2$; así, para cada $m \in I\!N$ tomamos

$$y_m^* = \{\; a \in X_m\,, (a \neq b), \quad \text{si } s_{mm} = b \in X_m.$$

Luego, $y^* \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ y satisface: $y^* \neq y_m$, $\forall m \in I\!N$.

Esto es, $y^* \notin \{y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\}$. O sea, "ningún conjunto infinito numerable de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ llega a ser todo $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$".

Otra forma de redactar esta prueba, sería proceder por el absurdo. Supongamos que exista una f biyección entre $I\!N$ y $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$; luego $I\!N \equiv f(I\!N) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, denotemos a $f(I\!N) = \{y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\}$. Para esta familia numerable aplicamos la diagonal de Cantor para construir $y^* \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i - \{y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots\} \neq \emptyset$. Lo que contradice $f(I\!N) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Proposición 4.6 *Si X_n es finito con $card(X_n) \geq 2$, $\forall n \in I\!N$ entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es no numerable.*

Prueba.- La prueba es análoga a la demostración de la Proposición previa, desde que $card(X_m) \geq 2$, $\forall m \in I\!N$.

Proposición 4.7 *El intervalo* $(0,1) = \{x \in I\!R,\ 0 < x < 1\}$ *es no numerable.*

Prueba.- Se sabe que si $a \in (0,1)$ entonces $a = 0.a_1\, a_2\, a_3 \ldots\, a_i \ldots$ representa la expresión decimal de a, donde $a_i \in \{0,1,2,3,\ldots 9\}$.

Antes de iniciar con la prueba observemos que (0,1) no es finito, mejor aún observemos que posee un subconjunto infinito numerable "trivial":

$$d_j := 0.0 \ldots 0 \underbrace{1}_{\text{j-ésima}} 0 \ldots 0, \ldots$$

Luego, $\{d_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,1)$.

Lo que también nos permite obtener: $card(I\!N) \leq card((0,1))$. Y usando que $\nexists f$ biyección entre $I\!N$ y (0,1), concluimos que

$$card(I\!N) < card((0,1)).$$

Podemos observar otros elementos conocidos de (0,1): $0.\overline{1}$, $0.\overline{2}$, $0.\overline{3}$, ... y $0.\overline{9}$

Ahora, pasamos a probar que $\{0,1\}^{I\!N}$ no es numerable.

Sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ un conjunto infinito numerable (arbitrario) de elementos de (0,1). Así,

$s1$	=	0.	$\mathbf{s11}$	$s21$	$s31$	$s41$	...	$sm1$	...
$s2$	=	0.	$s12$	$\mathbf{s22}$	$s32$	$s42$	...	$sm2$	...
$s3$	=	0.	$s13$	$s23$	$\mathbf{s33}$	$s43$	...	$sm3$	...
$s4$	=	0.	$s14$	$s24$	$s34$	$\mathbf{s44}$	...	$sm4$	...
$\vdots$	=	$\vdots$							
sm	=	0.	$s1m$	$s2m$	$s3m$	$s4m$	...	$\mathbf{smm}$	...
$\vdots$	=	$\vdots$							

Construimos

$$s^* = 0.\; s_1^* \; s_2^* \; s_3^* \; s_4^* \; \ldots \; s_m^* \; \ldots$$

tal que $s_m^* \neq s_{mm}$, $\forall m \in I\!N$. Esto es posible desde que $s_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$; así, para cada $m \in I\!N$ tomamos

$$s_m^* = \begin{cases} s_{mm} + 1, & \text{si } s_{mm} < 9 \ (\text{ i.e. } s_{mm} \in \{0,1,2,3,\ldots,8\}) \\ 0, & \text{si } s_{mm} = 9. \end{cases}$$

Luego, $s^* \in (0,1)$ y satisface: $s^* \neq s_m$, $\forall m \in I\!N$.

Esto es, $s^* \notin \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$. O sea, "ningún conjunto infinito numerable de (0,1) llega a ser todo (0,1)".

Otra forma de redactar esta prueba, sería proceder por el absurdo. Supongamos que exista una f biyección entre $I\!N$ y (0,1); luego $I\!N \equiv f(I\!N) = (0,1)$, denotemos a $f(I\!N) = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$. Para esta familia numerable aplicamos la diagonal de Cantor para construir $s^* \in (0,1) - \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\} \neq \emptyset$. Lo que contradice $f(I\!N) = (0,1)$.

Proposición 4.8 *IR es no numerable.*

Prueba.- Como $(0,1) \subset IR$ y $(0,1)$ es no numerable entonces IR es no numerable. O bien, como existe biyección entre IR y $(0,1)$, siendo $(0,1)$ no numerable entonces IR es no numerable.

Observación 4.1 *La proposición 4.8 también puede ser demostrado usando intervalos encajados, citamos [2].*

Proposición 4.9 *El conjunto de los números irracionales* I *es no numerable.*

Prueba.- Como $IR = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$ entonces I es no numerable. Supongamos que I fuese numerable entonces $\mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$ es numerable, lo cual es absurdo pues IR es no numerable.

Proposición 4.10 *El intervalo (a,b) no degenerado (i.e. $a < b$) es no numerable.*

Prueba.- Tenemos que existe la función $f : (a,b) \to (0,1)$, definida por $f(x) := \frac{1}{b-a}(x-a)$, que es biyectiva. Luego, (a,b) es no numerable. En efecto, supongamos que (a,b) sea numerable, i.e. existe φ biyección entre IN y (a,b), luego $f \circ \varphi$ es biyección entre IN y $(0,1)$, lo cual es absurdo.

Proposición 4.11 *Sea $a < b$, los intervalos $(a,b]$, $[a,b)$ y $[a,b]$ son no numerables.*

Prueba.- Desde que $(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$ y (a,b) es no numerable, entonces $(a,b]$ es no numerable. En efecto, si fuese numerable; usando el hecho de que "todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable", (a,b) sería numerable, lo cual es absurdo. Así, también, como $[a,b) = (a,b) \cup \{a\}$ y (a,b) es no numerable, entonces $[a,b)$ es no numerable. Y finalmente, como $[a,b] = (a,b) \cup \{a,b\}$ y (a,b) es no numerable, entonces $[a,b]$ es no numerable.

Observación 4.2 *Sean $a,b \in IR$, los intervalos (a,∞), $(-\infty,b)$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ son no numerables.*

En efecto, basta observar que para $\epsilon \geq 0$ existe $c \in IR$ tal que $(a+\epsilon,c) \subset (a,\infty)$ y como $(a+\epsilon,c)$ es no numerable, entonces (a,∞) no puede ser numerable. Por lo tanto, (a,∞) es no numerable y también lo es $[a,\infty)$ desde que $[a,\infty) \supset (a,\infty)$.

Análogamente se prueban los otros dos casos.

Ahora, introduciremos un resultado importante debido a Cantor.

Teorema 4.1 (Cantor) *Sea A un conjunto, entonces $\nexists f : A \to P(A)$ sobreyectiva, donde $P(A) := \{F, F \subset A\}$.*

Prueba.- Sea $f : A \to P(A)$ una función arbitraria, probaremos que f no es sobreyectiva. Esto es, probaremos que: $\exists B \in P(A)$ tal que

$$\nexists a \in A \text{ con } f(a) = B\,. \tag{4.1}$$

Definimos el conjunto,

$$B := \{x \in A, x \notin f(x)\} \subset A$$

Luego, $B \in P(A)$.

Ahora, probaremos (4.1). El enunciado (4.1) nos dice que "B no es imagen de ningún elemento de A"; esto es,

$$B \notin f(A) := \{f(x),\, x \in A\}.$$

Procederemos por el absurdo, i.e. suponemos que

$$\exists a \in A \text{ tal que } f(a) = B \tag{4.2}$$

Si $a \in B$, de la definición de B y (4.2) tenemos: $a \in A$ y $a \notin f(a) = B$, lo cual es absurdo.

Si $a \notin B$, de (4.2) tenemos que $a \in f(a) = B$, lo cual es absurdo.

Luego, vale (4.1).

Proposición 4.12 *Sea A un conjunto no vacío, definimos*

$$g : A \to P(A)$$

$$x \mapsto \{x\}$$

Entonces g es inyectiva. Además, $g : A \to g(A)$ *es biyectiva; de donde se deduce que* $A \equiv g(A) \subset P(A)$ *y* $card(A) \leq card(P(A))$.

Prueba.- En efecto, si $g(x) = g(y)$, esto es $\{x\} = \{y\}$, entonces $x = y$.

Proposición 4.13 *Sea A un conjunto no vacío, entonces* $\nexists f$ biyección *entre A y* $P(A)$. *Además,* $card(A) < card(P(A))$.

Prueba.- En efecto, si $\exists f$ biyección entre A y $P(A)$, entonces f es sobreyectiva, esto contradice al Teorema de Cantor.

Observación 4.3 $P(IN)$ *no es finito.*

En efecto, para cada $n \in IN$, definimos $A_n := IN - \{1,2,...n\}$, que es infinito numerable y subconjunto de IN; así

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(IN).$$

Proposición 4.14 $P(IN)$ *no es numerable y* $card(IN) < card(P(IN))$.

Prueba.- Es consecuencia de la proposición 4.13 aplicado a $A := IN$; esto es, $\nexists$ biyección entre IN y $P(IN)$. Luego, $P(IN)$ no es numerable.

Además, vale $card(IN) < card(P(IN))$.

Observación 4.4 *Otro modo de probar que* $P(IN)$ *es no numerable es identificandolo con* $\{0,1\}^{IN}$*, vía una* biyección ψ*; y como* $\{0,1\}^{IN}$ *es no numerable, entonces* $P(IN)$ *es no numerable.*

Esto es, ψ a cada $X \subset IN$ le asocia la sucesión de ceros y unos, donde el n- ésimo término es 1 si $n \in X$ y 0 si $n \notin X$.

Podemos evidenciar la acción de ψ, por ejemplo si $X := \{3,5,13\}$ entonces

$$\psi(X) = (0,0,1,0,1,\dots 0, \underbrace{1}_{\text{Posición } 13}, 0, \dots).$$

Si $Y := \{1,4\}$ entonces

$$\psi(Y) = (1,0,0, \underbrace{1}_{\text{Posición } 4}, 0, \dots, 0, \dots).$$

Si $U :=$ es el conjunto de los números pares entonces

$$\psi(U) = (0,1,0,1,0, \underbrace{1}_{\text{Posición par}}, \dots).$$

Si $V :=$ es el conjunto de los números impares entonces

$$\psi(V) = (1,0,1,0, \underbrace{1}_{\text{Posición impar}}, 0, \dots).$$

Observación 4.5 *Otro importante conjunto no numerable es el conjunto de Cantor.* Para ver esto citamos [2].

CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos realizado lo siguiente:

1. Estudio intuitivo de existencia de conjuntos numerables: unión y producto de una familia de conjuntos.
2. Usando el método de la diagonal de Cantor se probó la existencia de conjuntos no numerables.
3. Finalmente, estudiamos el Teorema de Cantor en conexión a no numerabilidad.

REFERENCIAS

1. Cantor, Georg -*Beiträge zur Begru¨ndung der transfiniten Mengenlehre (1)*. Mathematische Annalen, 1895; 46 (4): 481-512.

2. Lima, E. -*Análise Real, Vol 1*, IMPA Rio de Janeiro. (1989).

3. Lima, E. -*Curso de Análise, Vol 1*, Edición XIV, IMPA Rio de Janeiro. (2016).

4. Sze-Tsen Hu -*Elements of Real Analysis*, Holden-Day. (1967).