

# USO DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO NA AVALIAÇÃO NO PROCESSO DE CALIBRAÇÃO DE MICRÔMETRO

*Data de aceite: 26/08/2024*

### **Wellinton de Assunção**

Doutor em Engenharia Mecânica  
Universidade Estadual de Campinas  
(UNICAMP), São Luís, Maranhão, Brasil

### **Moisés dos Santos Rocha**

Doutor em Engenharia Mecânica  
Universidade Estadual de Campinas  
(UNICAMP), São Luís, Maranhão, Brasil

### **Mônica Frank Marsaro**

Doutora em Engenharia de Produção  
Universidade Federal de Pernambuco  
(UFPE), São Luís, Maranhão, Brasil

### **Jean Robert Pereira Rodrigues**

Doutor em Engenharia Mecânica  
Universidade Estadual de Campinas  
(UNICAMP), São Luís, Maranhão, Brasil

### **Rogério Cardoso Carvalho**

Especialista em Engenharia de Segurança  
do Trabalho, Faculdade Pitágoras - FAMA

### **Samuel Victor dos Santos Araújo**

Graduando em Engenharia de Produção  
Universidade Estadual do Maranhão  
(UEMA), São Luís, Maranhão, Brasil

### **Raí Dias Almeida**

Graduando em Engenharia de Produção  
Universidade Estadual do Maranhão  
(UEMA), São Luís, Maranhão, Brasil

### **Wellington Pereira Gomes**

Graduando em Engenharia de Produção  
Universidade Estadual do Maranhão  
(UEMA), São Luís, Maranhão, Brasil

**RESUMO:** O presente artigo apresenta um método para avaliar a incerteza da medição. Trata-se de um método proposto pelo Suplemento 1 do GUM (Guia para Expressão da Incerteza de Medição), chamado Simulação de Monte Carlo (SMC). Esse método utiliza as Funções de Densidade de Probabilidade (FDP) das grandezas de entrada e dos parâmetros da função de medição para estimar a incerteza padrão e os intervalos de abrangência da grandeza de saída. Para ilustrar a abordagem, a Simulação de Monte Carlo foi aplicada em um processo de calibração de um micrômetro em um laboratório de metrologia. Como resultados, identificou-se que as incertezas expandidas, obtidas após 100 mil simulações, para os pontos de calibração de 22 mm e 24 mm do micrômetro, foram de 0,0014 mm e 0,001 mm, respectivamente. Adicionalmente, mediante a análise de variância (ANOVA), constatou-se que a incerteza de repetibilidade foi a maior contribuição para a incerteza de medição nos dois pontos de calibração.

## USE OF MONTE CARLO SIMULATION IN THE EVALUATION OF THE MICROMETER CALIBRATION PROCESS

**ABSTRACT:** This article presents a method for evaluating measurement uncertainty. It is a method proposed by Supplement 1 of the GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement), called Monte Carlo Simulation (MCS). This method uses the Probability Density Functions (PDF) of the input quantities and the parameters of the measurement function to estimate the standard uncertainty and the coverage intervals of the output quantity. To illustrate the approach, the Monte Carlo Simulation was applied in a calibration process of a micrometer in a metrology laboratory. As a result, it was identified that the expanded uncertainties, obtained after 100 thousand simulations, for the calibration points of 22 mm and 24 mm of the micrometer, were 0.0014 mm and 0.001 mm, respectively. Additionally, through analysis of variance (ANOVA), it was found that repeatability uncertainty was the largest contribution to the measurement uncertainty at the two calibration points.

**KEYWORDS:** Measurement Uncertainty, Monte Carlo Simulation, Micrometer, Calibration.

### INTRODUÇÃO

A Metrologia, definida como a ciência da medição, tem como foco principal prover a confiabilidade, credibilidade, universalidade e qualidade às medições (CONMETRO, 2008). Como as medições estão presentes, direta ou indiretamente, em praticamente todos os processos de produção e de tomada de decisão, a abrangência da metrologia é imensa, envolvendo a indústria, o comércio, a saúde, a segurança, a defesa e o meio ambiente, entre outros (Barducci *et al.*, 2018).

No entanto, nenhuma medição é absolutamente exata. É essencial reconhecer que o resultado de uma medição é influenciado pelo sistema de medição, pelo procedimento adotado, pela perícia do operador, pelo ambiente e por outros efeitos pertinentes (GUM, 2008). Singh *et al.* (2021) ressaltam que o resultado de medição fornece apenas uma estimativa do mensurando (grandeza de interesse). Sendo assim, a representação completa desse mensurando deverá incluir a dúvida deste resultado, a qual é traduzida pela sua incerteza de medição (INMETRO, 2008).

A incerteza de medição, conforme definida no Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM, 2012, p. 45), é o “parâmetro associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentadamente atribuídos a um mensurando”. Incerpi (2008) acrescenta que a incerteza de medição é o resultado quantitativo que permite avaliar a confiabilidade do resultado de uma medição.

Dentre as técnicas disponíveis na literatura para avaliar a incerteza de medição, destaca-se um método numérico proposto pelo Suplemento 1 do GUM (Guia para Expressão da Incerteza de Medição), chamado Simulação de Monte Carlo (SMC). De acordo com Martins (2010), este método baseia-se na propagação das Funções de Densidade de Probabilidade (FDPs), atribuídas às grandezas de entrada, por meio de uma simulação numérica da função de medição para determinar a FDP do mensurando e os intervalos de abrangência da grandeza de saída.

Segundo Silveira, Anzanello e Etcheverry (2014), entre as vantagens da SMC, destaca-se que os dados de entrada podem apresentar qualquer tipo de distribuição, permitindo analisar cenários de forma ágil (alterando apenas os dados de entrada). Outra vantagem, apontada por Aurélio (2013), reside na inexistência de um algoritmo único para implementação da SMC, o que possibilita ajustar o procedimento de simulação de forma mais adequada à situação específica.

Diante do exposto, este artigo visa apresentar o método de Simulação de Monte Carlo (SMC) para avaliar a incerteza da medição. São demonstrados alguns aspectos importantes da técnica, como a estimativa e a descrição da incerteza em uma variável específica, além de um passo a passo simplificado para o seu cálculo. Para uma melhor compreensão, o método proposto foi aplicado em um processo de calibração de um micrômetro.

Acredita-se que este artigo contribuirá com a literatura disponível na área de avaliação de incerteza de medição em processos de calibração, auxiliando na análise de dados experimentais de maneira simples, clara e objetiva.

## REFERENCIAL TEÓRICO

A revisão teórica deste estudo aborda os temas que fundamentam a problemática da pesquisa em questão. Na subseção 2.1, apresenta-se uma breve análise da parte inicial do GUM (Guia Para Expressão da Incerteza de Medição), abordando os conceitos de modelo matemático e as incertezas padrão tipo A e B. Nas subseções 2.2 a 2.4, demonstra-se o Suplemento 1 do GUM, ou JCGM 101:2008, para o cálculo da incerteza de medição por Simulação de Monte Carlo (SMC).

### Modelo matemático e incerteza padrão tipo A e B

Para avaliar a incerteza de medição, é necessário estabelecer um modelo matemático, conforme demonstrado na equação 1.

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad (1)$$

Onde  $Y$  corresponde à quantidade ou medida que está sendo efetuada ou avaliada. Já  $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ , referem-se aos parâmetros ou variáveis independentes que são consideradas no processo de medição. Denominam-se, neste contexto,  $Y$  como a grandeza de saída ou mensurando e  $X_n$  como a grandeza de entrada (GUM, 2008).

O GUM (2008) apresenta diversos exemplos de mensurandos, como o volume de um recipiente, a massa de um objeto em uma balança, a diferença de potencial elétrico entre os terminais de uma bateria, a concentração de chumbo na água contida em um frasco, entre outros.

Landgraf e Stempniak (2004) salientam que, embora a função  $f$  seja geralmente expressa de forma analítica, em certas circunstâncias, ela pode ser descrita por meio de um conjunto de expressões. Essas expressões incorporam correções e fatores de ajuste para contemplar efeitos sistemáticos específicos. Bich, Cox e Harris (2006), por sua vez, comentam que este cenário resulta em uma equação mais complexa, impossibilitando sua representação por uma função analítica explícita.

Martins (2010) afirma que cada grandeza de entrada  $X_n$ , do modelo matemático, possui uma Função de Densidade de Probabilidade (FDP). Além disso, o autor enfatiza que os parâmetros estatísticos mais relevantes da FDP, do ponto de vista metrológico, incluem a esperança  $E[X]$ , que representa o valor esperado de uma variável aleatória, e a variância  $V_{ar}[X]$ . Dessa maneira, o resultado de uma medição é obtido pelo primeiro momento estatístico, expresso como:

$$\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_x(\xi) d\xi \quad (2)$$

Em que  $\xi$  representa os valores possíveis de uma variável aleatória  $X$ , a qual possui uma FDP de uma função  $g_x(\xi)$ . Segundo Reis (2017), a incerteza padrão de medição  $u(\mu_x)$  associada ao resultado de medição  $\mu_x$  é relacionada com o segundo momento estatístico centrado na esperança, logo:

$$u^2(u_x) = var[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu_x)^2 g_x(\xi) d\xi \quad (3)$$

Conforme evidenciado nas equações 2 e 3, é necessário conhecer a Função de Densidade de Probabilidade (FDP) da grandeza de entrada para expressar o resultado da medição  $\mu_x$  e sua respectiva incerteza padrão (Cox; Harris, 2003).

O GUM (2008) adota dois métodos para obter essas FDPs para as grandezas de entrada  $X_n$ : o primeiro consiste em obter uma FDP a partir de uma série de observações independentes (uma distribuição de frequência); o segundo método é a determinação de uma FDP *a priori* proveniente de um levantamento de informações das grandezas. Para Incerpi (2008), as incertezas obtidas a partir das distribuições de frequência são classificadas como incertezas padrão do tipo A, e as incertezas a partir de PDFs *a priori* como incertezas padrão do Tipo B.

De acordo com Farkas e Drégelyi (2018), a incerteza padrão do tipo A  $u_A$  é obtida por meio da análise estatística, utilizando o desvio padrão  $\sigma$  amostral dos  $n$  valores experimentais. Nesse contexto, a FDP associada à incerteza do tipo A é gaussiana (Landgraf; Stempniak, 2004). A equação 4 ilustra o procedimento do cálculo da incerteza do tipo A.

$$u_A = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Na avaliação da incerteza do tipo B, utilizam-se fontes de informações disponíveis sobre o processo de medição. Como Hiller e Reindl (2012) corroboram, quando a FDP de uma grandeza de entrada  $X_n$  é derivada do conhecimento geral ou da experiência relacionada ao processo de medição, o GUM classifica isso como uma FDP *a priori*, indicando que a forma dessa FDP é conhecida previamente. Dessa forma, a incerteza padrão do tipo B é fundamentada em conceitos da estatística Bayesiana (Lira, 2008). A equação 5 ilustra o cálculo da incerteza do tipo B.

$$u_B = \frac{E_m}{\sqrt{\text{div}}} \quad (5)$$

onde:

$u_B$  = Incerteza padrão do tipo B

$E_m$  = O erro máximo do instrumento

div = Divisor aleatório

Para Marton, Stary e Mensik (2014), o valor do divisor *div* da equação 5 depende da forma da FDP conhecida. Alguns desses valores estão apresentados no Quadro 1.

Fonte de incerteza	Divisor ( <i>div</i> )	FDP
Escala do instrumento	$2\sqrt{3}$	Retangular
Certificado de calibração	k	Gaussiana
Catálogo do instrumento	$\sqrt{3}$	Retangular
Variações de temperatura no instrumento	$\sqrt{6}$	Triangular

Quadro 1. Valores de divisores para determinação da incerteza do tipo B

Fonte: Adaptado de Reis (2017)

## Método de propagação de distribuições

A abordagem proposta pelo Suplemento 1 do GUM baseia-se na lei de propagação de distribuições. Segundo Martins *et al.* (2010), esta lei considera uma base probabilística generalizada para a avaliação da incerteza de medição, utilizando diretamente as FDPs atribuídas às grandezas de entrada  $X_n$ .

Para Cox e Harris (2003), neste método, os valores possíveis das grandezas de entrada  $X_n$  são simbolizados por  $\xi_n$ , enquanto a FDP para a grandeza de entrada  $X_n$  é simbolizada por  $g_{X_n}(\xi_n)$ . Por sua vez, os valores possíveis para a esperança de  $Y$  e sua FDP são simbolizados por  $n$  e  $g_Y(n)$ , respectivamente.

Cox e Siebert (2006) argumentam que a esperança de  $Y$  pode ser obtida pela FDP conjunta das grandezas de entrada, através da função de medição (equação 1), segundo a expressão:

$$E(Y) = E \left[ f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \dots, \xi_n) g_{X_1, \dots, X_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (6)$$

Pereira *et al.* (2022) destacam que a equação 6 possui um termo  $g_{X_1, \dots, X_n}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , que representa a Função de Densidade de probabilidade (FDP) conjunta das grandezas de entrada. Se as grandezas de entrada do modelo matemático forem mutuamente independentes, a FDP conjunta será o produto das FDPs individuais dessas grandezas (Reis, 2017; Bich; Cox; Harris, 2006).

Martins (2010, p. 23) enfatiza: “uma vez que a FDP das grandezas de entrada tenha sido atribuída, ela é propagada através da função de medição para gerar a FDP do mensurado  $Y(g_y(n))$ ”. Em outras palavras, a Função de Densidade de Probabilidade (FDP) para  $Y$  é obtida a partir das combinações apropriadas que se ajustam ao modelo dos possíveis valores das grandezas de entrada.

A representação da FDP do mensurado  $g_y(n)$  é demonstrada por meio das fórmulas 7 a 14, seguindo os conceitos apresentados por Arfken (2013), Cox e Siebert (2006), e Martins (2010).

Inicialmente, considere a função delta de Dirac  $\delta$ , definida por:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & x=a \\ 0 & x \neq a \end{cases} \quad (7)$$

Arfken (2013) esclarece que algumas propriedades úteis da função delta de Dirac devem ser apresentadas, tais como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1 \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (9)$$

Ao considerar,  $f(x) = x$  e  $f(a) = a$  e por conveniência, substituindo as variáveis  $x$  e  $a$  da função delta de Dirac por  $n$  e  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , obtém-se a equação 10. (Martins *et.al*, 2010; Cox; Siebert, 2006).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x-a) dx = f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} n \delta(n - f(\xi_1, \dots, \xi_n)) dn = f(\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (10)$$

A substituição do termo  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , dado pela equação 10, na equação 6 resultará em:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \delta(n - f(\xi_1, \dots, \xi_n)) g_{x_1, \dots, x_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_n \quad (11)$$

Por outro lado, ao adaptar a equação 2, ela pode ser reescrita por:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} n g_Y(n) dn \quad (12)$$

Igualando-se as equações 11 e 12, obtém-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n g_Y(n) dn = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n \delta(n - f(\xi_1, \dots, \xi_n)) g_{x_1, \dots, x_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_n \quad (13)$$

Dessa forma, ao comparar os dois lados da equação 13, a FDP para a grandeza de saída Y pode ser obtida por:

$$g_Y(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(n - f(\xi_1, \dots, \xi_n)) g_{x_1, \dots, x_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n \quad (14)$$

A equação 14 é conhecida como fórmula de Markov, e uma generalização dessa fórmula pode ser obtida para mais de uma grandeza de saída (Cox; Siebert, 2006). No entanto, o JCGM (2008, p. 21) salienta que, devido à impossibilidade de solução analítica da fórmula de Markov na maioria das funções de medição, é necessário utilizar um procedimento numérico para solucionar a equação 14. O método numérico adotado pelo Suplemento 1 do GUM está descrito no tópico 2.3 deste trabalho.

## Simulação de Monte Carlo

A implementação geral mais eficiente do método numérico para propagação de FDPs é a Simulação de Monte Carlo (SMC) (Cox; Harris, 2003).

A Simulação de Monte Carlo (SMC) é operacionalizada por meio de um processo iterativo e estocástico, no qual são geradas amostras representativas da FDP conjunta  $g_{x_1, \dots, x_n}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  das grandezas de entrada  $(X_1, \dots, X_n)$  (Aurélio, 2013; Martins, 2010). Essas amostras são selecionadas seguindo uma distribuição específica que reflete a incerteza associada às variáveis de entrada.

Em seguida, esses valores são propagados através da função de medição, permitindo assim a geração de uma FDP amostral das grandezas de saída Y, a qual se aproxima da FDP do mensurando  $g_Y(n)$  (Cox; Siebert, 2006; Reis, 2017). Segundo Singh *et al.* (2021), a partir da distribuição amostral, são obtidos os valores da média (que representa a estimativa y do mensurando Y), e do desvio padrão da FDP amostral.

Cox e Harris (2003) afirmam que a Simulação de Monte Carlo oferece resultados excelentes para a construção da Função de Densidade de Probabilidade (FDP) amostral do mensurando. Entretanto, Donatelli e Konrath (2006) destacam que um requisito fundamental para obter esses resultados é a escolha correta do número de medições simuladas  $M$ , de modo a assegurar que o erro de estimativa da simulação seja suficientemente pequeno.

Devido à alta velocidade dos computadores modernos, inúmeras tentativas podem ser processadas sem limitação de tempo. Assim, um valor de  $M = 100.000$  simulações é suficiente para qualquer *software* utilizado (Cox; Siebert, 2006).

## Intervalos de abrangência e incerteza expandida

Para avaliar a incerteza de medição, no método GUM (2008, p. 18-23), recomenda-se calcular a incerteza combinada por meio da lei de propagação de incertezas e do fator de abrangência  $k$  pela fórmula de Welch-Satterthwaite para determinar a incerteza expandida  $U$ . Esta última define um intervalo em torno do resultado da medição, no qual espera-se abranger uma extensa fração dos valores que podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando (Robbi *et al.*, 2015; GUM, 2008).

Contudo, no método proposto pelo JCGM (2008, p. 21-25), a incerteza expandida  $U$  para uma probabilidade de abrangência  $p$  é calculada a partir da função de distribuição acumulada  $G_Y(n)$  (obtida pela SMC) para  $Y$ , determinando, numericamente, os valores  $I_{pinf}$  e  $I_{psup}$ , que satisfazem:

$$G_Y(I_{psup}, p) - G_Y(I_{pinf}, p) = p \quad (15)$$

Em que  $I_{pinf}$  e  $I_{psup}$  são os pontos finais de um intervalo de abrangência de  $100p\%$  para o mensurando  $Y$ . Cox e Siebert (2006), apontam que se a FDP for unimodal (com um único pico) e simétrica em relação à sua expectativa, a incerteza expandida  $U$  pode ser obtida por:

$$U(Y) = \frac{I_{psup} - I_{pinf}}{2} \quad (16)$$

Segundo o JCGM (2008, p. 22), “quando a FDP para  $Y$  é simétrica em relação à estimativa  $y$ , o intervalo de abrangência pode ser representado por  $Y = [y \pm U(y)]$ ”. Nessa representação, o mensurando  $Y$  é delimitado pelos valores  $y-U$  e  $y+U$  para uma determinada probabilidade de abrangência  $p$ .

Convém salientar que o método descrito anteriormente revela-se inadequado quando a distribuição de saída não é simétrica (JCGM, 2008). Neste caso, o JCGM (2008) recomenda aplicar o procedimento de estimação do intervalo de abrangência mínimo.



## METODOLOGIA

O presente trabalho classifica-se, quanto à sua natureza, como uma pesquisa aplicada, uma vez que visa gerar conhecimentos direcionados à solução de problemas específicos relacionados à incerteza de medição. Destaca-se que, segundo Cervo, Bervian e Silva (2007), na pesquisa aplicada, o pesquisador é estimulado pela necessidade de contribuir para fins práticos, quase que imediatos, buscando soluções plausíveis para problemas realistas.

Quanto à abordagem, esta pesquisa é classificada como quali-quantitativa, incorporando o uso de técnicas estatísticas para seleção de variáveis e simulações, considerando que um determinado modelo será avaliado, e alguns dados quantitativos precisam ser fornecidos (Silva; Menezes, 2005).

Esta pesquisa também incorpora uma revisão bibliográfica para estabelecer a fundamentação teórica. A revisão bibliográfica permite uma investigação aprofundada de diversos autores e referências sobre um tema específico (Sousa; Oliveira; Alves, 2021). Além disso, a revisão auxilia a esclarecer os métodos utilizados na coleta e análise dos dados, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos resultados obtidos (Gray, 2012).

Após a revisão teórica, a pesquisa foi estruturada por meio de um estudo de caso para facilitar a compreensão do método proposto pelo Suplemento 1 do GUM. Os estudos de caso configuram-se como a estratégia preferida para investigar questões do tipo “como” e “por que”, especialmente quando o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos em análise e o foco recai sobre fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real (Yin, 2001).

Os dados obtidos para compor o estudo de caso foram coletados em um laboratório de metrologia, um ambiente especialmente projetado e equipado com instrumentação de última geração para garantir a precisão e a consistência das medições.

Quanto às ferramentas, empregou-se a Uncertainty Machine para conduzir a Simulação de Monte Carlo (SMC). A Uncertainty Machine (disponível em <https://uncertainty.nist.gov/>), é uma ferramenta desenvolvida em colaboração pelo governo dos Estados Unidos e pelo National Institute of Standards and Technology (NIST), codificada em linguagem R.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, um estudo de caso é apresentado para ilustrar a aplicação do método proposto pelo Suplemento 1 do GUM. O estudo de caso consiste em avaliar a incerteza de medição em um processo de calibração de um micrômetro.

## Estudo de caso

O estudo inicia-se com as especificações dos instrumentos. O instrumento a ser calibrado é um micrômetro com resolução padrão de 0,001 mm. Para realizar a calibração, foram utilizados três blocos padrão com comprimentos de 22 mm, 23,5 mm e 24 mm, cada um com resolução de 0,1  $\mu\text{m}$ . Além disso, cada bloco padrão possui uma incerteza declarada no próprio certificado de 0,05  $\mu\text{m}$ .

Inicialmente, foi verificado se o micrômetro estava limpo e livre de danos, como amassados ou riscos na escala. Posteriormente, o bloco padrão desejado foi posicionado sobre uma superfície plana e medido em diferentes pontos com o micrômetro. Para aumentar a confiabilidade dos resultados, foram realizadas 5 medições para cada bloco padrão.

A Tabela 1 apresenta os dados coletados da calibração do micrômetro.

Referência	Comprimento do bloco (mm)	Medições do micrômetro (mm)				
		1	2	3	4	5
1	22	22	22,003	22	22,003	22,001
2	23,5	23,5	23,501	23,5	23,5	23,5
3	24	24	24,001	24,002	24	24

Tabela 1. Número das medições, comprimento do bloco e indicações

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Adicionalmente, foram realizados os cálculos das médias, do desvio padrão e da correção do material. Esta última é obtida ao subtrair a média das indicações  $I$  do micrômetro do valor verdadeiro do bloco padrão. Os resultados desses parâmetros estão apresentados no Quadro 2.

Referência	Pontos de calibração (mm)	Média das Indicações ( $I$ )	Desvio padrão	Correção
1	22	22,0014	0,001356466	0,0014
2	23,5	23,5002	0,0004	0,0002
3	24	24,0006	0,0008	0,0006

Quadro 2. Dados do processo de calibração do micrômetro

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Pode-se observar, por meio do Quadro 2, que as médias obtidas estão bastante próximas dos valores originais do comprimento do bloco padrão, indicando uma elevada precisão do micrômetro utilizado. Além disso, os desvios padrão associados às medições são baixos, o que confirma uma boa repetibilidade e reprodutibilidade das leituras efetuadas.

## Definição do modelo matemático e cálculo das incertezas padrão

O procedimento inicial para a avaliação da incerteza de medição consiste em estabelecer a função de medição do sistema. Em seguida, realiza-se a avaliação da função metrológica das grandezas de entrada, que, neste caso, corresponde às leituras do micrômetro. Seguindo essa abordagem, a função proposta para avaliar as incertezas associadas à leitura do micrômetro, é apresentada na equação 17.

$$L = I + RM + RBP + RHBP \quad (17)$$

onde:

L= Leituras do micrômetro

I = Média das Leituras

RM = Resolução do micrômetro

RBP = Resolução do bloco padrão

RHBP = Herdada do bloco

Conforme explicado no tópico 2.1, o modelo matemático (equação 17) pode compor dois tipos de incertezas: a incerteza padrão tipo A e a incerteza padrão tipo B. Neste estudo, as incertezas associadas às variáveis de entrada do modelo matemático são: incerteza de repetibilidade (tipo A), incerteza associada à resolução do micrômetro (tipo B), incerteza associada à resolução do bloco padrão (tipo B) e incerteza herdada do bloco padrão (tipo B).

A incerteza associada à média das leituras  $I$ , também conhecida como incerteza de repetibilidade ( $IR$ ), foi calculada com base na equação 4. No ponto de 22 mm, para  $n = 5$  (que representa a quantidade de medições) e com desvio padrão de 0,001356466 mm, obteve-se uma repetibilidade de 0,000606 mm. No ponto de 23,5 mm, seguindo o mesmo procedimento do ponto de 22 mm, obteve-se uma repetibilidade de 0,000178885 mm. Por fim, no ponto de 24 mm, a incerteza de repetibilidade foi de 0,000357771 mm.

A incerteza associada à resolução do micrômetro ( $IRM$ ), foi calculada através da equação 5, com o  $E_m = 0,001$  mm e  $div = \sqrt{3}$ . O valor obtido foi de 0,00057735 mm para os três pontos de calibração.

Em relação à incerteza associada à resolução do bloco padrão ( $IBP$ ), foi adotado um erro máximo de  $0,1 \mu\text{m}$ , que representa sua resolução. Utilizando a equação 5, obteve-se o valor de 0,000058 mm para os pontos selecionados, considerando  $div = \sqrt{3}$ .

Por fim, a incerteza herdada do bloco padrão foi calculada usando a equação 5, com  $E_m = 0,05 \mu\text{m}$ , e um divisor  $k = 2$ . O resultado para os três pontos de calibração foi de 0,000025 mm.

Os resultados das incertezas tipo A e B para os pontos de calibração de 22 mm, 23,5 mm e 24 mm estão representados no Quadro 3.

Pontos de calibração (mm)	$IR(A)$	$IRM(B)$	$IRBP(B)$	$IHBP(A)$
22	0,00061	0,00057735	0,000058	0,000025
23,5	0,00018	0,00057735	0,000058	0,000025
24	0,00036	0,00057735	0,000058	0,000025

Quadro 3. incertezas associadas às variáveis de entrada do modelo matemático

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

## Simulação de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo foi executada utilizando a Uncertainty Machine do NIST (National Institute of Standards and Technology), com base nos dados apresentados no Quadro 3. Os pontos de calibração escolhidos para realizar a Simulação de Monte Carlo foram os de 22 mm e 24 mm.

A Figura 1 ilustra a primeira seção da Uncertainty Machine com os dados do ponto de calibração de 22 mm. Nesta seção ocorre a seleção das distribuições de probabilidade mais apropriadas para cada componente das grandezas de entrada do modelo matemático.

1. Seleccione Entradas e Escolha Distribuições

Número de quantidades de entrada: 4

Nomes das quantidades de entrada:

IR IRM IRBP IHBP

IR	Gaussiana (Média, Desvio Padrão)	22.0014	0.00061
IRM	Rectangular (Limite Esquerdo, Limite Direito)	-0.00057735	0.00057735
IRBP	Rectangular (Limite Esquerdo, Limite Direito)	-0.000058	0.000058
IHBP	Gaussiana (Média, Desvio Padrão)	0	0.000025

Correlações

Figura 1. Primeira seção da calculadora Uncertainty Machine

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Conforme ilustrado na Figura 1, a distribuição adotada para a incerteza de repetibilidade foi uma distribuição gaussiana, baseada na média e na repetibilidade das leituras efetuadas. Para a incerteza associada à resolução do micrômetro, adotou-se uma distribuição retangular com limite esquerdo e direito de 0,00057735 mm. Quanto à incerteza associada à resolução do bloco padrão, também foi utilizada uma distribuição retangular, com limite esquerdo e direito de 0,000058 mm. Ademais, para a incerteza herdada do bloco (IHBP), empregou-se uma distribuição normal com média 0 e desvio padrão de 0,000025 mm.

Na segunda seção da Uncertainty Machine, ilustrada na Figura 2, utiliza-se o modelo matemático descrito pela equação 17 para possibilitar a execução da Simulação de Monte Carlo.

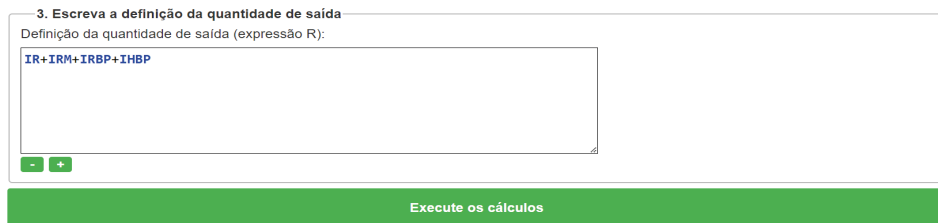


Figura 2. Segunda seção da calculadora Uncertainty Machine

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Após a definição dos parâmetros da primeira e segunda seção da calculadora, os cálculos da Simulação de Monte Carlo são executados. A Figura 3 demonstra a Função de Densidade de Probabilidade (FDP) assumida pelo mensurando após 100 mil simulações para o ponto de calibração de 22 mm.

```

===== RESULTADOS =====

Método de Monte Carlo

Estatísticas de sumário para amostra de tamanho 1000000

Média      = 22.0014
Desvio Padrão  = 0.000693
mediana    = 22.0014
mad        = 7e-04

Symmetrical coverage intervals

99% ( 21.9996, 22.0032)   k = 2.6
95% ( 22, 22.0027)       k = 1.9
90% ( 22.0003, 22.0025)  k = 1.6
68% ( 22.0007, 22.0021)  k = 1

ANOVA (% Contributions)

          Sem Resíduo   Com Resíduo
IR              76.52   76.52
IRM             23.12   23.12
IRBP              0.23   0.23
IHBP              0.13   0.13
Residual                NA   0.00
  
```

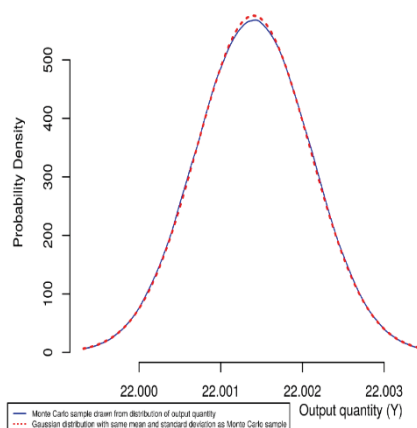


Figura 3. Relatório de dispersão gerado para o ponto de 22 mm

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Na Figura 3, para o intervalo de abrangência de 95%, o limite inferior  $I_{pint}$  e superior  $I_{psup}$  foram de 22 mm e 22,0027 mm respectivamente. A simulação obteve como média 22,0014 mm e desvio padrão de 0,0006 mm. Como a FDP do mensurando é aproximadamente simétrica, a incerteza expandida  $U$  para esse caso pode ser obtida pela diferença entre os limites superior e inferior dividido por 2 (equação 16), o que resulta em 0,0014 mm.

A análise de variância (ANOVA), conforme demonstrado na Figura 3, permite identificar a porcentagem de contribuição de cada variável de entrada para a incerteza de medição. Neste contexto, no ponto de 22 mm, a incerteza de repetibilidade teve um impacto de 76,52% sobre o resultado da incerteza final, enquanto a incerteza associada à resolução do micrômetro contribuiu com 23,12%. Quanto à incerteza relacionada à resolução do bloco padrão, sua contribuição foi de 0,23%, enquanto a incerteza herdada do bloco padrão apresentou um valor de 0,13%.

Para executar a Simulação de Monte Carlo para o ponto de calibração de 24 mm, foi adotado o mesmo procedimento do ponto de 22 mm. A Figura 4 ilustra a FDP assumida pelo mensurando após 100 mil simulações para o ponto de calibração de 24 mm.

```

===== RESULTADOS =====
Método de Monte Carlo

Estatísticas de sumário para amostra de tamanho 1000000

Média      = 24.0006
Desvio Padrão  = 0.000491
mediana    = 24.0006
mad        = 0.00051

Symmetrical coverage intervals

99% ( 23.9994, 24.0018)   k = 2.4
95% ( 23.9997, 24.0015)   k = 1.9
90% ( 23.9998, 24.0014)   k = 1.6
68% ( 24.0001, 24.0011)   k = 1

ANOVA (% Contributions)

          Sem Resíduo   Com Resíduo
IR          53.15       53.15
IRM         46.13       46.13
IRBP         0.46        0.46
IHBP         0.26        0.26
Residual           NA        0.00
    
```

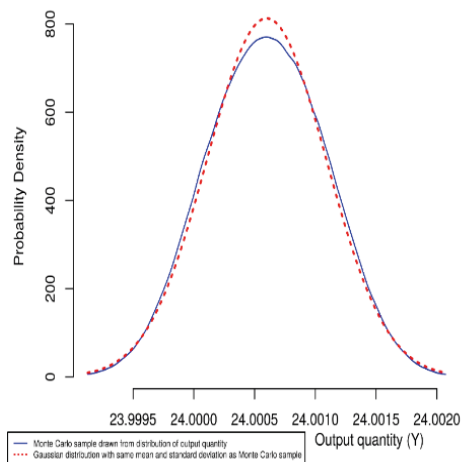


Figura 4. Relatório de dispersão gerado para o ponto de 24 mm

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

No ponto de 24 mm (Figura 4), obteve-se uma média de 24,006 mm e um desvio padrão de 0,004 mm. Dado que a Função de Densidade de Probabilidade (FDP) é aproximadamente simétrica, pode-se seguir o mesmo procedimento descrito anteriormente para o cálculo da incerteza expandida. Dessa forma, a incerteza expandida para o ponto de 24 mm é igual a 0,001 mm.

Com base na análise de variância do ponto de calibração de 24 mm, observa-se que a incerteza de repetibilidade possui uma influência de 53,15% sobre a incerteza de medição. Enquanto isso, as incertezas relacionadas à resolução do micrômetro, do bloco padrão e a herdada do bloco tiveram influências de 46,13%, 0,46% e 0,26%, respectivamente.

É válido ressaltar que, embora a incerteza de repetibilidade no ponto de 24 mm apresente uma influência reduzida de 20,52% em relação ao ponto de 22 mm, ela permanece como a principal contribuição para a incerteza de medição entre todas associadas as fontes de entradas consideradas, independentemente do ponto de calibração analisado.

## Resultado de medição

Dado que as informações sobre a incerteza expandida  $U$ , a estimativa  $y$  e a correção  $C_c$  do micrômetro estão disponíveis, é possível determinar o resultado de medição do micrômetro pelo intervalo  $y \pm [U(y) + C_c]$ .

No ponto de calibração de 22 mm, por exemplo, para um média de 22,014 mm, incerteza expandida de 0,0014 mm e correção de 0,00014 mm, o intervalo de abrangência de 95% para o verdadeiro comprimento medido do micrômetro é de  $(22,0014 \pm 0,0028)$  mm. Isso significa que há 95% de probabilidade de que o valor real do comprimento esteja dentro desse intervalo. Em contrapartida, para o ponto de 24 mm, o intervalo encontrado foi de  $(24,5002 \pm 0,0016)$  mm para um intervalo de confiança de 95%.

Com base nos resultados dos pontos de 22 mm e 24 mm, caso haja indícios de uma incerteza significativa na determinação do intervalo e na estimativa da média dos dados, a utilização da Simulação de Monte Carlo (SMC) pode ser empregada de maneira confiável para avaliar a incerteza de medição.

## CONCLUSÃO

Neste estudo, realizou-se uma análise abrangente do método proposto pelo Suplemento 1 do GUM (Guia para Expressão da Incerteza de Medição), este que se baseia na lei de propagação de distribuições através da Simulação de Monte Carlo (SMC). Para aplicação e exploração dos métodos, a metodologia proposta foi aplicada em um processo de calibração de um micrômetro em um laboratório de metrologia.

Os valores das incertezas expandidas encontrados para os pontos de calibração do micrômetro de 22 mm e 24 mm variam entre  $\pm 0,014$  mm e  $\pm 0,01$  mm, respectivamente, considerando uma probabilidade de abrangência de 95,45%. Observou-se que a incerteza da repetibilidade ( $IR$ ) foi a fonte de maior contribuição para a incerteza de medição em ambos os pontos de calibração, com influência de 76,52% e 53,15%, respectivamente.

As principais vantagens da Simulação de Monte Carlo (SMC) identificadas neste artigo foram: a geração de uma Função Densidade de Probabilidade (FDP) para o mensurando, o que permitiu a determinação do intervalo de abrangência, desvio padrão, média, mediana, além de outros parâmetros estatísticos relevantes. Convém salientar que a precisão desses parâmetros está diretamente relacionada ao número de simulações realizadas. Geralmente, recomenda-se o uso de mais de 100 mil simulações para garantir resultados confiáveis, embora esse número possa variar dependendo da complexidade do problema e dos requisitos de precisão.

Este trabalho deixa como contribuição um método que se destaca como uma alternativa mais sólida e eficaz para avaliar a incerteza de medição em sistemas, sejam eles lineares ou não. Através de uma abordagem simplificada e utilizando um fator de correção conhecido, o método permite estimar a incerteza de medição com alta precisão. Para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação da mesma metodologia para determinar a incerteza de medição em processos de calibração similares, em conjunto com o software Uncertainty Machine para realizar a Simulação de Monte Carlo.

## REFERÊNCIAS

AURÉLIO, M. C. **Seleção de variáveis para clusterização com visitas ao aprimoramento de processos produtivos**. 2013. 53f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

ARFKEN, G. B. *Mathematical methods for physicists*. [s.l.] **Elsevier Science**, 2013.

BARDUCCI, G. S. et al. Análise de dimensional e rugosidade dos materiais com instrumentos metrológicos. **Revista Engenharia em Ação UniToledo**, v. 3, n. 2, 2018.

BICH, W.; COX, M. G.; HARRIS, P. M. Evolution of the 'guide to the expression of uncertainty in measurement'. **Metrologia**, v. 43, n. 4, p. S161–S166, 2006.

COX, M.; HARRIS, P. The GUM and its planned supplemental guides. **Accreditation and quality assurance**, v. 8, n. 7–8, p. 375–379, 2003.

COX, M. G.; SIEBERT, B. R. L. The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. **Metrologia**, v. 43, n. 4, p. S178–S188, 2006.

CONMETRO – Conselho Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial. **Diretrizes estratégicas para a Metrologia Brasileira**. 2008.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. **Metodologia Científica**. 6ª edição. São Paulo: Pearson / Prentice Hall, 2006.

DA SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. T. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4ª edição. UFSC, Florianópolis, v. 123, 2005.

DE SOUSA, A.; OLIVEIRA, G. S.; ALVES, L. H. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. **Cadernos da FUCAMP**, v. 20, n. 43, 2021.

DONATELLI, G. D.; KONRATH, A. C. Simulação de Monte Carlo na avaliação de incertezas de medição. **Revista de Ciência & Tecnologia**, v. 13, n. 6, p. 5 - 15, 2005.

FARKAS, G.; DRÉGELYI-KISS, Á. Measurement uncertainty of surface roughness measurement. IOP conference series. **Materials science and engineering**, v. 448, p. 012020, 2018.

GRAY, D. E. **Pesquisa no Mundo Real**. 3ª edição. Porto Alegre: Artmed Editora, 2012.

GUM – **Guia para Expressão de Incertezas de Medições**. Avaliação de dados de medição, 2008.



HILLER, J.; REINDL, L. M. A computer simulation platform for the estimation of measurement uncertainties in dimensional X-ray computed tomography. **Measurement: journal of the International Measurement Confederation**, v. 45, n. 8, p. 2166–2182, 2012.

INMETRO – Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. **A estimativa da incerteza de medição pelos métodos do ISO GUM 95 e de simulação de Monte Carlo**. 2008.

INCERPI, P.H. **Incerteza de medição – método proposto para a análise da conformidade do produto**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Itajubá, Itajubá. 2008.

JCGM – Joint Committee for Guides in Metrology. **Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method**. 2008.

LANDGRAF, W. R.; STEMPNIAK, C. R. Simulação de Monte Carlo e ferramentas para avaliação da incerteza de medição. In: **Congresso Latino Americano de Metrologia**. 2004.

LIRA, I. The generalized maximum entropy trapezoidal probability density function. **Metrologia**, v. 45, n. 4, p. L17–L20, 2008.

MARTINS, M. A. F. et al. Comparação entre os métodos linear e não linear para a avaliação da incerteza de medição. **Controle & Automação**, v. 21, n. 6, p. 557–576, 2010.

MARTINS, M. A. F. **Contribuições Para a Avaliação da Incerteza de Medição No Regime Estacionário**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial). Universidade Federal da Bahia, Salvador. 2010.

MARTON, D.; STARY, M.; MENSIK, P. Water management solution of reservoir storage function under condition of measurement uncertainties in hydrological input data. **Procedia engineering**, v. 70, p. 1094–1101, 2014.

PEREIRA, G. N. D. et al. Analysis of the economic viability of organic production system of ornamental pineapple plants for cut stems. **Ornamental Horticulture**, v. 28, n. 1, p. 99–109, 2022.

REIS, S. F. DA S. **Quantificação de incertezas em método de aceleração para determinação da inércia de rotação**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica). Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

ROBBI, D. B. et al. Quantificação de incertezas em experimento simples de vibrações. **Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia**. v. 1 n. 1, p. 1-25, 2015.

SILVEIRA, M. C.; ANZANELLO, M. J.; ETCHEVERRY, G. V. Programação de produção via seleção de variáveis e simulação de Monte Carlo. **Revista produção online**, v. 14, n. 2, p. 764–788, 2014.

SINGH, J. et al. A Monte Carlo simulation investigation on the effect of the probability distribution of input quantities on the effective area of a pressure balance and its uncertainty. **Measurement: journal of the International Measurement Confederation**, v. 172, n. 108853, p. 108853, 2021.

VIM – Vocabulário Internacional de Metrologia. **Conceitos fundamentais e gerais e termos associados**. 2012.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.