

# UMA CONEXÃO: SEQUÊNCIAS E FRACTAIS

---

*Data de aceite: 02/09/2024*

### **Renan Alves Gomes**

Graduando em Licenciatura em  
Matemática das Faculdades Integradas de  
Fernandópolis – FIFE

### **Rosana Silva Bonfim**

Professora, Mestra pelo Programa de  
Mestrado Profissional em Matemática e  
Docente das Faculdades Integradas de  
Fernandópolis, SP

podem ser encontradas em diversas áreas do conhecimento. As sequências numéricas são usadas para descrever uma variedade de processos matemáticos através do seu comportamento à medida que convergem ou divergem

**PALAVRAS-CHAVES:** Fractal. Sequências. Séries Numéricas. Triângulo de Sierpinski. Curva de Koch

**RESUMO:** Os fractais são figuras geométricas de uma extrema beleza que apresentam padrões repetitivos e são encontrados em diversos casos na natureza, como em plantas, árvores, folhas flores, conchas do mar e outros com padrões interessantes e as vezes complexo de entender. Neste projeto busca-se encontrar esses padrões e estudar os fractais para facilitar o estudo das sequências numéricas através da identificação de padrões repetitivos. Através da análise de fractais é possível identificar padrões que se repetem ao longo do tempo e que podem ser interpretados como indicadores de comportamento de sequências numéricas. As sequências numéricas e séries numéricas são fundamentais para a matemática e

**ABSTRACT:** Fractals are geometric figures of extreme beauty that present repetitive patterns and are found in many cases in nature, such as in plants, trees, leaves, flowers, sea shells and others with interesting patterns that are sometimes complex to understand. This project seeks to find these patterns and study fractals to facilitate the study of numerical sequences through the identification of repetitive patterns. Through fractal analysis it is possible to identify patterns that repeat over time and that can be interpreted as indicators of the behavior of numerical sequences. Numerical sequences and numerical series are fundamental to mathematics and can be

found in different areas of knowledge. Number sequences are used to describe a variety of mathematical processes through their behavior as they converge or diverge

**KEYWORDS:** Fractal. Sequences. Numerical Series. Sierpinski triangle. Koch curve

## INTRODUÇÃO

A origem deste estudo decorreu de diálogos que destacam a beleza intrínseca das demonstrações apresentadas nas aulas de Análise Matemática. Essa apreciação serviu como alicerce para a pesquisa centrada nas sequências numéricas presentes nos fractais: Triângulo de Sierpinski e na Curva de Koch. De particular relevância são as sequências convergentes, as quais proporcionam uma abordagem aprofundada sobre o conceito de limite. Este estudo visa não apenas explorar a vasta gama de sequências numéricas, mas também concentrar-se em algumas notáveis, tanto clássicas quanto aquelas intrínsecas aos fractais. Essa abordagem ampliada nos permitirá não apenas desvelar os limites, mas também apreciar a riqueza e complexidade das sequências presentes em estruturas fractais, enriquecendo assim nossa compreensão dos fenômenos matemáticos subjacentes

Nas disciplinas introdutórias de Cálculo, a abordagem inicial da noção de limite geralmente ocorre de forma intuitiva. Nesse contexto, os leitores que se deparam pela primeira vez com a definição rigorosa desse conceito podem questionar sua relevância. Afinal, em certos problemas, só podemos empregar a definição de limite após determinarmos o limite em cada caso específico. Contudo, é imperativo compreender a importância da definição precisa, pois ela possibilita o desenvolvimento de uma teoria robusta do limite, que serve como base para todas as teorias subsequentes da Análise Matemática

Chamamos de sequência numérica uma sucessão de números reais. É uma função  $f$  definida nos números naturais:  $f: n \rightarrow f(n) = a_n$ . O número  $n$  que aí aparece é chamado de índice da sequência, e  $a_n$  o  $n$ -ésimo termo da sequência ou seu termo geral

Uma sequência numérica é uma lista ordenada de números que segue uma determinada ordem. Cada elemento da sequência é identificado por um índice, geralmente um número natural. Formalmente, uma sequência numérica pode ser representada como uma função  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{N}$  é o conjunto dos números naturais e  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais definida por  $f(n) = a_n$ . A notação usual para denotar a sequência é  $a_n$  ou  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , onde  $a_n$  representa o  $n$ -ésimo termo da sequência

Nos últimos tempos, diferentes definições de fractais têm surgido. Porém, a noção que motivou todas as definições foi introduzida por Benoit Mandelbrot. De acordo com Sallum (2005):

Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro. (SALLUM, 2005)

Sendo assim, um fractal tem como característica replicar um determinado padrão de pequenas e sucessivas variações. Resultante dessa autossimilaridade, as diferentes partes de um fractal se mostram semelhantes ao todo. Logo, os fractais possuem cópias aproximadas de si em seu interior.

O Triângulo de Sierpiński, assim chamado em homenagem ao matemático polonês Waclaw Sierpiński (1882-1969), é um fractal autossimilar. A estrutura desse fractal é originada por meio de iterações, durante as quais um triângulo equilátero é subdividido em quatro triângulos semelhantes. No decorrer desse processo, o triângulo central, invertido, é removido, e a iteração é repetida nos triângulos restantes. Esse padrão de divisão e remoção sucessivos cria a característica autossimilar do Triângulo de Sierpiński

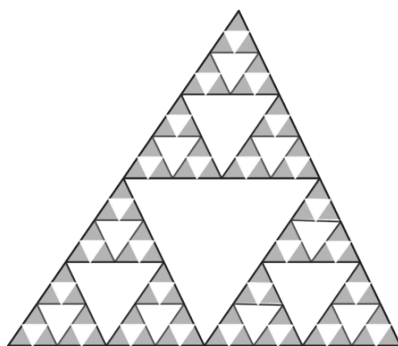


Figura 1: Triângulo de Sierpinski  
Os Autores

A Curva de Koch, concebida pelo matemático sueco Helge von Koch (1870-1924), destaca-se como um dos primeiros fractais documentados. Sua formação inicia-se ao dividir um segmento de reta em três partes, com a construção de um triângulo equilátero no terço central e a subsequente remoção do segmento base desse triângulo. Esse procedimento é então repetido em todos os segmentos restantes a cada iteração. Dessa maneira, a Curva de Koch se desenvolve por meio de um processo iterativo que enfatiza a autossimilaridade, característica distintiva dos fractais

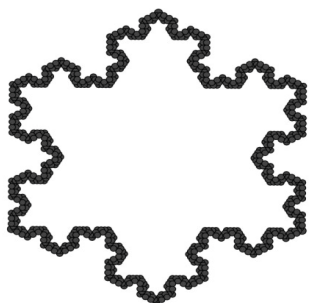


Figura 3: Curva de Koch  
Os Autores

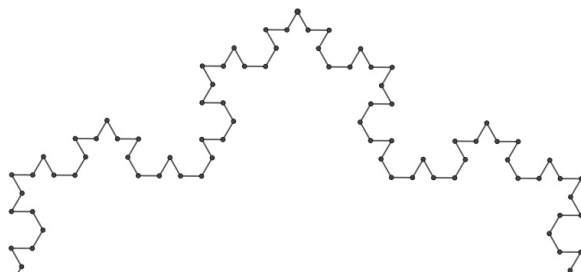


Figura 2: Parte da Curva de Koch  
Os Autores

## DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Na imensidão dos estudos matemáticos, as sequências que surgem na análise de fractais têm cativado a atenção de pesquisadores e educadores. Nesta iniciação científica, nos propomos a mergulhar no desenvolvimento teórico dessas sequências intrincadas, desvelando os padrões matemáticos que permeiam as estruturas fractais como o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch. Nesta seção, faremos o desenvolvimento teórico necessário para compreender a natureza e as propriedades dessas sequências fascinantes

À medida que exploramos a complexidade dessas sequências, inevitavelmente nos deparamos com a oportunidade de traçar um paralelo entre as intrincadas sequências fractais e as sequências numéricas abordadas no ensino médio. Enquanto os fractais oferecem uma perspectiva mais aprofundada e visualmente rica, há uma oportunidade única de relacionar essas sequências complexas com os conceitos mais acessíveis apresentados no ensino médio. Através dessa conexão, não apenas desvendamos os mistérios matemáticos dos fractais, mas também destacamos a relevância e aplicabilidade desses conceitos mais avançados no contexto educacional, proporcionando uma ponte entre o fascinante mundo dos fractais e o currículo do ensino médio

### Progressão Geométrica (PG)

O estudo da progressão geométrica pode nos ajudar a entender os padrões das sequências contidas nos fractais. Sendo assim, podemos definir uma progressão geométrica (PG) como uma sequência de números reais, onde o seu primeiro termo é diferente de zero e os termos consecutivos são obtidos multiplicando-se o termo anterior por uma constante não nula chamada de razão da PG. Então seja  $q$  a razão da PG, temos:

$$a_n = a_{n-1} \times q$$

Desse conceito, podemos extrair que se uma PG dada por  $(a_n)$ , tal que  $(a_n) = (a_1;$

$a_2; a_3; \dots; a_n)$  temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^1,$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2,$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3,$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Então, o termo geral de uma PG é  $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$

## Conceito de Limite e Algumas Propriedades

Uma sequência  $(a_n)$  é convergente se quanto maior for o índice mais próximo o elemento estará de um certo número  $L$ , chamado de limite da sequência. A definição de convergência nos traz que  $a_n$  é suficientemente próximo de  $L$  se a distância, dada pelo valor absoluto da diferença entre eles, for menor que um certo  $\varepsilon > 0$ . Portanto, diz-se que  $a_n$  converge pra  $L$ , ou tem limite  $L$  se, dado  $\varepsilon > 0$ , é sempre possível encontrar um índice  $N$  tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Note que, quando dissermos “dado qualquer  $\varepsilon > 0$ ”, fica implícito que  $\varepsilon$  pode ser arbitrariamente pequeno, ou seja, tão pequeno quanto quisermos

O cálculo de limite pode tornar-se mais e mais complicado, se insistirmos em fazê-lo diretamente da definição de convergência. Felizmente, com essa definição podemos estabelecer as propriedades tratadas logo adiante, as quais permitem simplificar bastante o cálculo de limites. (Ávila, 2006)

Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas sequências convergentes, com limites  $a$  e  $b$  respectivamente. Então,  $(a_n + b_n)$ ,  $(a_n b_n)$  e  $(ka_n)$ , onde  $k$  é uma constante qualquer, são respectivamente convergentes, além do que,

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b;$$

**Demonstração:** Dado um  $\varepsilon > 0$ ,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Se fizermos  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  a partir de um índice  $N_1$  e  $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  a partir de um índice  $N_2$ , temos:

$$|a_n - a| + |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, se tomarmos um índice  $N$ , tal que  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , então

$$n \geq N \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| \leq \varepsilon$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = ka;$$

**Demonstração:** Dado um  $\varepsilon > 0$ ,

$$|kan - ka| = |k(an - a)| \leq |k| |an - a|$$

Se fizermos  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{|k|}$  a partir de um índice  $N$ , então

$$|k| |a_n - a| \leq |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$$

Portanto,  $n \geq N \Rightarrow |ka_n - ka| \leq \varepsilon$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = ab;$$

**Demonstração:** Dado um  $\varepsilon > 0$ , e o fato de que a sequência  $b_n$  seja limitada por uma constante positiva  $M$ , então

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq M|a_n - a| + |a||b_n - b|,$$

Note que, tanto  $|a_n - a|$  como  $|b_n - b|$  podem ser muito pequenos, desde que seus índices sejam suficientemente grandes. Assim, se fizermos  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$  a partir de um índice  $N_1$  e  $|b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|a|}$  a partir de um índice  $N_2$ , temos:

$$M|a_n - a| + |a||b_n - b| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + |a| \frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Então, basta tomarmos um índice  $N$ , tal que  $N = \max\{N_1, N_2\}$  para satisfazer que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq \varepsilon$$

**d) Se, além das hipóteses acima,  $b \neq 0$ , então existe o limite de:  $\frac{a_n}{b_n}$ , igual a  $\frac{a}{b}$ .**

**Demonstração:** Para a demonstração dessa propriedade, repare que  $\frac{a_n}{b_n}$  pode ser interpretada pelo produto de  $a_n \left(\frac{1}{b_n}\right)$ , de forma que, em vista da propriedade do limite do produto já demonstrada, basta provarmos que  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . Sendo assim, temos

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right|$$

Como  $b \neq 0$ , a partir de um índice  $N_1$ ,  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ , e, dado um  $\varepsilon > 0$ , a partir de um índice  $N_2$ ,  $|b_n - b|$  pode ser feito menor que  $\frac{|b|^2 \varepsilon}{2}$ . Se tomarmos  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , provamos que

$$\frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{\frac{|b|^2 \varepsilon}{2}}{\frac{|b|}{2} |b|} = \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{|b|^2} = \varepsilon.$$

Dizer que se existe um número  $A$  tal que  $A \leq a_n$  então a sequência é limitada a esquerda ou limitada inferiormente, e se existe  $B$  tal que  $B \geq a_n$  então a sequência é limitada a direita ou limitada superiormente. Quando a sequência é limitada a direita e a esquerda ao mesmo tempo, simplesmente dizemos que ela é limitada

**Teorema.** Toda sequência convergente é limitada

**Demonstração:** Dado um  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $N$  tal que

$$n > N \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

Seja

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_N|, |L - \varepsilon|, |L + \varepsilon|\}$$

Então  $|a_n| \leq M$  para todo  $n$ , o que prova que a sequência é limitada

## Critérios de convergências

Há uma classe importante de sequência limitada (as chamadas sequências monótonas) que são convergentes

Diz-se que uma sequência  $(a_n)$  é crescente se  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ ; e decrescente se  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ . Diz-se que a sequência é não-decrescente se  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ ; e não-crescente se  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ . Diz-se que a sequência é monótona se satisfaz qualquer uma dessas condições. (ÁVILA, 2006, p. 85)

**Teorema.** Se uma sequência é monótona e limitada então ela é convergente

**Demonstração:** Consideremos uma sequência  $(a_n)$  não decrescente; podemos afirmar que ela é limitada inferiormente pelo elemento  $a_1$ . A hipótese de ser limitada significa que ela é limitada superiormente, ou seja, seu conjunto de valores possui um supremo  $S$ . Vamos provar que esse número  $S$  é o limite de  $a_n$

Dado um  $\varepsilon > 0$ , existe um elemento  $a_N$ , tal que  $S - \varepsilon < a_N \leq S$ . Ora, como a sequência é não decrescente,  $n > N$  implicará  $a_N \leq a_n$ , logo

$$n > N \Rightarrow S - \varepsilon < a_n \leq S < S + \varepsilon$$

## DISCUSSÃO DO PROBLEMA

Ao explorarmos os padrões intrincados dos fractais, notadamente o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch, deparamo-nos com sequências numéricas que despertam nossa curiosidade. Que sequências são essas? Seguem alguma lei de formação específica? E, fundamentalmente, serão convergentes? Nesta seção, dedicaremos nossa atenção ao meticuloso desenvolvimento do raciocínio e à formulação das equações que nos permitirão não apenas identificar, mas compreender profundamente essas sequências, desvendando os segredos matemáticos que permeiam essas estruturas fractais

## TRIÂNGULO DE SIERSPINSK

O Triângulo de Sierpinski tem sua estrutura formada por iterações, durante as quais um triângulo equilátero é subdividido por segmentos com extremidades nos pontos médios de cada aresta, formando quatro novos triângulos semelhantes. No decorrer desse processo, o triângulo central, invertido, é removido, e a iteração é repetida nos triângulos restantes



Figura 4: Os cinco primeiros níveis da construção do Triângulo de Sierpinski

Imagem da Internet: <https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fwww2.uff.br%2Ffractalize%2Fwp-content%2Fuploads%2Fsites%2F229%2F2021%2F05%2FI2P15.png&tbid=OXqTpnHHu2dhfM&vet=12ahUKEwiSg-Hmh56DAxUZALKGHWKuBa8QMygBegQIARBY..i&imgrefurl=https%3A%2F%2Fwww2.uff.br%2Ffr>

Ao analisarmos o comprimento do lado de cada triângulo em cada iteração obtemos as seguintes respostas

<b>Interações</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>...</b>	<b><i>n</i></b>
<b>Comprimento do lado</b>	<b>1</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	<b>...</b>	<b>?</b>
<b>Índice</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>...</b>	<b><i>n</i> - 1</b>

Note que podemos escrever cada elemento da sequência como sendo um múltiplo de  $\frac{1}{2}$ .

$$a_1 = 1 = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^0;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^1;$$

$$a_3 = \frac{1}{4} = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$a_4 = \frac{1}{8} = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Então, a sequência é uma PG de razão  $\frac{1}{2}$  e seu termo geral é  $a_n = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

Podemos dizer ainda que  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$ . Como uma potência de base 1 será sempre 1 independente do expoente, então  $a_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ . Sabendo que  $2^{n-1}$  tende a infinito, então  $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$  tende a zero

Vamos provar, segundo a definição que a sequência  $a_n$  tende a zero

Dado um  $\varepsilon > 0$ ,

$$|a_n - 0| = \left| \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) - 0 \right| = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) < \varepsilon \Rightarrow 1 < (2^{n-1})\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1 < \log(2^{n-1} \cdot \varepsilon) \Rightarrow 0 < \log 2^{n-1} + \log \varepsilon \Rightarrow -\log \varepsilon < (n-1) \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1 > \frac{-\log \varepsilon}{\log 2} \Rightarrow n-1 > -\log_2 \varepsilon \Rightarrow n > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1.$$

Note que quanto menor for  $\varepsilon$  maior será  $\frac{1}{\varepsilon}$ .



Seja  $N$  um índice da sequência, tal que  $N = \log_z\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ , então

$$n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

Vimos que a sequência converge para zero além de ser limitada por 1 e 0, isso satisfaz as condições necessárias para ser uma sequência monótona

Ao observarmos a área total do triângulo, considerando que a cada iteração o triângulo central é removido, deixando assim uma área sem preenchimento, conseguimos identificar um outro padrão de repetição

<i>Interações</i>	0	1	2	3	...	$n$
<i>Área total</i>	$A$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	...	?
<i>Índice</i>	1	2	3	4	...	$n - 1$

Note que podemos escrever cada elemento da sequência como sendo múltiplo de  $\frac{3}{4}$   
 $a_1 = A;$

$$a_2 = \frac{3}{4};$$

$$a_3 = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2;$$

$$a_4 = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3.$$

Temos então que essa sequência é uma PG de razão  $\frac{3}{4}$ , e seu termo geral é  $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ .

Sabemos que  $4^{n-1}$  cresce mais rapidamente que  $3^{n-1}$ , então quanto maior o índice mais próximo o elemento estará de zero, logo  $a_n$  converge para zero. Vamos provar pela definição essa convergência

Dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$|a_n - 0| = \left| \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 0 \right| = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\varepsilon} < 1 \Rightarrow \log\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\varepsilon}\right) < \log 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - \log \varepsilon < 0 \Rightarrow (n-1) \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log \varepsilon < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log \varepsilon < -(n-1) \log\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \frac{-\log \varepsilon}{-\log\left(\frac{3}{4}\right)} < n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{3}{4}} \varepsilon < n-1 \Rightarrow \log_{\frac{3}{4}} \varepsilon + 1 < n.$$

Repare que quanto menor for  $\varepsilon$  maior será  $\log_{\frac{3}{4}} \varepsilon$ , pois se  $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \varepsilon$ , então  $x$  tem que ser suficientemente grande. Então, se considerarmos um índice  $N$ , tal que  $N = \log_{\frac{3}{4}} \varepsilon + 1$ , satisfazemos que

$$n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

Semelhantemente à sequência encontrada ao observarmos o comprimento do lado, essa também converge para zero e é limitada por 1 e 0, constatando característica suficiente de uma sequência monótona

## Curva de Koch

A Curva de Koch tem sua estrutura formada por iterações, as quais um segmento de reta é dividido em três partes e no terço central se constrói um triângulo equilátero removendo a base desse triângulo

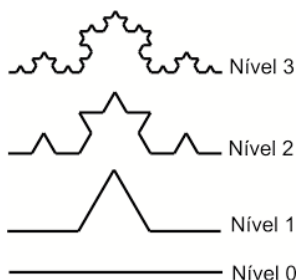


Figura 5: Os quatro primeiros níveis da Curva de Koch

Imagem da Internet: [https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fwww.researchgate.net%2Fprofile%2FWellington-Araujo-3%2Fpublication%2F272830932%2Ffigure%2Ffig1%2FAS%3A789740794163200%401565300286481%2FVarios-niveis-da-curva-fractal-de-Koch\\_Q320.jpg](https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fwww.researchgate.net%2Fprofile%2FWellington-Araujo-3%2Fpublication%2F272830932%2Ffigure%2Ffig1%2FAS%3A789740794163200%401565300286481%2FVarios-niveis-da-curva-fractal-de-Koch_Q320.jpg)

Se nos atentarmos ao tamanho dos segmentos a cada iteração, identificamos as seguintes informações presentes na tabela abaixo:

<i>Iterações</i>	0	1	2	3	...	<i>n</i>
<i>Tamanho dos segmentos</i>	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	...	<i>n</i>
<i>Índice</i>	1	2	3	4	...	<i>n</i>

Note que podemos escrever cada elemento da sequência como sendo um múltiplo de  $\frac{1}{3}$

$$a_1 = 1 = 1 * \left(\frac{1}{3}\right)^0;$$

$$a_2 = \frac{1}{3} = 1 * \frac{1}{3};$$

$$a_3 = \frac{1}{9} = 1 * \left(\frac{1}{3}\right)^2;$$

$$a_4 = \frac{1}{27} = 1 * \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

Temos então que a sequência encontrada é uma PG de razão  $\frac{1}{3}$ , e seu termo geral é  $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ .

Podemos dizer ainda que  $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$ . Como uma potência de base 1 será sempre 1 independente do expoente, então  $a_n = \left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)$ . Sabendo que  $3^{n-1}$  tende a infinito, então  $\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)$  tende a zero. Vamos provar pela definição essa convergência

Dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \left| \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 0 \right| = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 < 3^{n-1} \cdot \varepsilon \Rightarrow \log 1 < \log (3^{n-1} \cdot \varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < (n-1) \log 3 + \log \varepsilon \Rightarrow -\log \varepsilon < (n-1) \log 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow n-1 > \frac{-\log \varepsilon}{\log 3} \Rightarrow n-1 > -\log_3 \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow n-1 > \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow n > \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1. \end{aligned}$$

Note que, quanto menor for  $\varepsilon$  maior será  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Desse modo, seja  $N$  um índice da sequência,  $N = \log_3 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ , então

$$n > N \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

## CONCLUSÃO

Com base no desenvolvimento teórico apresentado e na análise das sequências relacionadas aos fractais, podemos concluir que os conceitos relacionados à Progressão Geométrica (PG) são fundamentais para desvendar os padrões matemáticos subjacentes aos fractais, como o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch. A PG é uma ferramenta essencial para descrever a evolução das sequências numéricas nessas estruturas fractais, proporcionando uma compreensão clara de como os elementos estão inter-relacionados ao longo das iterações

Além disso, ao incorporar o conceito de limite, o estudo das sequências convergentes revela a convergência para valores específicos à medida que o número de termos aumenta. As propriedades dos limites facilitam o cálculo e a compreensão das sequências, tornando possível analisar o comportamento dessas sequências à medida que se aproximam de valores específicos

Os critérios de convergência, destacados no desenvolvimento teórico, demonstram que sequências monótonas e limitadas são convergentes. Esses critérios são essenciais para a compreensão das propriedades matemáticas das sequências associadas aos fractais, fornecendo uma base teórica sólida para investigações mais aprofundadas

Na análise específica dos fractais, como o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch, identificamos padrões nas sequências relacionadas ao comprimento do lado e à área total. A aplicação dos conceitos teóricos permitiu descrever essas sequências como Progressões Geométricas, demonstrando convergência para zero e limitação por valores específicos. Isso reforça a utilidade da teoria das sequências na compreensão e modelagem de fenômenos matemáticos complexos, como os observados nos fractais

Na busca por estratégias inovadoras para o ensino de matemática, uma abordagem visual e cativante pode envolver a exploração dos fascinantes fractais, como aplicação das Progressões Geométricas (PG) no ensino médio. Os fractais, como o Triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch, oferecem uma oportunidade única para os estudantes não apenas compreenderem a PG, mas também testemunharem sua aplicação prática em padrões matemáticos complexos

A magia dos fractais reside em sua auto similaridade. Partes menores refletem a estrutura global, proporcionando uma oportunidade única de conectar esse conceito à razão comum em uma PG. A razão comum em uma PG determina como cada termo está relacionado ao anterior, da mesma forma que a razão comum em um fractal influencia a escala e a forma durante cada iteração

A incorporação de ferramentas digitais interativas permite que os alunos explorem os fractais de maneira prática. Ao ajustar parâmetros como a razão comum, o comprimento inicial e o número de iterações, os estudantes podem observar como as características dos fractais se transformam, solidificando assim a relação entre PG e a construção fractal

Desafios e projetos que incentivam os alunos a criar seus próprios fractais proporcionam uma oportunidade prática para aplicar os conceitos de PG. Documentar o processo de criação, calcular propriedades e analisar os resultados reforça não apenas a compreensão dos fractais, mas também a aplicação prática dos princípios de PG

Em última análise, a abordagem de ensino que incorpora fractais e PG não apenas torna a matemática mais acessível, mas também desperta a curiosidade e o entusiasmo dos alunos, proporcionando uma experiência de aprendizado envolvente e interdisciplinar

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3.ed.rev. e ampl. ed. São Paulo: Blucher, 2006.  
LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de uma Variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 2013

NUNES, E. R. **A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Júlio de Mesquita Filho. São José do Rio Preto. 2014

SALLUM, É. M. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 57, 2º quadrimestre 2005.