PRÁTICA EDUCATIVA INVESTIGATIVA ENVOLVENDO NÚMEROS TETRAÉDRICOS EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES: SIGNIFICADOS PRODUZIDOS A PARTIR DE UM POSSÍVEL ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/07/2024

Rodolfo Chaves
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Ifes

Janaine Casagrande Corrêa
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Ifes

Filyppe Neves de Andrade
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Ifes

João Vitor de Souza Ellyan
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – Educimat
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo – Ifes

Resumo: A presente comunicação cientifica analisa a produção de significados em Práticas Educativa Investigativas, a partir de uma perspectiva de procedimentos de Modelagem Matemática, com licenciandos de 7º período, de um curso de formação inicial de professores, em uma instituição de educação pública. O objetivo é analisar os significados produzidos na obtenção de modelos matemáticos, a partir de um tema gerador de origem com base na História da Matemática, para obtenção dos respectivos termos gerais de sequências numéricas envolvendo números tetraédricos e caracterizar tais práticas como um possível procedimento de Modelagem Matemática. O lastro epistemológico adotado à análise foi o de princípios do Modelo dos Campos Semânticos e a metodologia usada foi a de produção de significados e de conhecimento, com constituição de categorias. Como resultado conclui-se que, a partir do referencial adotado, as práticas desenvolvidas possuem base em processos de Modelagem Matemática, fomentando um caráter investigativo de objetos matemáticos, em um lastro histórico da aritmética pitagórica.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Formação de Professores. Processo de produção de significados. Modelo dos Campos Semânticos. Números Tetraédricos.

INVESTIGATIVE EDUCATIONAL PRATICES INVOLVING TETRAHEDRAL NUMBERS IN A PROCESS OF TEACHER TRAINING: MEANINGS PRODUCED FROM A POSSIBLE DESIGN OF MATHEMATICAL MODELING

ABSTRACT: This scientific communication analyzes the production of meanings in Investigative Educational Practices, from the perspective of Mathematical Modeling procedures, with 7th period undergraduates, of an initial teacher training course, in a public education institution. The objective is to analyze the meanings produced in obtaining mathematical models, based on a generating theme based on the History of Mathematics, to obtain the respective general terms of numerical sequences involving tetrahedral numbers and characterize such practices as a possible Modeling procedure Mathematics. The epistemological basis adopted for the analysis was the principles of the Semantic Fields Model and the methodology used was the production of meanings and knowledge, with the constitution of categories. As a result, it is concluded that, based on the adopted framework, the practices developed are based on Mathematical Modeling processes, encouraging an investigative nature of mathematical objects, in a historical framework of Pythagorean arithmetic.
KEYWORDS: c

INTRODUÇÃO

No texto proposto, apresentamos o desenvolvimento de um conjunto de Práticas Educativas Investigativas – PEI – (Chaves, 2004), com licenciandos em Matemática, em um curso de formação inicial, de uma instituição federal de ensino, na qual trabalhamos, na perspectiva de uma proposta de Modelagem Matemática (MM), com o objetivo de obtermos um Modelo Matemático Dinâmico[1] (MMD) para representar o número de hastes – palitos ou arestas – (Figura 1) de modelos pictóricos representativos de números tetraédricos, desenvolvidos por Nicômaco de Gerasa (60-120 DEC.), filósofo neopitagórico, que apresentou suas primeiras ideias a respeito dos números figurados de terceira dimensão, no capítulo XIII da obra intitulada Introdução à Aritmética[2] (Gerasa, 1926) (Figura 2), um tratado de grande influência que lida com a Teoria dos números e aborda as dimensões de um número figurado.

1. "*Estático*, quando representa a forma do objeto [...] ou *Dinâmico* quando simula variações de estágios do fenômeno [...]" (Bassanezi, 2002, p. 20, destaques do original).
2. Gerasa, N. **Introduction of Arithmetic**. Translated to English by D'ooge, M. L. New York: Macmillan, 1926.

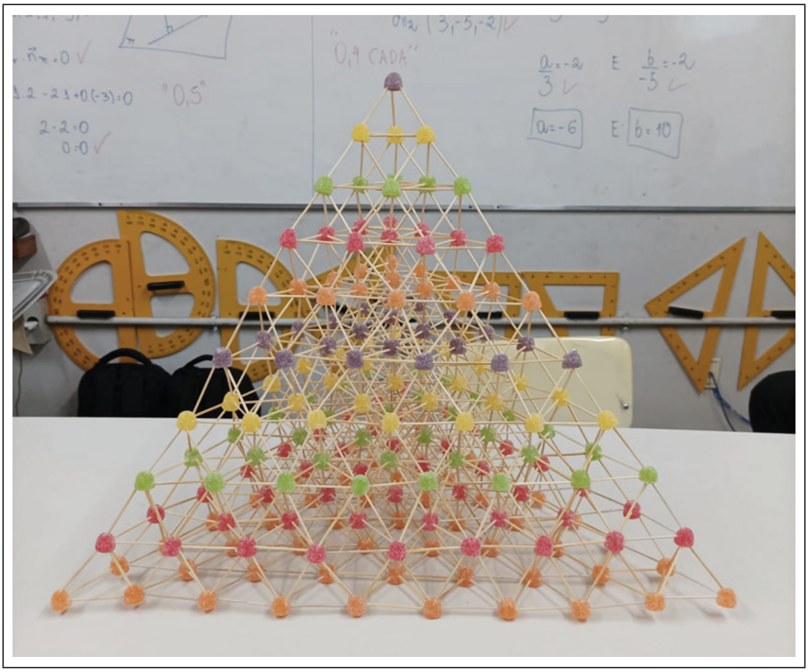

Figura 1: Tetraedro de palitos e jujubas construído em aula.

Fonte: Produzido pelos próprios autores.

Figura 2: Nicômaco de Gerasa e a Introdução à Aritmética.

Fonte: Produzido pelos próprios autores.

A “Teoria Pitagórica dos Números Figurados vem sendo encarada pela História da Ciência, e pela História da Matemática em particular, de uma forma simplista, como mera curiosidade [...]” (Almeida, 2003, p. 137-138); porém, como posto em Deza e Deza (2012), ao longo da história, diversos matemáticos se dedicaram ao estudo dos números figurados, o que mostra que o tema não é tão simplista assim, muito menos simplório, visto que a composição dos números figurados, enquanto sequências numéricas – que possibilita associar a número, expressando quantidade –, adquiriu ao longo do tempo uma considerável relevância entre muitos matemáticos, a ponto de se constituir como uma teoria, pois, dedicaram-se ao estudo dos figurados nada mais e nada menos que: Pitágoras de Samos (c.a. 582-507 AEC.), Hípsicles de Alexandria (190-120 AEC.), Lúcio Méstrio Plutarco de Queroneia (46-120 DEC.), Nicômaco de Gerasa (60-120), Téon de Esmirna (70-135), Diofanto de Alexandria (210-290), Leonardo Fibonacci (1170-1250), Michel Stifel (1487-1567), Girolamo Cardano (1501-1576), Bachet de Méziriac (1581-1638), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Pell (1611-1685), Blaise Pascal (1623-1662), Leonhard Eüler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Andrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Wacław Sierpiński (1882-1969), Barnes Wallis (1887-1979), George Pólya (1887-1985).

A base epistemológica de nossa pesquisa possui lastro em ideias do Modelo dos Campos Semânticos – MCS – e, em nosso texto, grafamos as principais ideias pertinentes ao MCS em itálico, com o propósito de destacar e diferenciar do senso comum. Também optamos por apresentar as abordagens epistemológicas relativas a tais ideias em notas de rodapé (NRP).

Além de analisar, pelo espectro do MCS, os *significados produzidos* por esses licenciandos durante o processo, procuramos responder a uma questão posta por um dos licenciandos, quando nos inquiriu se as PEI desenvolvidas se configuravam como uma proposta de MM ou Resolução de Problemas. Para tal, tomamos como lastro teórico as obras: Bassanezi (2002); Hein e Biembengut (2007); Meyer, Caldeira e Malheiros (2011); Almeida, Silva e Vertuan (2012); Biembengut (2016).

Como resultado, concluímos, dentre outras coisas, que estabelecer fronteiras entre MM e Resolução de Problemas não foi nosso foco e sim a leitura do processo e não na permanência, no produto.

Habitat e alicerces epistemológicos da pesquisa

As PEI (Chaves, 2004) desenvolvidas ocorreram em aulas da disciplina de MM na Educação Básica, ministrada para licenciandos de 7º período, em uma instituição federal de ensino. Participaram do processo cinco licenciandos, dois mestrandos – estagiários na disciplina – e o professor – quando citados, apresentados por pseudônimos.

A primeira proposta surgiu como consequência em PEI anteriores, quando esses licenciandos, com o uso de materiais manipulativos – jujubas e palitos (Figura 3) – confeccionaram tetraedros – modelo objeto[3] ou pictórico (Bassanezi, 2002) – para observar, a partir do padrão geométrico (modelo estático[1]), a sequência de números tetraédricos (1, 4, 10, 20, 35, ...)(figura 1), com vistas a elaborarem um MMD – [(1)] – para obtenção do termo geral da referida sequência (modelo dinâmico[2]).

3. "*Modelo Objeto* é a representação de um objeto [...] suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser *pictórica* (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.) [...]" (Bassanezi, 2002, p. 19-20, *ipsis litteris*, destaques do original).

$$S_3^3(n) = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6} \quad [(1)]$$

				
Ordem	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**
Sequência	**1**	**4**	**10**	**20**

Figura 3: Sequência de números tetraédricos.

Fonte: (Andrade, 2021).

Em momentos pretéritos os referidos licenciandos construíram um MMD para números figurados triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...) [(2)].

$$f_3(n) = \frac{\boldsymbol{n \cdot (n+1)}}{\mathbf{2}} \quad [(2)]$$

A proposta didático-pedagógica adotada, alicerçada em princípios epistemológicos do MCS, foi a de utilizar os modelos geométricos (pictóricos) construídos com palitos e jujubas (Figura 3), para gerar tabelas (Figura 4) e, a partir de padrões recursivos (Marques, 2022), construir um MMD, relativo ao termo geral dos números tetraédricos [] [(1)], com o propósito de constituir *objetos*[4], identificar e *produzir significados*[5] às *estipulações locais*[6] que emergissem durante a prática, com vistas a identificar a formação e possíveis transformações de *núcleos*[7] para que assim pudéssemos analisar os *significados produzidos* por esses licenciandos.

4. "Objeto é aquilo para que se produz significado [...]" (Lins, 2012, p. 28).
5. "Significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto (Lins; Giménez, 1997, p. 145-146).
6. Estipulações locais "[...] são, localmente, verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação" (Lins, 2012, p. 26).
7. "O núcleo de um campo semântico é constituído por *estipulações locais* [...]" (Lins, 2012, p. 26). No MCS um núcleo "[...] não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de uma atividade" (Silva, 2022, p. 101).

Ordem	Soma nas seções transversais (*gnômons*)	Total Número tetraédrico $S_3^3(n)$
1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
2	$\mathbf{1+3}$	$\mathbf{4}$
3	$\mathbf{1+3+6}$	$\mathbf{10}$
4	$\mathbf{1+3+6+10}$	$\mathbf{20}$
5	$\mathbf{1+3+6+10+15}$	$\mathbf{35}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{1+3+6+10+15}+\cdots+\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$	$S_3^3(\boldsymbol{n})=\dfrac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})\cdot(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})\cdot\boldsymbol{n}}{\mathbf{6}}$

Figura 4: Tabela de distribuição gnomônica de números tetraédricos segundo a ordem

Fonte: (Chaves; Marques; Andrade, 2022, p. 3).

Em outros processos de formação de professores, na modalidade de formação continuada, promovidos pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem), trabalhamos com PEI, também alicerçadas nos lastros epistemológicos do MCS, envolvendo números figurados tridimensionais (Chaves; Marques; Andrade, 2022), mas na perspectiva de abordagens históricas e de padrões e técnicas recursivas (Marques, 2022); entretanto, como uma possível prática envolvendo MM, foi a primeira vez.

Após a confecção dos modelos geométricos, a constituição dos *objetos*[8] e a observação das *formações e transformações de núcleos*, em uma releitura ao texto Chaves, Marques e Andrade (2022), perguntamos aos licenciandos se havia um padrão definido para o número de hastes (palitos ou arestas) na formação de cada novo número tetraédrico $[A_3^3(n)]$ [(4)], tendo em vista que o modelo desenvolvido $[S_3^3(n)]$ [(1)] referia-se ao número de jujubas. As atividades propriamente ditas, as ações e operações (no sentido *leontieviano*, no que se refere aos níveis de funcionamento da atividade humana) que desencadearam essas PEI relativas à elaboração de um MMD para o cálculo do número de hastes, apresentaremos no próximo subtítulo.

O licenciando com pseudônimo de *Sensei* nos inquiriu se as PEI que desenvolvemos seriam um procedimento na perspectiva da MM ou da Resolução de Problemas. Em resposta à sua enunciação, pautados em Hein e Biembengut (2007), afirmamos que “A modelagem matemática não possui um estatuto definitivo” (Ibid, p. 35) e que não há um guia de instruções que possa estabelecer fronteiras entre esses dois procedimentos de ensino; porém, a partir de Chaves (2004), afirmamos que, segundo nosso entendimento, a Resolução de Problemas é uma poderosa ferramenta que pode estar aliada ao desenvolvimento de projetos de MM

8. Tabela (Figura 4), padrão recursivo, sequências de números triangulares [(2)], modelo matemático para o termo geral de números tetraédricos [] [(1)] e jujubas como pontos formadores dos números tetraédricos.

e, mesmo não havendo um manual com rígidos princípios para se estabelecer fronteiras e afirmar que isso é Modelagem e aquilo é Resolução de Problemas, podemos estabelecer parâmetros a partir da observação de algum esquema procedimental de Modelagem e que então, para tal, tomaríamos o esquema proposto em Bassanezi (2002), já que em PEI anteriores discutimos a proposta contida nessa obra ao afirmar que "A modelagem matemática de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas" (Ibid, p. 26) a saber: (1) Experimentação; (2) Abstração – seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses e simplificação; (3) Resolução; (4) Validação; (5) Modificação.

Assim, pelo que expusemos até então, objetivamos: (*i*) analisar, pautados em ideias basilares do MCS, os *significados produzidos* ao longo das PEI relativas à elaboração de um MMD para o cálculo do número de hastes; (*ii*) analisar se o desenvolvimento dessas PEI se constitui como um procedimento de ensino na perspectiva da MM, segundo o referencial proposto.

Inicialmente, adotaremos a ideia de que na Modelagem

> [...] as pessoas sempre recorrem aos modelos para se comunicar, solucionar, ou ainda compreender e exprimir uma situação-problema, a Modelagem tem sido defendida como processo ou método de ensino de matemática, em qualquer fase da escolaridade [...] Isso significa que os estudantes não apenas tenham conhecimentos matemáticos, mas também desenvolvam habilidades para solucionar problemas, além das proposições em sala de aula (Biembengut, 2016, p. 174).

Consequentemente, o objetivo de quem trabalha no viés da MM "[...] é estabelecer um modelo (matemático) de uma situação-problema para então resolvê-la, entendê-la ou ainda modificá-la se necessário" (Biembengut, 2016, p. 175). Tal situação-problema, Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) denominam de "problema gerador", assim como Chaves (2004).

Tal concepção não diverge do que é apresentado na obra Almeida, Silva e Vertuan (2012), que considera que

> [...] de modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final [...] A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático.
>
> O termo 'problema' é entendido aqui como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas ***a priori*** para sua solução. Assim, para a resolução de situações-problema, de modo geral, não há procedimentos previamente conhecidos ou soluções já indicadas [...]
>
> Um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema. (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 12-13, destaques do original).

Vale ressaltar que, ao tomarmos o MCS como lastro operaremos com a premissa de que o sujeito estrutura o pensamento por *objetos* (Silva, 2003), ao defender que no MCS, colocamo-nos em contraposição ao modelo que considera o pensamento como sendo estruturado por conceitos. Tal posição não chega a se categorizar como uma divergência, um *obstáculo epistemológico*[9] ou um *limite epistemológico*[10], frente ao que defendera Bassanezi (2002), Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Biembengut (2016).

Biembengut (2016) também esclarece que, segundo seu espectro, por uma diferença elementar de objetivos, a Modelagem na Educação, denominada pela autora de Modelação, objetiva "promover conhecimento ao estudante em qualquer período de escolaridade, e ensiná-lo a fazer pesquisa nessa estrutura escolar, isto é: no espaço físico e no período concernente a este propósito" (Biembengut, 2016, p. 175).

Também tomaremos como premissa que, a partir da MM – bem como da Modelação – é possível rompermos com o paradigma imputado secularmente por matemáticos, através de suas instituições representativas, de se promover, na escola (ensino básico) uma "[...] educação PARA A Matemática [...]" (Lins, 2020, p. 15, destaques do original) e, assim, colocarmos em curso um paradigma de se promover uma "[...] educação PELA Matemática [...]" (Lins, 2020, p. 15, destaques do original), no sentido de ser "por intermédio de", ou seja, de se propor uma Matemática escolar como uma ferramenta, como meio e não como fim.

O fato de constituirmos *objetos* matemáticos (modelos – geométricos e algébricos, tabelas, sequências numéricas etc.) não significa que queiramos tomar a Matemática como um fim ou que queiramos reduzir a Matemática escolar a uma Matemática algorítmica, pois

> Tudo indica que na escola interessa mesmo é que apliquemos 'o' algoritmo, e de forma precisa.
>
> Por fim, na escola, números não são números de nada, a não ser em 'problemas com história', e no fim termina-se mesmo pedindo que os alunos se esqueçam da história e 'pensem na matemática' (Lins; Giménez, 1997, p. 15-16, destaques do original).

Queremos mesmo é romper com o quadro hegemônico de uma educação PARA A Matemática (como um fim), que se configura como excludente, meritocrática e como um dispositivo tático para fixação do regime de verdades dos matemáticos, na imputação de suas relações de poder (Chaves, 2004).

Entendemos que, há outras possibilidades de se romper com esse regime de verdades, assim como adotar outros procedimentos, como, por exemplo, a Etnomatemática, mas nesse artigo focamos especificamente na Modelagem como um possível procedimento à ruptura do caráter hegemônico da educação bancária (PARA A Matemática) por entendermos que tal procedimento pode facultar usar a Matemática como uma possível ferramenta de leitura do mundo (Chaves, 2004), isso por entendermos que "[...] a Modelagem incrementa a aprendizagem. E mostra que o estudo dessa disciplina, além de importante, pode ser provocativo e agradável" (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, posfácio).

9. "Um **Obstáculo Epistemológico** [...] seria o processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação, mas não produz" (Silva, 1997, p. 17, destaque do original).
10. Um limite epistemológico "[...] é a impossibilidade do sujeito produzir significado para o resíduo de enunciação numa certa direção devido a sua maneira de operar" (Silva, 2012, p. 88).

Significados produzidos e interfaces em um processo de MM

Tal como exposto, objetivamos: (*i*) analisar, pautado em ideias basilares do MCS, *significados produzidos* ao longo dessas PEI relativas à elaboração de um MMD para o cálculo do número de hastes; (*ii*) defender a ideia de que o desenvolvimento dessas PEI se constitui como um procedimento de ensino na perspectiva da MM, segundo o referencial adotado.

No que se refere às PEI relativas à elaboração de um MMD para o cálculo do número de hastes $[A_3^3(n)]$ [(4)], analisaremos o movimento entre as três grandes categorias – o *dado*, a *justificação* e o *novo* – evidenciadas e presentes na produção de *conhecimento*[11] (Silva, 2003). Assim, destacamos que o foco da atividade de resolver problemas é o *novo*, contudo, na tematização da *lógica das operações*[12] o foco é dirigido ao *dado*[13].

Segundo Chaves, Marques e Andrade (2022), os licenciandos *produziram significado* de que:

(1) havia um padrão numérico ou sequência (0, 6, 24, 60, 120, ...) relativa à quantidade de palitos para cada novo tetraedro formado (quarta coluna – Figura 5);

Ordem n	Número tetraédrico $S_3^3(n)$	Número de tetraedros de ordem 2 (figura 02) $P_2(n) = S_3^3(n-1)$	Número de arestas $A_3^3(n)$
1	1	0	$6 \cdot 0$
2	4	1	$6 \cdot 1$
3	10	4	$6 \cdot 4$
4	20	10	$6 \cdot 10$
5	35	20	$6 \cdot 20$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$S_3^3(n) = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6}$	$S_3^3(n-1) = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{6}$	$A_3^3(n) = (n+1)\cdot n\cdot(n-1)$

Figura 5: Tabela comparativa de ordem, números tetraédricos, quantidade de unidades padrão e número de arestas

Fonte: Chaves, Marques e Andrade (2022, p. 17).

11. "Um conhecimento consiste em uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)" (Lins, 2012, p. 12, destaques do original).
12. "[...] a *lógica das operações,* própria da produção de significados em relação a um certo núcleo, imprime certas características ao que pode e ao que não pode ser dito, mas também faz com que certas *crenças-afirmações* estejam mais 'distantes' do núcleo que outras" (Lins; Giménez, 1997, p. 127, destaques do original).
13. "A palavra-chave é **falar** (...) a fala da pessoa que resolve um problema tende a explicitar o **novo** e a silenciar o **dado**. Dessa forma, enquanto resolvemos um problema, **falamos** as coisas que estamos tentando entender ou descobrir, mas silenciamos as coisas que tomamos como certas, como dadas" (Lins; Giménez, 1997, p. 122, destaques do original). O *dado* é o que nos diz em 'que lugar' o sujeito da enunciação está e a partir de 'que lugar' ele fala. No movimento de transição entre o *dado* e o *novo*, a *justificação* exerce o papel de ser o elo de ligação entre essas duas categorias. É a partir da *justificação* que ocorre o processo na qual o *novo* vai se transformando em *dado* frente a novas situações (Silva, 2003, destaques do original).

(2) foi possível formular como hipótese[14] que havia uma unidade padrão para a contagem de hastes [$P_2(n)$] e que a mesma é um *objeto* representativo do número tetraédrico de ordem 2 (Figura 6). Diremos que, o que se denomina hipótese, à luz do MCS, denominamos de *estipulação local*;

Figura 6: Unidade padrão tomada como hipótese []

Fonte: (Chaves; Marques; Andrade, 2022, p. 9).

(3) observando a quarta coluna da (Figura 5) foi possível constatar que a quantidade hastes $[A_3^3(n)]$ [(4)], a partir do segundo termo, forma uma sequência numérica de múltiplos de 6 (0, 6, 24, 60, 120, ...);

(4) comparando a segunda e a terceira colunas da tabela (Figura 5) foi possível constatar que

$$P_2(n) = S_3^3(n-1) \qquad [(3)]$$

(5) As seções transversais ou níveis, de cada novo modelo geométrico formado, equivalente a um número tetraédrico, são números triangulares $[f_3(n)]$ (Figura 7) [(2)];

14. "As hipóteses dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem [...] deduzir manifestações empíricas específicas [...] A geração de hipóteses se dá de vários modos: observação de fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador" (Bassanezi, 2002, p. 28).

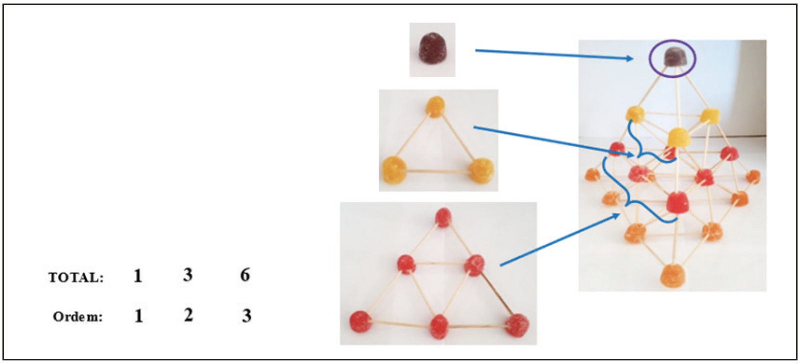

Figura 7: Seções transversais de cada novo número tetraédrico: números triangulares

Fonte: Produzido pelos autores.

(6) comparando a terceira e a quarta colunas da tabela (Figura 5) foi possível constatar que o modelo matemático $[A_3^3(n)]$ [(3)] é equivalente a

$$A_3^3(n) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \qquad [(4)]$$

Como já havíamos trabalhado na obtenção do termo geral da sequência de números tetraédricos, a equação [(1)] configurava como o *dado*, ao passo que

$$A_3^3(n) = 6 \cdot P_2(n) \Leftrightarrow A_3^3(n) = 6 \cdot S_3^3(n-1) \qquad [(5)]$$

ou

$$A_3^3(n) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \qquad [(4)]$$

se constituía como o *novo*. A *justificação*, elo de ligação entre o *dado* e o *novo*, fora enunciada pelo licenciando *Pastor* da seguinte maneira: "Como o modelo de nossa unidade padrão é um tetraedro de segunda ordem, o número de hastes é consequência de um número tetraédrico de ordem anterior" [enuncia apontando, linha a linha, para a segunda e quarta colunas da tabela (Figura 5)]. É possível observarmos que o *objeto* $S_3^3(n)$ [(1)] foi abandonado logo após a obtenção do MMD $A_3^3(n) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)$ [(4)].

Vale ressaltar que a representação pictórica (Bassanezi, 2002), tetraedro de palitos e jujubas, passou a se constituir como *dado* e os licenciandos passaram a *produzir significados* para outros *objetos*; assim, colunas e linhas da tabela (Figura 5) passam a se constituir como o *novo* e, dessa forma, houve uma gradativa transformação do *núcleo* dos modelos pictóricos (Bassanezi, 2002) para a constituição de um novo *núcleo*, de sequências numéricas e expressões algébricas – MMD (Bassanezi, 2002) ou modelos matemáticos (Bassanezi, 2002; Almeida; Silva; Vertuan, 2012).

Para o licenciando *Tico*, os modelos pictóricos foram importantes, mas não suficientes para se chegar ao número de hastes na *n-ésima ordem*, por isso foi importante analisar linhas e colunas da tabela. Interagindo com a enunciação de *Tico*, o licenciando *Teco* considera que "sem o exame da tabela não chegaríamos ao modelo matemático do número de hastes $[A_3^3(n)]$". Complementando a fala de *Teco*, o licenciando *Tico* conclui que "só chegamos ao modelo porque identificamos um padrão recursivo".

Já o licenciando *Pastor*, ao *produzir significado* de que "as seções transversais – os níveis de cada novo modelo pictórico formado, equivalente a um número tetraédrico – são números triangulares [$f_3(n)$]" (Figura 7) [(2)], possibilitou que se observasse a existência de um novo *objeto* – a unidade padrão (tetraedro de segunda ordem) – e que a quantidade dessas unidades poderia ser examinada nível a nível ou seção a seção (transversais).

Assim, à luz do MCS, o *conhecimento produzido* pelos licenciandos foi de que:

(*a*) *existe um padrão em relação ao número de hastes dos tetraedros representativos dos números tetraédricos e a quantidade de hastes varia em função da ordem* (*n*)*;*

(*b*) *há uma unidade padrão para contagem* [$P_2(n)$] *e na n-ésima ordem o número de tetraedros de ordem 2 pode ser expresso por um modelo matemático* [(3)];

(*c*) *o número de hastes* $[A_3^3(n)]$ *varia em função do número de unidades padrão* [$P_2(n)$] *e pode ser expresso por um MMD* [equações (4) *e* (5)];

(*d*) *As PEI desenvolvidas se configuram como uma prática de MM, quando produzimos significados às enunciações que apresentaremos a seguir.*

Como vimos, Bassanezi (2002) estabelece um esquema e defende a ideia de que, em um processo de MM, há etapas – já apresentadas – a serem cumpridas e, então, passamos a discuti-las.

Nas PEI em questão, a etapa de experimentação deu-se a partir da confecção dos modelos pictóricos (tetraedros formados por jujubas e palitos) (Figuras 3 e 7) com vistas a obtenção do número de hastes $[A_3^3(n)]$ para cada número tetraédrico [$S_3^3(n)$], visto que esta etapa é essencialmente laboratorial, na qual a obtenção de dados ocorre a partir de um processo (Bassanezi, 2002) – no nosso caso, de contagem de palitos.

No que se refere à etapa de abstração, pautamo-nos no princípio de que a mesma pode ser entendida como um "[...] procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos" (Bassanezi, 2002, p. 27) e isso ocorreu quando, a partir da análise de linhas e colunas de uma tabela (Figura 4), usamos a recursividade para formulação do termo geral e assim, para obtenção do MMD [(4)].

Seguindo o mesmo referencial, na abstração, selecionamos variáveis e efetuamos distinção entre "[...] as variáveis de estado que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle que agem sobre o sistema" (Bassanezi, 2002, p. 27-28). No caso, nossas variáveis de estado foram: *número de unidades padrão* [$P_2(n)$] *e número de hastes* $[A_3^3(n)]$. Tais variáveis foram escritas a partir da variável de controle – *ordem* (*n*).

Na etapa de problematização, parte constitutiva do procedimento de abstração, "A adequação de uma investigação sistemática, empírica e crítica leva à formulação de problemas com enunciados que devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional" (Bassanezi, 2002, p. 28). Nas PEI desenvolvidas, tal etapa ocorreu com a formulação das seguintes questões: (*i*) *assim como encontramos um termo geral para o número de jujubas – correspondente aos respectivos termos da sequência de números* *tetraédricos – é possível encontrar um padrão para a distribuição do número de hastes?* (*ii*) *podemos tomar pictoricamente – tetraedro representativo do número tetraédrico de ordem 2 – como uma unidade padrão?*

Há de ressaltar que, assim como a constituição do que Bassanezi (2002) denomina de hipótese (NRP 14), a problematização também é constituída por *estipulações locais*, desde que tais *estipulações* não desencadeiem *obstáculos* ou *limites epistemológicos.*

Outra etapa constitutiva da abstração é a simplificação (Bassanezi, 2002) e, nas PEI em curso, isso ocorreu quando, a partir da tabela (Figura 4), os licenciandos conseguiram escrever o número de hastes $[A_3^3(n)]$ [(4)] a partir do número de tetraedros de segunda ordem $[P_2(n)]$ [(5)] e, consequentemente, do número hastes $[A_3^3(n) = 6 \,.\, [P_2(n)]$ a partir de um número tetraédrico de ordem antecedente $[A_3^3(n) = 6 \cdot S_3^3(n-1)]$.

Para Bassanezi (2002), em um processo de Modelagem, a etapa de resolução ocorre quando se obtém um MMD, que substituirá "[...] uma linguagem natural das hipóteses por linguagem matemática coerente" (Ibid, p. 29) e foi isso que fizemos quando transformamos a unidade padrão para a contagem de hastes $[P_2(n)]$ no MMD [(3)] e quando substituímos a ideia de que *o número de hastes é um múltiplo de 6* pelo modelo matemático relativo à $[A_3^3(n)]$ [(5)].

Na nossa prática não foi necessário cumprimos a etapa de modificação, mas a etapa de validação – "processo de aceitação ou não do modelo proposto" (Bassanezi, 2002, p. 30) – ocorreu após construirmos os modelos [equações (3), (4) e (5)], usando uma planilha eletrônica (Excel) para testarmos as hipóteses, confrontando com os dados empíricos ampliando as linhas da tabela (Figura 5).

Por outro lado, o texto Hein e Biembengut (2007) considera que "O ato de modelar surge de uma inquietação. De uma situação-problema" (Ibid, p. 36) e essa inquietação surgiu a partir do momento em que instigamos os licenciandos a refletirem a respeito da possibilidade de se obter um termo geral para o número de hastes em sequências de números tetraédricos.

Já em Biembengut (2016) vimos que a Modelação ou Modelagem na Educação

> [...] é um método em que se utiliza a essência do processo da Modelagem no ensino e na aprendizagem da Educação formal. Orienta-se pelo ensino do conteúdo do programa curricular da disciplina (e não curricular) a partir de um ***tema/assunto*** e, paralelamente, pela orientação dos estudantes à pesquisa sobre algo que lhe possa interessar (Ibid, 2016, p. 176-177, destaques do original).

No caso das PEI que desenvolvemos, observamos que, por esse espectro, nossas práticas também se configuraram como uma possível proposta de Modelação.

Também observamos que a partir do que preconiza Almeida, Silva e Vertuan (2012), as equações obtidas [equações (1), (2), (3), (4), (5) e (6)] são modelos, representações simplificadas de uma realidade, que segundo o MCS, são *legitimidades*[15], que passaram a se configurar como o *novo*, isso porque em um modelo, sua formulação "[...] não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema" (Ibid, p. 13): no caso, responder se é possível calcular o número de hastes em função da ordem.

O caráter investigativo que alicerçou o desenvolvimento das PEI em questão também perpassou pelo que o texto Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) denominou de terna constitutiva que compõe um quadro de MM; isto é, transitamos entre formulação, resolução e avaliação de um problema, de forma crítica, não partindo "[...] desse ou daquele conteúdo matemático que professor, programa ou curso precisassem ou quisessem 'ensinar' aos alunos ou pretendessem que os alunos 'aprendessem'" (Ibid, p. 15), visto que "[...] os problemas e seus estudos é que determinavam que caminhos matemáticos, que conteúdos conhecidos ou por aprender, quais técnicas ou procedimentos matemáticos teriam de ser 'explorados' – e estudados, pelos alunos: eram, na verdade, instrumentos necessários para se aprender sobre o problema" (Ibid, p. 15-16).

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A PEI que desenvolvemos, segundo o referencial adotado, constitui-se em um procedimento de ensino, na perspectiva da MM, pelo menos segundo os argumentos que apresentamos a partir do referencial adotado.

Todavia, há de se ressaltar que, como "O interesse do MCS é no processo de produção de significado e em sua leitura, e não na permanência [...]" (Lins, 2012, p. 19), fixar fronteiras se as PEI em questão foram desenvolvidas (ou não) a partir de uma proposta de MM, de Resolução de Problema ou de Investigação Matemática, segundo nosso entendimento, é uma tentativa de ler na permanência, enquanto que, nosso interesse está no processo, na *lógica das operações* e na *produção de significados*.

A questão supracitada pode ser exemplificada quando observamos que, cada um dos tetraedros confeccionados (Figuras 1 e 3) representativos dos números tetraédricos, ordem a ordem, nos deparamos com modelos estáticos, pictóricos (Bassanezi, 2002 – NRP 1), com o produto, uma leitura na permanência; mas, se observarmos o processo de confecção de cada nova ordem, a partir do tetraedro antecedente, chegaremos então a um modelo dinâmico (Bassanezi, 2002 – NRP 1), e assim lemos a partir do processo.

15. "Interlocutores são legitimidades. O que internalizamos, nos processos de humanização e do que se costuma chamar de desenvolvimento intelectual, são interlocutores, são legitimidades" (Lins, 2012, p. 20).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. de C. **Platão Redimido**: a teoria dos números figurados na Ciência antiga & moderna. Curitiba: Champagnat, 2003. (Coleção Exatas, 2).

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ANDRADE, F. N. de. **Significados produzidos a respeito de vieses entre triângulo de pascal, números tetraédricos e figurados triangulares em um processo de formação de professores de matemática**. 2021. 127 p. Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2021.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Livraria da Física, 2016. (Coleção contextos da ciência).

CHAVES, R.; MARQUES, F. S.; ANDRADE, F. N. de. **Arestas em números tetraédricos, recursividade e modos de produção de significados: uma análise epistemológica a partir do Modelo dos Campos Semânticos em um processo de formação de professores**. **Ridema: Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**. Juiz de Fora, v. 6, n. 1, p. 1-23, jan. – dez., 2022.

CHAVES, R. Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais? 223p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), **PPGEM, IGCE de Rio Claro, Unesp**. Rio Claro, 2004.

DEZA, E.; DEZA, M. M. **Figurate Numbers**. Singapore: World Scientific Plubishing, 2012.

GERASA, N. **Introduction of Arithmetic**. Translated to English by D'Ooge, M. L. New York: Macmillan, 1926.

HEIN, N.; BIEMBENGUT, M. S. Sobre Modelagem Matemática do saber e seus limites. In: Barbosa, J. C.; Caldeira, A. D.; Araújo, J. de L. (Org). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 33-47. (Biblioteca do Educador Matemático, v. 3).

LINS, R. C. Os PCN e a Educação Matemática no Brasil. In: Oliveira, Viviane Cristina Almeida de et al. **Modelo dos Campos Semânticos na Educação Básica**. 1 ed. Curitiba: Appris, 2020, p. 13-18**.**

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: Angelo, Claudia Laus et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

LINS, R. C.; GIMÉNEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 3. ed. Campinas: Papirus, 1997. (Perspectivas em Educação Matemática).

MARQUES, F. S. **Recursividade em práticas educativas investigativas**: significados produzidos por participantes de um processo de formação de professores de matemática. 2022. 215f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2022.

MEYER, J. F. da C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SILVA, A. M. da. **O Modelo dos Campos Semânticos**: um modelo epistemológico em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2022.

SILVA, A. M. da. Impermeabilização no Processo de Produção de Significados para a Álgebra Linear. In: ANGELO, C. L. et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 79-90.

SILVA, A. M. da. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática.** 244 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SILVA, A. M. da. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear**. 1997, 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Departamento de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula. Rio de Janeiro, 1997.