Impactos das Tecnologias nas Ciências Exatas e da Terra 2

Nauana Hay Paiva
(Organizadora)

Atena
Editora
Ano 2019

Nauana Hay Paiva
(Organizadora)

Impactos das Tecnologias nas Ciências Exatas e da Terra 2

Atena Editora
2019

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação e Edição de Arte: Geraldo Alves e Karine de Lima
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I34 Impactos das tecnologias nas ciências exatas e da terra 2 [recurso eletrônico] / Organizadora Nauana Hay Paiva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Impactos das Tecnologias nas Ciências Exatas e da Terra; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-053-7
DOI 10.22533/at.ed.537192201

1. Ciências exatas. 2. Tecnologia. I. Paiva, Nauana Hay. II. Série.

CDD 016.5

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

SUMÁRIO

CAPÍTULO 14

ESTUDO DO GRUPO DE POINCARÉ E DE SUAS REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Ana Camila Costa Esteves
Universidade de São Paulo
São Paulo - São Paulo

Milton Souza Ribeiro Miltão
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana - Bahia

RESUMO: Na Física é de extrema importância que a descrição de um fenômeno seja a mesma independente do referencial do qual a observação é feita. Assim, as leis da Física devem ser invariantes sob transformações de coordenadas entre referenciais inerciais, obedecendo ao princípio da relatividade. Nesse sentido, o conceito de simetria é essencial, já que as simetrias de um sistema são invariantes sob transformações, por exemplo, de translação e rotação. Dessa forma, a Teoria de Grupos nos fornece a base para esse estudo pelo fato de ser a linguagem que descreve as simetrias. Ao trabalharmos com transformações entre referenciais inerciais podemos lidar com o caso não relativístico (transformações de Galileo) e relativístico (transformações de Lorentz) sendo que cada um desses tipos de transformações geram grupos diferentes, a saber, os grupos de Galileo e de Lorentz. Como um exemplo, aplicamos essas transformações na equação de onda do eletromagnetismo mostrando que ela só é invariante sob transformação de Lorentz. Em seguida, abordamos o grupo de Lorentz homogêneo e suas representações irredutíveis de dimensão finita e o grupo de Poincaré e suas representações irredutíveis unitárias. Assim, verificamos que as representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré se relacionam com as partículas elementares da Teoria Quântica de Campos à medida que elas são classificadas com base na grandeza spin, sendo que para cada valor de spin corresponde uma representação única.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de grupos, grupo de Poincaré, representações irredutíveis unitárias, partículas elementares, Teoria Quântica de Campos.

ABSTRACT: In physics it is of extreme importance that the description of a phenomenon is the same regardless of the reference frame from which the observation is made. Therefore, the laws of physics must be invariant under coordinate transformations between inertial frames, thus obeying the principle of relativity. The concept of symmetry is then essential, since the symmetries of a system are invariant under transformations, such as translation and rotation. In this way, Group Theory provides the framework for this study as it is the language that describes the symmetries. When we work with transformations between inertial frames we can deal with the non-relativistic (Galileo

transformations) and relativistic (Lorentz transformations) cases, each of these types of transformations generating different groups, namely the Galileo and Lorentz groups. As an example, we applied this transformations in the wave equation of electromagnetism, showing its invariance under Lorentz transformation alone. Then we discussed the homogeneous Lorentz group and its irreducible representations of finite dimension and the Poincaré group and its irreducible unitary representations. We found that the irreducible unitary representations of the Poincaré group are related to the elementary particles of Quantum Field Theory as they are classified based on the quantity spin, each spin value corresponding to a unique representation.
KEYWORDS: Group Theory, Poincaré group, irreducible unitary representations, elementary particles, Quantum Field Theory.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho é uma revisão do trabalho Estudo do grupo de Poincaré através de suas representações tensoriais e espinoriais apresentado no XIX Seminário de Iniciação Científica da UEFS. Nele, fizemos um estudo do grupo de Poincaré, partindo das definições de simetrias e grupos (SUDARSHAN e MUKUNDA, 1974) e mostramos que transformações de Lorentz dão origem aos grupos de Lorentz homogêneo e não homogêneo, ou grupo de Poincaré. A compreensão das representações irredutíveis do grupo de Poincaré (NAIMARK, 1964; TUNG, 1985) nos permitiu entender a sua relevância na Física, já que essas representações nos levam às partículas elementares e suas equações de movimento. Sendo assim, o estudo do referido grupo é uma boa alternativa para que se tenha uma base para o estudo da Teoria Quântica de Campos (SCHWEBER, 1962).

A importância da Teoria de Grupos se dá devido a sua relação com diversas ciências atuais, aparecendo constantemente em estudos de álgebra, química, topologia, entre outros. O seu estudo surgiu em conexão com a solução de equações (LIVIO, 2005) e sua importância na Física é facilmente observada à medida que os grupos podem representar algebricamente inúmeras teorias físicas, sendo utilizada tanto em áreas mais antigas como a Mecânica Clássica, quanto em áreas em desenvolvimento como a Matéria Condensada.

O estudo das simetrias em conjunto com as representações dos grupos de Lie proporciona um grande poder preditivo, o que ajuda na previsão, por exemplo, de novas partículas elementares, sendo este, portanto, um tema de grande relevância devido à ampla utilização de aceleradores de partículas na atualidade para a descoberta de novas partículas. Murray Gell-Mann, por exemplo, conseguiu uma classificação coerente para os hádrons usando as representações de octetos dos grupos SU(3) e previu a existência de novas partículas elementares (DIAS, 2006). Assim, consolidou-se a relação entre teorias abstratas, grupos de Lie e a física de partículas.

Existem na física dois tipos de transformações de coordenadas entre referenciais inerciais. A primeira é a transformação de Galileo, que só possui validade no limite de baixas velocidades, e é utilizada na Mecânica Clássica e Mecânica Quântica não relativística. No entanto, devido às equações de Maxwell não serem invariantes sob tais transformações, foram desenvolvidas transformações sob as quais as equações de Maxwell fossem invariantes, para que se garantisse o princípio da relatividade, que afirma que as leis da Física devem ser as mesmas em todos os referenciais. Com isso, surgiu a relatividade especial, cujas transformações de coordenadas dão origem ao grupo de Lorentz.

O objetivo deste trabalho é estudar o grupo de Poincaré visando sua aplicação na Teoria Quântica de Campos e isso foi feito a partir da descrição das representações irredutíveis deste grupo e da relação entre a Teoria de Grupos com os princípios de simetria contínua.

2 I METODOLOGIA

Para atingirmos o objetivo desse trabalho, que é estudar as representações irredutíveis do grupo de Poincaré, primeiramente se faz necessário entender o conceito de referenciais inerciais e as transformações de coordenadas que os relacionam. Então, no caso não relativístico somos remetidos à Mecânica Clássica, e no caso relativístico à relatividade espacial. Com isso, o estudo de simetrias e da teoria de representações de grupos nos permite estudar os grupos de Lorentz homogêneo e não homogêneo, assim como seus subgrupos, e determinar as suas representações irredutíveis.

3 I SIMETRIAS E INVARIÂNCIA SOB TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS

O estudo de simetrias é crucial para uma melhor compreensão do nosso universo e das leis que o governam. Já foi verificado experimentalmente que em grandes escalas espaço é isotrópico, o que nos diz que não há uma direção preferencial no universo, e homogêneo, o que indica que a matéria está distribuída de forma uniforme no universo. Além disso, as leis da natureza são independentes da velocidade relativa entre observadores, quando levada em consideração a transformação de coordenadas apropriada. Sendo assim, os referenciais inerciais estão relacionados por transformações de Lorentz e no limite não relativístico as transformações de Galileo ainda possuem validade.

Em uma linguagem mais matemática, podemos definir simetrias com base no conceito de isometria (RODITI, 2003). Uma isometria é um mapeamento do plano Euclidiano nele mesmo que preserva as distâncias. Existem quatro tipos de isometrias planas que são:

I. **Translação**: O deslocamento em uma dada direção de uma dada distância.

II. **Rotação**: Rotação em torno de um dado ponto, o centro de rotação, de um dado ângulo.

III. **Reflexão:** A transformação no plano que deixa uma linha fixa e que inverte a orientação.

IV. ***Reflexão com deslizamento:*** A transformação que combina uma reflexão numa dada linha com uma translação de uma dada distância numa direção paralela à linha de reflexão.

Para cada conjunto no plano existe uma isometria identidade que leva o conjunto nele mesmo.

Podemos chamar de simetria de um conjunto C no plano Euclidiano uma isometria que mapeia este conjunto nele mesmo, ou seja, após uma operação de simetria em um determinado sistema, ele permanece inalterado.

Levando agora esses conceitos matemáticos para o contexto físico, podemos dizer que devido ao fato do espaço ser isotrópico as leis da Física possuem simetria de rotação. Com isso, se rotacionarmos um sistema referencial inercial e observarmos um determinado fenômeno, constataremos que as leis que o descrevem possuem a mesma forma das que foram obtidas antes da rotação. Devido à homogeneidade do espaço, também constataremos as mesmas leis da Física se fizermos uma observação a partir de um determinado referencial inercial e em seguida fizermos outra medida de um referencial inercial transladado em relação ao primeiro por uma distância , por exemplo. Assim, as leis da Física também possuem simetria de translação, tanto espacial quanto temporal. As transformações de Lorentz, que relacionam as coordenadas de tais referenciais, podem ser representadas como rotações no espaço-tempo e podemos adicionar a elas translações no espaço-tempo. Com isso, as transformações de Lorentz dão conta das simetrias de rotação e translação das leis da física, associadas à isotropia e homogeneidade do espaço. Adicionalmente, a simetria de translação está relacionada a conservação do momento linear e a simetria de rotação com a conservação do momento angular. Isso decorre do Teorema de Noether, que relaciona simetrias contínuas com grandezas conservadas.

Assim, podemos ter uma descrição completa de um sistema físico em todos os pontos do espaço-tempo e quando quisermos descobrir as simetrias do sistema, devemos nos fazer a seguinte pergunta:”que operações podem ser realizadas no mundo que nos cerca que deixariam inalteradas as leis que descrevem todos os fenômenos observados?” (LIVIO, 2005).

Um princípio de invariância deve, então, permitir que os seguintes postulados sejam satisfeitos (SCHWEBER, 1962):

I. Deve ser possível transladar uma descrição completa de um sistema físico de um sistema de coordenadas para outro equivalente.

II. A translação de uma descrição dinamicamente possível, deve ser também dinamicamente possível.

III. Os critérios para que uma descrição completa seja possível devem ser idênticos para observadores equivalentes.

No contexto quanto-mecânico, o primeiro postulado nos diz que existe uma correspondência entre os referenciais no que diz respeito aos pontos do espaço-tempo, aos vetores e aos observadores. O segundo postulado nos permite afirmar que as probabilidades de transição são independentes do sistema de referência, o que possibilita a diferentes observadores fazer as mesmas previsões sobre um experimento realizado no sistema.

3.1 Invariância da equação de onda do eletromagnetismo

Vamos agora aplicar as transformações de Galileo e de Lorentz na equação de onda escalar, que só possui uma componente do campo, e mostrar que ela só é invariante sob transformação de Lorentz, sendo a transformação de Galileo inadequada pra tratar fenômenos eletromagnéticos (REITZ, 1993).

A equação de onda escalar, que pode ser obtida a partir das equações de Maxwell é dada por:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,. \tag{1}$$

Considerando que a direção da velocidade de translação entre dois referenciais K e K' está no eixo x, temos a seguinte transformação de Galileo:

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y\ ,\ \ z' = z\ ,\ \ t' = t\,.$$

Aplicando as transformações de Galileo na equação (1) a partir das relações

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}-v\frac{\partial}{\partial x'} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t'^2}+v^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-2v\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}$$

obteremos para a equação de onda no referencial K' a seguinte equação

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2}-\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2_3}+\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'\partial x'_3}=0$$

que claramente não mantém a mesma forma após a transformação.

Agora, seja uma transformação de Lorentz (SCHRÖDER, 1990)

$$x' = \gamma(v)(x-vt), \qquad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=\gamma(v)\left(t-\frac{v}{c^2}x\right), \tag{2}$$

onde $\gamma(v)=1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ e c é a velocidade da luz, entre dois referenciais K e K', que possuem velocidade relativa ao longo da direção . Podemos aplicar essa transformação na equação de onda (1) utilizando as seguintes substituições

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}$$

e a partir disso obtemos a seguinte equação de onda no sistema K'.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z'^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t'^2},$$

que, por ser homogênea, nos permite trocar os φ por φ' resultando em uma equação com a mesma forma da anterior.

As equações resultantes das aplicações das transformações de Galileo e de Lorentz nos permitem concluir que a equação de onda não é invariante sob transformação de Galileo, pois a equação resultante não descreve a propagação das ondas eletromagnéticas da maneira prevista, não possuindo a forma esperada no sistema referencial K'. Como as leis da Física devem ser as mesmas em todos os referenciais, a obtenção dessa equação não é coerente com o princípio da relatividade. Portanto, as equações de Maxwell são invariantes sob as transformações de Lorentz, e o fenômeno eletromagnético será o mesmo independente do referencial, como exigido pelo princípio da relatividade. Consequentemente, as equações de Maxwell não são invariantes sob o grupo de Galileo, mas sim sob o grupo de Poincaré.

4 I TEORIA DE GRUPOS

Para descrever as simetrias do mundo físico utilizamos a teoria de representação de grupos, que funciona como uma linguagem que nos permite transportar as simetrias para o arcabouço da matemática. Assim, apresentamos a seguinte definição pra um grupo:

Definição: Um grupo G é um conjunto de elementos (objetos, operações, rotações, transformações) que podem ser combinados por uma operação $*$ (“multiplicação de grupo”) e que satisfazem às seguintes propriedades:

1. **Fechamento:** Se a e b são dois elementos quaisquer de G, então seu produto a*b também é um elemento de G.
2. **Associatividade:** Se a,b,c pertencem a G, então

   $$(a*b)*c=a*(b*c)=a*b*c.$$

3. **Elemento neutro:** Existe um elemento único I tal que, para todo $a \in G$, tenhamos $I*a=a*I=a$.
4. **Elemento inverso:** Para todo $a \in G$ existe um único $a^{-1} \in G$ tal que

   $$a*a^{-1}=a^{-1}*a=I .$$

No estudo da teoria de representações de grupos algumas definições são fundamentais e serão aqui explicitadas (TUNG, 1999).

Homomorfismo: Um homomorfismo entre um grupo G e um grupo G’ é um mapeamento (não necessariamente um a um) que preserva a multiplicação de grupo. Em outras palavras, se $g_i \in G \rightarrow g_i'$ e $g_1 g_2 = g_3$, então $g_1' g_2' = g_3$.

Isomorfismo: Dois grupos G e G’ são ditos isomórficos se existe uma correspondência um a um entre seus elementos que preserva a lei de multiplicação de grupo, assim eles possuem a mesma tabela de multiplicação.

O isomorfismo é um caso especial do homomorfismo. Toda a teoria de representações de grupos é construída sobre homomorfismos de grupos abstratos (frequentemente grupos de simetria da física) em grupos de operadores lineares ou matrizes em espaços vetoriais (como espaços de estados físicos).

Representação de um grupo: Se existe um homomorfismo de um Grupo G em um grupo de operadores U(G) em um espaço vetorial V, dizemos que U(G) forma uma representação do grupo . Por exemplo, se e, g_1,g_1, etc. são elementos de G e se esses elementos estão associados aos operadores lineares U_e, U_{g1}, U_{g2}, etc. em V, dizemos que esses operadores formam uma representação do grupo G se

$$T_e = I \qquad \text{e} \qquad U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$$

Se U(G) for representado por matrizes, então teremos uma representação matricial do grupo G. A dimensão da representação é a dimensão do espaço vetorial V. Uma representação é dita exata se o homeomorfismo também é um isomorfismo. Uma representação degenerada, por exemplo, não é exata.

Representações de grupos em espaços de funções são muito importantes em aplicações físicas. As propriedades de transformação de equações de onda em sistemas clássicos (cordas, som, fluidos) e quânticos (Schrödinger, Dirac,...), assim como "Campos" (Eletromagnético, Gauge,...) sob grupos de simetria interna no espaço-tempo são centrais para a física moderna.

Subespaço invariante: Seja U(G) uma representação de G no espaço vetorial V, e V1 um subespaço de V com a propriedade d que U(g)lx}∈V_1 para todo x∈V_1 e g ∈G, dizemos que V_1 é um subespaço invariante de V com respeito a . Um subespaço é dito mínimo ou próprio se ele não contem nenhum subespaço invariante não trivial com respeito a U(G) .

Representações irredutíveis: Uma representação U(G) em é irredutível se não existe nenhum subespaço invariante não trivial em V com respeito a U(G) De outra forma, a representação é redutível. Nesse ultimo caso, se o complemento ortogonal de um subespaço invariante também é invariante com respeito a U(G) , então a representação é dita totalmente redutível.

Representação unitária: Se o espaço de representação de grupo é um espaço de produto interno, e se os operadores U(G) são unitários (Um operador unitário obedece U^{-1}=U*$U^{-1} = U*$, ou seja sua inversa coincide com seu adjunto.) para todo g∈G, então a representação U(G) é dita unitária.

Subgrupo a um parâmetro: É qualquer função de operadores contínua A(t) a um parâmetro t, satisfazendo

$$A(t_1 + t_2) = A(t_1)A(t_2)$$

Geradores: Como os subgrupos a um parâmetro são funções diferenciáveis do parâmetro t, podemos definir os geradores do grupo como

$$A_k = \left[\frac{d}{dt} A_k(t)\right]_{t=0}, k = 1, 2, 3,$$

de modo que possamos expressar A_k(t) da seguinte forma

$$A_k(t) = 1 + tA_k + \frac{t^2}{2!} A_k^2 + \ldots = e^{tA_k}$$

o que nos permite determinar uma representação $g \rightarrow T_g$ de um grupo G de forma única através de seus geradores.

5 I O GRUPO DE LORENTZ HOMOGÊNEO

Seja uma transformação de Lorentz dada por (2), podemos representá-la por uma matriz 4X4 que mantém o produto interno de quadrivetores invariante. Na notação tensorial utilizada na Mecânica Relativística, um quadrivetor é dado por

$$x^{\mu} \rightarrow x^{0} = ct, x^{1} = x, x^{2} = y, x^{3} = z;\ x^{\mu} = \{x^{0}, \boldsymbol{x}\},$$

ou seja, ao passarmos para o espaço de Minkowski adicionamos uma coordenada temporal, ct, às coordenadas usais.

Sendo assim, a transformação de Lorentz homogênea mais geral é uma transformação linear da forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},$$

que mantém invariante a forma quadrática $x_{\mu}x^{\mu}$, ou $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$. Aqui fizemos uso da notação de Einstein, segundo a qual a repetição de índices em um membro deixa implícita uma soma nesses índices, que dizemos que estão contraídos. Faremos uso dessa notação ao longo de todo o texto.

Fazendo a substituição $tanh\, u = \beta$ e $\beta = v/c$, podemos reescrever a transformação de Lorentz em termos de funções hiperbólicas utilizando o fato de $cosh^2 u - sinh^2 u = 1$ e $tanh\, u = \frac{sinh\, u}{cosh\, u}$. Sendo assim, a matriz que corresponde a essa transformação é

$$\Lambda = \{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\} = \begin{pmatrix} cosh\, u & -sinh\, u & 0 & 0 \\ -\, sinh\, u & cosh\, u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

que é o chamado boost de Lorentz. Os índices μ e ν nos indicam as linhas e colunas da matriz Λ. Se quisermos obter a transformação inversa do sistema em movimento para o sistema em repouso, os sinais dos $sinh$ devem ser invertidos.

A condição necessária para que o produto interno de quadrivetores seja invariante é dada por

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\sigma}{}_{\lambda} = g_{\nu\lambda}, \quad (4)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que está relacionado à medida de distâncias do espaço de Minkowski e que coresponde à matriz

$$G = \{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As coordenadas de vetores contravariantes (covariantes) são representadas por x^μ (x_μ) e esses vetores são representados por matrizes coluna (linha). Para transformar um vetor covariante em um vetor contravariante, utilizamos o tensor métrico, $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu$, sendo que ele atua invertendo o sinal das componentes espaciais do quadrivetor.

Na forma matricial, a condição necessária e suficiente para uma matriz Λ representar uma transformação de Lorentz é

$$\Lambda^T G \Lambda = G \qquad (5)$$

onde Λ^T é a transposta de Λ. Isso quer dizer que transformações de Lorentz preservam a métrica do espaço de Minkowski. Não é difícil mostrar que as transformações de Lorentz satisfazem as propriedades de grupo definidas anteriormente, sendo os elementos de grupo as matrizes Λ e a operação de grupo a multiplicação de matrizes usual. Um melhor detalhamento disso pode ser encontrado em (ESTEVES, 2017).

As transformações de Lorentz podem ser classificadas da seguinte forma

- $\Lambda^0{}_0 \leq -1$: Não ortócrona
- $\Lambda^0{}_0 \geq 1$: Ortócrona
- det Λ= 1: Própria
- det Λ = -1: Imprópria

sendo que transformações que possuem det Λ = 1 estão continuamente conectadas ao elemento identidade, já que o determinante do elemento identidade também é . As transformações de Lorentz ortócronas preservam a direção no tempo e as transformações próprias preservam a orientação espacial. Transformações de Lorentz que são próprias e ortócronas formam o grupo de transformações de Lorentz homogêneo restrito.

Além do boost de Lorentz, transformações de rotações no espaço tridimensional também obedecem à condição dada pela equação (5) e, assim, dão origem ao grupo de rotação, que é um subgrupo do grupo de Lorentz. Uma rotação em torno do eixo pode ser representada pela matriz

$$\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estamos interessados apenas no grupo de Lorentz próprio ortócrono, que preserva a orientação temporal e espacial e que é formado por rotações, boosts, ou uma combinação dos dois.

Como os elementos do grupo de Lorentz restrito estão continuamente conectados à identidade, é de interesse encontrarmos uma transformação infinitesimal a partir da origem. Para isso, precisamos encontrar os geradores de tal transformação. Se denotarmos pelos números 1 e 0, uma rotação que ocorre no plano x^0 x^1, que é o caso da matriz dada na equação (3), podemos encontrar os geradores dessa rotação através de

$$\mathfrak{M}^{10} = \frac{d}{du}\,\Lambda\Big|_{u=0}$$

e similarmente para rotações nos planos x^0 x^2 e x^0 x^3, encontramos os seguintes geradores de boosts

$$\mathfrak{M}^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

nas direções x^1,x^2 e x^3, respectivamente. Já para rotações espaciais nos planos x^1 x^2, x^2 x^3, e x^3 x^1 encontramos os seguintes geradores

$$\mathfrak{M}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, uma transformação de Lorentz infinitesimal arbitrária pode ser escrita como

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\left(\mathfrak{M}_{\mu\nu}\right)^{\alpha}{}_{\beta},$$

onde $\delta^{\alpha}{}_{\beta}$ corresponde à operação identidade e os $\omega^{\mu\nu}$ são números reais. Nessa expressão os μ e ν identificam o plano de rotação e os α e β identificam os elementos das matrizes. Na forma matricial, escrevemos

$$\Lambda(\omega) = I + \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\mathfrak{M}_{\mu\nu}. \qquad (6)$$

As representações do grupo serão obtidas por exponenciação,

$$\Lambda(\mu\nu;\ u) = e^{u\mathfrak{M}^{\mu\nu}},$$

e os geradores $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$ satisfazem as seguintes regras de comutação (O comutador de dois operadores Â e $\hat{B}$ é dado por $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$)

$$[\mathfrak{M}_{\mu\nu}, \mathfrak{M}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\mathfrak{M}_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}\mathfrak{M}_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}\mathfrak{M}_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}\mathfrak{M}_{\mu\sigma}.$$

Para uma representação $D(\Lambda)$ do grupo de Lorentz restrito, os geradores infinitesimais dessa representação serão $M_{\mu\nu}$. Assim, se Λ for dado por (6) teremos,

$$\mathrm{D}(\omega) = I + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}$$

onde os $M_{\mu\nu}$ obedecem às mesmas regras de comutação que os $\mathfrak{M}_{\mu\nu}$.

Estamos interessados nas representações de dimensão finita do grupo de Lorentz homogêneo, que não são unitárias. Para encontrá-las vamos definir os operadores M e N da seguinte forma

$$\boldsymbol{M} = (M_{32}, M_{13}, M_{21}) \quad , \quad \boldsymbol{N} = (M_{01}, M_{02}, M_{03}) \ ,$$

de forma que é fácil notar que M engloba as representações dos geradores de rotações infinitesimais espaciais, e N as representações dos geradores de transformações que atuam sobre uma coordenada temporal e uma espacial, ou seja, os geradores do boost de Lorentz. Esses operadores possuem as seguintes regras de comutação

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk}M_k \ , [N_i, N_j] = -\epsilon_{ijk}M_k \ , \ [M_i, N_j] = \epsilon_{ijk}N_k$$

Podemos também construir dois operadores que comutam com todos os M_i e N_i, os chamados operadores de Casimir, que são operadores que comutam com todos os geradores do grupo. Eles são dados por

$$\boldsymbol{M}^2 - \boldsymbol{N}^2 = \tfrac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma} = -\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N}$$

e possuem autovalores j(j+1) e j'(j'+1) respectivamente.

Agora introduzirmos os operadores

$$J_l = \frac{1}{2} i (M_l + iN_l), \qquad K_l = \frac{1}{2} i (M_l - iN_l) \ ,$$

que satisfazem às regras de comutação

$$[J_k, J_l] = \epsilon_{klm} J_m, \quad [K_k, K_m] = i\epsilon_{lmn} K_n, \quad [J_l, K_m] = 0.$$

Devido aos fatores i, os operadores J_l e K_l não podem ser simultaneamente hermitianos, assim como M e N (Um operador hermitiano $\hat{Q}$ representa um observável, ou seja, uma quantidade que pode ser observada, medida, e possui a seguinte propriedade $\langle f|\hat{Q}f\rangle = \langle \hat{Q}f|f\rangle$).

Podemos ter um espaço de representação irredutível $V^{jj'}$ de dimensão (2j+1)(2j1+1) gerado pelos vetores de base $|jm; j'm'\rangle$ para cada par de autovalores j j'. Os j, m, j`, m` são inteiros ou semi inteiros e assumem os valores

$$-j \leq m \leq j \quad , \quad -j' \leq m' \leq j'.$$

Os operadores J e K possuem a seguinte representação (SCHWEBER, 1962)

$$J_\pm|jm; j'm'\rangle = (J_1 \pm iJ_2)|jm; j'm'\rangle \ ,$$

$$J_\pm|jm; j'm'\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|jm \ \pm 1; j'm'\rangle \ ,$$

$$J_3|jm; j'm'\rangle = m|jm; j'm'\rangle$$

e

$$K_\pm|jm; j'm'\rangle = (K_1 \pm iK_2)|jm; j'm'\rangle \ ,$$

$$K_\pm|jm; j'm'\rangle = \sqrt{(j' \mp m')(j' \pm m' + 1)}|jm; j'm' \pm 1\rangle \ ,$$

$$K_3|jm; j'm'\rangle = m'|jm; j'm'\rangle \ .$$

A representação para J é a mesma encontrada no caso do grupo de rotação e está associada ao momento angular. Adicionalmente às representações do grupo de rotação, temos também as representações do operador K, que dá conta do boost de Lorentz. As representações irredutíveis do grupo de Lorentz homogêneo são classificadas pelos autovalores dos operadores de Casimir M e N e a matriz que representa qualquer transformação de Lorentz particular $D^{(jj')}(\Lambda)$ é agora obtida a partir da representação dos J e K, que possui dimensão (2j+1)(2j'+1), sendo de valor único se j+j for inteiro e duplamente degenerada do contrário. Podemos classificar certas quantidades com base nas transformações sob as quais elas transformam. Alguns exemplos são os seguintes:

$D^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ → vetor de 4 componentes; $D^{(0,0)}$ → escalar
$D^{\left(\frac{1}{2},0\right)}$ → espinor de duas componentes; $D^{\left(0,\frac{1}{2}\right)}$ → espinor conjugado

No caso das representações espinoriais, uma representação matricial explícita dos geradores infinitesimais pode ser dada em termos das matrizes de Pauli:

$$M_j^{\frac{1}{2},0} = -\frac{1}{2}\, i\sigma_j \quad , \quad M_j^{0,\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\, i\sigma_j \; , \quad N_j^{\frac{1}{2},0} = -\frac{1}{2}\, \sigma_j \quad , \quad N_j^{0,\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\, \sigma_j \; ,$$

sendo que essas representações não são equivalentes.

As representações de dimensão finita do grupo de Lorentz homogêneo, que não são unitárias, não podem corresponder a estados realizáveis fisicamente. No entanto, sua relevância na física se deve ao fato de todas as variáveis físicas, funções de onda clássicas e quânticas, assim como campos, transformarem como representações de dimensão finita do grupo homogêneo de Lorentz. Assim, posição, momento linear, momento angular, entre outros, transformam segundo o grupo de Lorentz homogêneo. O grupo cujas representações correspondem a estados realizáveis de partículas elementares é o grupo de Poincaré, como veremos a seguir (TUNG, 1985).

6 I O GRUPO DE POINCARÉ

Devido a homogeneidade do espaço-tempo as leis da física devem ser invariantes sob translações no espaço-tempo e assim devemos ter uma transformação de coordenadas e, consequentemente, um grupo de simetrias, que leve em conta essas translações. Nesse contexto, vamos introduzir o grupo de Poincaré, ou grupo de Lorentz não-homogêneo, que é formado pelo conjunto de transformações no espaço de Minkowski, sendo estas translações no espaço-tempo, rotações espaciais e boost de Lorentz (SCHWEBER, 1962; TUNG, 1985). Ou seja, o grupo de Poincaré consiste do grupo de Lorentz homogêneo juntamente com translações no espaço-tempo. Uma transformação de Lorentz não-homogênea $L = \{a, \Lambda\}$, é definida por

$$x'^{\mu} = (Lx)^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu},$$

onde a^{μ} é um vetor real, que corresponde à translação e $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ é a transformação de Lorentz homogênea. A atuação dessa transformação ocorre como um produto da transformação de Lorentz com a translação, sendo que a translação atua por último. A representação matricial da transformação de Lorentz não-homogênea é dada por

$$L(a,\Lambda)x^{\mu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 & a^0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 & a^1 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 & a^2 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde o número não tem significado físico e está aí para que tenhamos uma única matriz quadrada que dê conta das duas transformações. Um elemento geral do grupo de Poincaré pode, então, ser decomposto da seguinte forma

$$L(a,\Lambda) = \mathrm{T(a)}\Lambda \ ,$$

o que nos diz que ele possui dois subgrupos, o grupo de translação no espaço-tempo e o grupo homogêneo de Lorentz. O grupo de Poincaré é um grupo a 10 parâmetros e por isso possui 10 geradores, os 6 relacionados às transformações de Lorentz homogêneas infinitesimais, e 4 relacionados às translações infinitesimais.

Uma translação infinitesimal é definida por

$$T(\delta b) = E - i\delta b^{\mu} p_{\mu},$$

onde os p_{μ} são os geradores das translações infinitesimais e δb^{μ} são as componentes de um vetor de deslocamento arbitrariamente pequeno. Como as translações podem ser tanto temporais quanto espaciais, temos que p_0 corresponde ao gerador de translações temporais e os p_i, para i=1, 2, 3, correspondem aos geradores de translações espaciais. Em aplicações físicas, os geradores p_i são realizados como operadores momento e o p_0 como operador energia.

Uma translação finita também será obtida por exponenciação da seguinte forma

$$U(a) = e^{-ia_{\mu}p^{\mu}}.$$

Os geradores de translações infinitesimais, bem como os geradores das transformações de Lorentz $M_{\mu\nu}$ discutidos anteriormente são operadores hermitianos que obedecem as seguintes regras de comutação

$$[p^{\mu}, p_{\nu}] = 0 \ ,$$
$$[M_{\mu\nu}, p_{\sigma}] = i(g_{\nu\sigma}p_{\mu} - \ g_{\mu\sigma}p_{\nu}) \ ,$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\nu\sigma}M_{\rho\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\rho\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\rho\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\rho\sigma}).$$

Para classificar as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré, vamos novamente construir os operadores de Casimir. O primeiro operador de Casimir é definido por

$$P = p^{\mu}p_{\mu}$$

e corresponde ao produto escalar do quadrimomento p^{μ} com autovalores m^2. Para construir o segundo operador de Casimir, vamos usar o pseudovetor w_{σ} de Pauli-Lubanski definido por (SCHWEBER, 1962)

$$w_{\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}M^{\mu\nu}p^{\lambda},$$

onde $\epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}$ é o símbolo de Levi-Civita em quatro dimensões, e definir as quantidades

$$v_{\mu\nu\rho} = p_{\mu}M_{\nu\rho} + p_{\nu}M_{\rho\mu} + p_{\rho}M_{\mu\nu} = M_{\nu\rho}p_{\mu} + M_{\rho\mu}p_{\nu} + M_{\mu\nu}p_{\rho},$$

de modo que $(w^0, w^1, w^2, w^3)=(v^{321}, v^{320}, v^{130}, v^{210})$, ou em notação vetorial

$$\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{M} \;, \qquad \boldsymbol{w} = p_0\boldsymbol{M} - \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{N},$$

e o segundo operador de Casimir será dado por

$$W = \frac{1}{6}v^{\mu\nu\rho}v_{\mu\nu\rho} = -w^{\mu}w_{\mu} = \frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}p_{\sigma}p^{\sigma} - M_{\mu\sigma}M^{\nu\sigma}p^{\mu}p_{\nu}$$

e está associado à helicidade da partícula ζ.

Podemos classificar as representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré segundo os valores de p^2 e **p**. Em especial, no caso em que $p^2>0$ as representações irredutíveis do grupo de Poincaré podem ser obtidas a partir do método de representação induzida (TUNG, 1985), que é utilizado para gerar representações irredutíveis de grupos contínuos que possuem um subgrupo invariante.

Primeiramente devemos selecionar um vetor padrão e o subespaço associado a ele. O vetor padrão será

$$p_t^{\mu} \equiv (p^0, \boldsymbol{p}) = (m, 0),$$

ou seja, o vetor correspondente a um estado em repouso (**p**=0) com massa, ou energia de repouso, m. Vamos denotar por {|**0**,ζ} os vetores de base que geram o subespaço correspondente aos autovalores p_t^{μ} de p^{μ}. As equações que definem esses vetores são

$$P^{\mu}|\mathbf{0},\zeta\rangle = |\mathbf{0},\zeta\rangle p_t^{\mu}$$
$$\boldsymbol{J}^2|\mathbf{0},\zeta\rangle = |\mathbf{0},\zeta\rangle s(s+1)$$
$$J_3|\mathbf{0},\zeta\rangle = |\mathbf{0},\zeta\rangle\zeta$$

onde estamos usando o operador **J**, que é um operador de Casimir do grupo de rotação em três dimensões e que possui autovalores j (j+1). Nesse caso estamos usando s ao invés de j porque estamos lidando com vetores definidos no referencial de repouso da partícula e, portanto, devemos utilizar o spin, o momento angular intrínseco da partícula. Vamos omitir os detalhes da obtenção dessas representações, mas que podem ser encontradas em (TUNG, 1985). Mas o que é relevante aqui é o fato do método utilizado nos permitir obter um vetor arbitrário p^{μ} através do vetor padrão p_t^{μ}. A partir disso, teremos um espaço vetorial gerado pelos vetores $\{|\boldsymbol{p},\zeta\rangle\}$ e que será invariante sob transformações do grupo de Poincaré. Esse espaço é irredutível e a representação obtida dessa forma é unitária.

Em conclusão, o espaço de representação irredutível será gerado por vetores de base denotados por $|m,s;\boldsymbol{p},\zeta\rangle$, onde **m** e **s** são a massa e spin da partícula, **p** o vetor momento do sistema e ζ a helicidade do estado. Sendo assim, haverá uma representação irredutível única para partículas com spin diferentes e que são, portanto, governada por equações de onda distintas.

Para um sistema elementar de massa **m** e spin **s**, cuja variedade de estados gera o espaço vetorial da representação irredutível rotulada por (m, s), uma translação no tempo $a_{\mu} = (\tau, 0,0,0)$ do estado $|\psi\rangle$ dá origem ao estado $U(\tau)\,|\psi\rangle$, onde

$$\langle \boldsymbol{p}\ s|U(\tau)|\psi\rangle = e^{-ip_0\tau}\psi(\boldsymbol{p}\ ,s) = \psi(\boldsymbol{p}\ ,s;\tau),$$

e a evolução temporal do sistema elementar é governada por

$$i\partial_{\tau}\psi(\boldsymbol{p}\ ,s;\tau) = p_0\psi(\boldsymbol{p}\ ,s;\tau) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\psi(\boldsymbol{p}\ ,s;\tau).$$

onde ∂_{τ} é uma derivada em relação ao tempo.

Assim, as representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré nos levam às equações de movimento de partículas livres, devido à existência da translação temporal nesse grupo.

7 I CONCLUSÕES

Os princípios de simetria se mostraram fundamentais no desenvolvimento desse trabalho à medida que a homogeneidade do espaço está relacionada com a conservação do momento linear e a isotropia com a conservação do momento angular.

Por conta da conservação desses dois observáveis físicos, eles são invariantes de grupo, o que nos permitiu classificar as representações dos grupos com base nos seus autovalores. Como exemplo de uma equação de onda invariante apenas sob transformações de Lorentz, utilizamos a equação de onda do eletromagnetismo, que é satisfeita pelos campos magnético e elétrico.

No domínio da Teoria Quântica de Campos devemos utilizar a relatividade especial para dar conta das transformações entre referenciais inerciais e é o grupo de Poincaré que representa algebricamente essa transformação de coordenada.

Como vimos, as representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré são classificadas pelo spin das partículas elementares e correspondem às equações de movimentos de partículas livres. Além disso, as representações do grupo de Lorentz homogêneo, mesmo não correspondendo a estados realizáveis, nos mostram como se transformam inúmeros observáveis físicos.

Os resultados apresentados aqui não são novos e podem ser encontrados nas referências citadas ao longo do texto. No entanto, entendemos que a Teoria de Grupos é um tema de grande relevância devido a sua ampla utilização nas mais diversas áreas da Física e acreditamos que deveria ser mais explorado nos cursos de graduação.

8 I AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Estadual de Feira de Santana, ao CNPq e à Fapesb pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

DIAS, S. A. **A Teoria Quântica de Campos e seu papel na descrição das Interações Fundamentais**. Caderno de Física da UEFS, 04 (01 e 02): 161-175, 2006.

ESTEVES, A. C. C. **Representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré e as partículas elementares**. Monografia de graduação, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2017.

LIVIO, Mario. A **equação que ninguém conseguia resolver**. Record, Rio de Janeiro, 2005.

NAIMARK, M. A. **Linear representations of the Lorentz group**, Oxford/ London/Edinburgh/ New York/ Paris/ Frankfurt: Pergamon Press, 1964.

REITZ, John R; MILFORD, Frederick J; CHRISTY, Robert W. F**oundations of electromagnetic theory**. 4th ed New York: Addison-Wesley Publishing Company, c.1993. 630 p.

RODITI, I. **Padrões e simetrias: Estética na Física e na Matemática**. CBPF, Rio de Janeiro, 2003

SCHRÖDER, Ulrich E. **Special relativity**. Singapore; Teaneck, N.J.: World Scientific, 1990. xi, 214 p. (World Scientific lecture notes in physics).

SCHWEBER S. S. **An introduction to relativistic quantum field theory**. 2ª ed. Nova York, Harper & Row, 1962.

SUDARSHAN, E. C. G.; MUKUNDA, N. **Classical Dynamics: A Modern Perspective**, Krieger Publishing, Malabar, Florida, 1983.

TUNG, Wu-Ki. **Group theory in physics**. Philadelphia: World Scientific, c1985. xviii, 344 p.