

# SISTEMA DE ENCRIPCIÓN EN FASE PARA IMÁGENES BASADO EN LA TRANSFORMADA DE HARTLEY FRACCIONARIA

*Fecha de envío: 15/04/2024*

*Data de aceite: 02/05/2024*

### **Juan Manuel Vilardy Ortiz**

Universidad Popular del Cesar, Grupo de Optoelectrónica y Procesamiento de Señales (OPSE), Departamento de Electrónica, Valledupar - Colombia

### **Carlos Jesus Jimenez Ruiz**

Universidad de La Guajira, Grupo de Investigación en Física del Estado Sólido (GIFES), Facultad de Ingeniería Riohacha - Colombia

### **Ronal Antonio Perez Jimenez**

Universidad de La Guajira, Grupo de Investigación en Física del Estado Sólido (GIFES), Facultad de Ingeniería Riohacha - Colombia

**RESUMEN:** Se propone un nuevo sistema de encriptación en fase para imágenes basado en la transformada de Hartley fraccionaria (fractional Hartley transform, FrHT), máscaras de fase aleatoria (random phase masks, RPMs) y operaciones de truncamiento. Con el fin de calcular la FrHT de forma rápida y eficiente, se presenta una nueva forma de calcular dicha FrHT. La imagen original que se desea encriptar es codificada en fase, lo cual incrementa la seguridad del sistema de encriptación al

ser la codificación en fase una operación no lineal. También, se emplean otras operaciones no lineales en los sistemas de encriptamiento y desencriptamiento, tales como las operaciones truncamiento de imágenes de valor complejo en amplitud y fase. El sistema de encriptación y desencriptación se encuentran protegidos por seis claves, dadas por 2 RPMs, 2 órdenes fraccionarios de la FrHT y 2 códigos pseudoaleatorios generados por las operaciones de truncamiento de amplitud y fase. Estas llaves proporcionan una alta seguridad al sistema de seguridad propuesto frente ataques de fuerza bruta y los valores de dichas claves deben ser los correctos con el fin de recuperar correctamente la imagen original en el sistema de desencriptamiento. El sistema propuesto de seguridad de esta investigación es validado mediante simulaciones computacionales.

**PALABRAS-CLAVE:** Sistemas de encriptación en fase para imágenes, Operaciones de truncamiento, Máscaras de fase aleatorias, Transformada de Hartley fraccionaria.

## PHASE ENCRYPTION SYSTEM FOR IMAGES BASED ON THE FRACTIONAL HARTLEY TRANSFORM

**ABSTRACT:** A new phase encryption system for images based on fractional Hartley transform (FrHT), random phase masks (RPMs) and truncation operations is proposed. In order to calculate FrHT faster and more efficiently, a new way of calculating FrHT is presented. The original image to be encrypted is phase-encoded, which increases the security of the encryption system as phase encryption is a non-linear operation. Also, other non-linear operations are used in encryption and decryption systems, such as amplitude and phase truncation operations of complex-valued images. The encryption and decryption system is protected by six keys, given by 2 RPMs, 2 fractional orders of the FrHT and 2 pseudorandom codes generated by the amplitude and phase truncation operations. These keys provide high security to the proposed security system against brute force attacks and the values of these keys must be correct in order to properly recover the original image in the decryption system. The proposed security system of this research is validated using computational simulations.

**KEYWORDS:** Phase encryption system for images, Truncation operations, Random phase masks, Fractional Hartley transform.

### INTRODUCCIÓN

Las técnicas de encriptación de imágenes utilizan algunas herramientas matemáticas relacionadas con el procesado de señal, tales como las transformadas de Fourier, Fresnel, Fourier fraccionaria, Hartley, Gyrator, Hilbert radial y Wavelet, entre otras transformadas, con el objetivo de codificar la imagen a encriptar en un ruido aleatorio (Chen & Zhao, 2006; Millán & Pérez-Cabré, 2011; Morales *et al.*, 2015; Ozaktas *et al.*, 2001; Pei & Ding, 2002; Qin & Pen, 2010; Refregier & Javidi, 1995; Rodrigo *et al.*, 2007; Situ & Zhang, 2004; Towghi *et al.*, 1999; Unnikrishnan *et al.*, 2000; Vildary *et al.*, 2011; Vildary *et al.*, 2012; Vildary *et al.*, 2013a; Vildary *et al.*, 2013b; Vildary *et al.*, 2014a; Vildary *et al.*, 2014b; Vildary *et al.*, 2017; Zhao *et al.*, 2008). Existen sistemas de encriptación de imágenes basados en la transformada de Fourier fraccionaria (fractional Fourier transform, FrFT) (Unnikrishnan *et al.*, 2000; Vildary *et al.*, 2014b) o la transformada de Hartley fraccionaria (fractional Hartley transform, FrHT) (Vildary *et al.*, 2013a; Zhao *et al.*, 2008), estas transformadas fraccionarias mejoran la seguridad de los sistemas de encriptación debido a que los órdenes fraccionarios de estas transformadas representan nuevas claves adicionales (Millán & Pérez-Cabré, 2011). La FrFT (Ozaktas *et al.*, 2001) y la FrHT (Pei & Ding, 2002) son generalizaciones de las transformadas de Fourier y Hartley, respectivamente, que añaden un nuevo grado de libertad dado por el orden fraccionario de estas transformadas fraccionarias. La FrFT y la FrHT se utilizan en aplicaciones relacionadas con el análisis y procesamiento de señales e imágenes.

El sistema de encriptación que codifica la imagen a encriptar (imagen original) en fase fue propuesto en la referencia (Towghi *et al.*, 1999). Esta codificación en fase es una operación no lineal que aumenta la seguridad del sistema de encriptación propuesto en comparación con los sistemas de encriptación que codifican la imagen original en amplitud. En otros trabajos, la transformada de Hartley (Chen & Zhao, 2006) y la FrHT (Vilardy *et al.*, 2013a; Zhao *et al.*, 2008) se han utilizado en sistemas de encriptación para obtener una imagen encriptada de valor real y aumentar la seguridad de los sistemas de encriptación, respectivamente. Las operaciones de truncamiento en amplitud y fase pueden introducir efectos no lineales en los sistemas de encriptación, permitiendo mejorar la seguridad de estos sistemas de encriptación (Qin & Pen, 2010).

En esta investigación se propone un sistema de encriptación-desencriptación de imágenes usando la FrHT, codificación en fase, máscaras de fase aleatorias (RPMs) y operaciones de truncamiento. La imagen original se codifica en fase debido a que esta codificación permite una mejor protección de la imagen codificada frente a ataques de seguridad (Millán & Pérez-Cabré, 2011; Vilardy *et al.*, 2013a; Vilardy *et al.*, 2017). Se introduce una simplificación para el cálculo de la FrHT con el fin de realizar esta transformación de forma eficiente y rápida. Se utilizan dos órdenes fraccionarios de las FrHT como clave del sistema de seguridad. Las RPMs son imágenes aleatorias que se utilizan como claves del sistema de encriptación. Las operaciones de truncamiento en amplitud y fase son herramientas matemáticas no lineales, estas operaciones de truncamiento permiten generar dos nuevas claves para el sistema de encriptación-desencriptación. Por último, el objetivo principal del sistema de seguridad propuesto en esta investigación es proporcionar un sistema de encriptación-desencriptación de imágenes digitales con un alto nivel de seguridad para la protección de las imágenes encriptadas.

## UNA SIMPLIFICACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA FrHT

La FrHT puede definirse utilizando la FrFT (Pei & Ding, 2002). La FrFT con orden fraccionario  $p$ , es una transformación integral lineal que mapea una función dada  $f(x)$  (escrita en una dimensión para simplificar) en una función  $F^p(u)$ , por (Ozaktas *et al.*, 2001):

$$F^p(u) = F^p\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_p(u, x) f(x) dx, \quad (1)$$

$$K_p(u, x) = C_p \exp\{i\pi(u^2 + x^2) \cot \alpha - 2ux \csc \alpha\}, \quad \alpha = \pi p/2, \quad -\pi < \alpha \leq \pi, \quad (2)$$

donde  $C_p$  es una constante que depende de  $p$ ,  $K_p$  es el kernel fraccionario de Fourier. Para  $p = 0$ , la FrFT es la transformada de identidad. Para  $p = 1$ , la FrFT se reduce a la transformada de Fourier directa. Para  $p = 2$ , se obtiene la transformada inversa. Para  $p = -1$ , la FRFT se corresponde a la transformada de Fourier inversa. La FrFT inversa corresponde a la FrFT con un orden fraccionario de  $-p$ . El operador FrFT es aditivo con respecto al orden fraccionario,  $F^{p1}F^{p2} = F^{p1+p2}$ . La FrFT tiene una periodicidad de 4 con respecto al orden fraccionario  $p$ .

La FrHT con un orden fraccionario  $p$  de una función  $f(x)$  se define como (Pei & Ding, 2002):

$$f_p(u) = H^p\{f(x)\} = \frac{1+\exp(i\pi p/2)}{2} F^p(u) + \frac{1-\exp(i\pi p/2)}{2} F^p(-u), \quad (3)$$

donde  $H^p$  es el operador de Hartley fraccionario,  $f_p(u)$  es la FrHT con un orden fraccionario  $p$  de  $f(x)$ ,  $F^p(u)$  es la FrFT con orden fraccionario  $p$  de  $f(x)$ . Debido a que la FrHT puede definirse en términos de la FrFT, la FrHT retiene todas las propiedades de la FrFT (Pei & Ding, 2002). Cuando  $p = 1$ , la FrHT se reduce a la transformada Hartley convencional. La FrHT tiene una periodicidad de 2 con respecto al orden fraccionario  $p$ . El cálculo de la FrHT mediante la ecuación (3) utiliza el cálculo de dos FrFTs. Se propone la siguiente simplificación de la FrHT con el fin de calcular esta transformada de manera eficiente y rápida:

$$f_p(u) = H^p\{f(x)\} = \frac{1+\exp(i\pi p/2)}{2} F^p\{f(x)\} + \frac{1-\exp(i\pi p/2)}{2} F^p\{f(-x)\}$$

$$f_p(u) = H^p\{f(x)\} = F^p\left\{\frac{1+\exp(i\pi p/2)}{2} f(x) + \frac{1-\exp(i\pi p/2)}{2} f(-x)\right\}. \quad (4)$$

Por lo tanto, el cálculo de la FrHT mediante la ecuación (4) utiliza el cálculo de una sola FrFT. De esta manera, el cálculo de la FrHT es más eficiente y más rápido en comparación con el cálculo de la FrHT utilizado en las referencias (Vilardy *et al.*, 2013a; Zhao *et al.*, 2008).

## OPERACIONES DE TRUNCAMIENTO EN AMPLITUD Y FASE

Las operaciones de truncamiento son herramientas matemáticas no lineales que pueden aplicarse a una imagen de valor complejo (Qin & Pen, 2010). Sea  $f(x) = a(x) \exp(i2\pi\phi(x))$  una función de valor complejo, donde  $a(x)$  y  $\phi(x)$  representan la amplitud y la fase de la función  $f(x)$ , respectivamente. La amplitud  $a(x)$  es una función de valor real positivo y la fase  $\phi(x)$  es una función de valor real con valores positivos y/o negativos.

El truncamiento en amplitud (amplitude truncation, AT) permite seleccionar la función de fase  $\phi(x)$  a partir de la función de valor complejo  $f(x)$ . Por lo tanto, el resultado del AT cuando se aplica a la función de valor complejo  $f(x)$  es:

$$AT\{f(x)\} = AT\{a(x)\exp(i2\pi\phi(x))\} = \phi(x). \quad (5)$$

El truncamiento en fase (phase truncation, PT) permite seleccionar la función de amplitud  $a(x)$  a partir de la función de valor complejo  $f(x)$ . Cuando se aplica el PT a la función de valor complejo  $f(x)$ , se obtiene:

$$PT\{f(x)\} = PT\{a(x)\exp(i2\pi\phi(x))\} = a(x). \quad (6)$$

La función de valor complejo  $f(x)$  puede expresarse en términos de las operaciones AT y PT como:

$$f(x) = PT\{f(x)\}exp\{i2\pi AT\{f(x)\}\}. \quad (7)$$

## SISTEMAS DE ENCRIPCIÓN Y DESENCRIPTACIÓN DE IMÁGENES

Sea  $f(x)$  la imagen real a encriptar (imagen original) con valores en el intervalo de  $[0, 1]$ , y sean  $r(x)$  y  $t(u)$  dos RPMs dadas por

$$r(x) = exp\{i2\pi s(x)\}, \quad t(u) = exp\{i2\pi n(u)\}, \quad (8)$$

donde  $x$  y  $u$  representan las coordenadas para el dominio espacial y el dominio de Hartley fraccionario (fractional Hartley domain, FrHD), respectivamente,  $s(x)$  y  $n(u)$  son funciones positivas normalizadas generadas aleatoriamente, estadísticamente independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo de  $[0, 1]$ .

La imagen a encriptar  $f(x)$  se codifica en fase  $f_{ph}(x) = exp\{i2\pi f(x)\}$  (Millán & Pérez-Cabré, 2011; Vilardy *et al.*, 2013a; Vilardy *et al.*, 2017). A continuación, la imagen  $f_{ph}(x)$  multiplicada a la RPM  $r(x)$  se transforma utilizando la FrHT de orden  $p1$

$$h_{p1}(u) = H^{p1}\{f_{ph}(x)r(x)\} = q_{p1}(u)exp\{i2\pi\phi_{p1}(u)\}. \quad (9)$$

Las distribuciones de datos  $q_{p1}(u)$  y  $\phi_{p1}(u)$  denotan la amplitud y la fase de la imagen de valor complejo  $h_{p1}(u)$ , respectivamente. Cuando se aplican las operaciones de truncamiento en amplitud y fase a la imagen  $h_{p1}(u)$ , se obtienen las siguientes funciones:

$$q_{p1}(u) = PT\{h_{p1}(u)\}, \quad \phi_{p1}(u) = AT\{h_{p1}(u)\}. \quad (10)$$

La imagen  $q_{p1}(u)$  se multiplica a la RPM  $t(u)$  y este producto se transforma mediante la FrHT de orden  $p2$

$$s_{p2}(v) = H^{p2}\{q_{p1}(u)t(u)\} = e(v)exp\{i2\pi\theta_{p2}(v)\}, \quad (11)$$

donde las funciones  $e(v)$  y  $\theta_{p2}(v)$  representan la amplitud y la fase de la imagen de valor complejo  $s_{p2}(v)$ , respectivamente. Por último, se aplican las operaciones de truncamiento en amplitud y fase a  $s_{p2}(v)$ :

$$e(v) = PT\{s_{p2}(v)\}, \quad \theta_{p2}(v) = AT\{s_{p2}(v)\}. \quad (12)$$

La distribución de datos de valor real  $e(v)$  es la imagen encriptada. Las seis claves del sistema de encriptación vienen dadas por los dos órdenes fraccionarios ( $p1$  y  $p2$ ) de las FrHTs, las dos imágenes pseudoaleatorias  $\phi_{p1}(u)$  y  $\theta_{p2}(v)$  y las dos RPMs  $r(x)$  y  $t(u)$ . Las RPMs  $r(x)$  y  $t(u)$  se utilizan para distribuir el contenido de información de la imagen original  $f(x)$  sobre la distribución encriptada  $e(v)$ . Las claves dadas por la distribución de datos  $\phi_{p1}(u)$  y  $\theta_{p2}(v)$  se generan mediante las operaciones de truncamiento en amplitud aplicadas

en el sistema de encriptación. Las claves  $\phi_{p1}(u)$  y  $\theta_{p2}(v)$  no son verdaderamente aleatorias porque dependen de los valores de la imagen  $f_{ph}(x)$ , los dos órdenes fraccionarios ( $p1$  y  $p2$ ) de las FrHT y de las RPMs  $r(x)$  y  $t(u)$ , utilizados en las ecuaciones (8)-(12).

La recuperación de la imagen original  $f(x)$  es posible en la salida del sistema de desencriptación a partir de la imagen encriptada  $e(v)$  cuando se utilizan los valores correctos de todas las claves. La imagen desencriptada  $d(x)$  puede obtenerse mediante las siguientes ecuaciones:

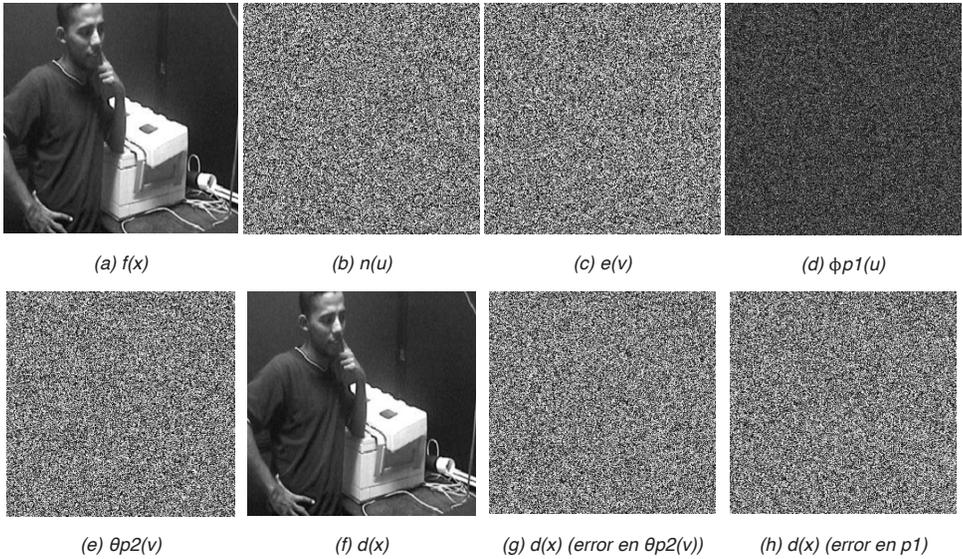
$$q_{p1}(u) = t^*(u)H^{-p2}\{e(v)\exp\{i2\pi\theta_{p2}(v)\}\}, \quad (13)$$

$$f_{ph}(x) = r^*(x)H^{-p1}\{q_{p1}(u)\exp\{i2\pi\phi_{p1}(v)\}\}, \quad (14)$$

$$d(x) = AT\{f_{ph}(x)\} = f(x). \quad (15)$$

La imagen original  $f(x)$  puede recuperarse correctamente en la salida del sistema de desencriptación siempre que los valores de las claves utilizados en los sistemas de encriptación y desencriptación sean los mismos.

La Figura 1 muestra un ejemplo para ilustrar los resultados de simulación obtenidos al evaluar los sistemas de encriptación y desencriptación de imágenes propuestos que se presentan en esta sección. Todas las imágenes utilizadas en las simulaciones numéricas tienen una resolución de 512 por 512 píxeles en escala de grises. La imagen original  $f(x)$  y el código de distribución aleatoria  $n(u)$  de la RPM  $t(u)$  se representan en las Figuras 1(a) y 1(b), respectivamente. La imagen encriptada de valor real  $e(v)$  para los órdenes fraccionarios  $p1 = 1,77$  y  $p2 = 0,43$  de las FrHTs se muestra en la Figura 1(c). Esta imagen encriptada es una distribución de datos ruidosa que no revela ninguna información de la imagen original  $f(x)$ . Las dos imágenes pseudoaleatorias obtenidas  $\phi_{p1}(u)$  y  $\theta_{p2}(v)$  en el proceso de encriptación, se presentan en las Figuras 1(d) y 1(e), respectivamente. Estas imágenes tienen un aspecto ruidoso muy similar al código aleatorio  $n(u)$  de la Figura 1(b), pero las dos imágenes  $\phi_{p1}(u)$  y  $\theta_{p2}(v)$  son distribuciones de datos pseudoaleatorias. La imagen desencriptada  $d(x)$  obtenida a partir de la imagen encriptada  $e(v)$  y utilizando las claves de seguridad correctas se muestra en la Figura 1(f).



**Figura 1.** (a). Imagen a encriptar  $f(x)$ . (b). Código de distribución aleatoria  $n(u)$  de la RPM  $t(u)$ . (c). Imagen encriptada  $e(v)$  para los órdenes fraccionarios  $p1 = 1,77$  y  $p2 = 0,43$  de las FrHTs. Imágenes pseudoaleatorias: (d)  $\phi_{p1}(u)$ , y (e)  $\theta_{p2}(v)$ . (f) Imagen desencriptada  $d(x)$  cuando se utilizan las seis claves de seguridad correctas ( $p1$ ,  $p2$ ,  $r(x)$ ,  $t(u)$ ,  $\phi_{p1}(u)$  y  $\theta_{p2}(v)$ ). Imágenes desencriptadas para las siguientes claves incorrectas: (g) la imagen pseudoaleatoria  $\theta_{p2}(v)$ , y (h) el orden fraccionario  $p1 = 1,775$ .

Para evaluar la calidad de las imágenes desencriptadas, utilizamos la raíz del error cuadrático medio (root mean square error, RMSE) entre las imágenes desencriptadas  $d(x)$  y la imagen original  $f(x)$  (Vilardy *et al.*, 2013b):

$$RMSE = \left\{ \frac{\sum_{x=1}^M [f(x) - d(x)]^2}{\sum_{x=1}^M [f(x)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Los valores de la métrica RMSE para evaluar la calidad de la imagen están comprendidos entre 0 y 1; cuando el valor del RMSE es próximo o igual a 0, esta métrica indica una imagen de excelente calidad para la recuperación de la imagen desencriptada en la salida del sistema de desencriptación, mientras que los valores del RMSE próximos o iguales a 1 representan una imagen de peor calidad. El RMSE entre la imagen original de la Figura 1(a) y la imagen desencriptada de la Figura 1(f) es de  $7 \times 10^{-14}$ .

Las imágenes desencriptadas ruidosas que se muestran en las Figuras 1(g) y 1(h), corresponden a las imágenes recuperadas en el sistema de desencriptación cuando la clave de la imagen pseudoaleatoria  $\theta_{p2}(v)$  o el valor del orden fraccionario  $p1$  son erróneos, respectivamente. Los RMSE entre la imagen original de la Figura 1(a) y las imágenes desencriptadas de las Figuras 1(g) y 1(h) son 0,88 y 0,87, respectivamente. Si los valores del orden fraccionario  $p2$  de la FrHT, las RPMs  $r(x)$  y  $t(u)$  o la imagen pseudoaleatoria  $\phi_{p1}(u)$  utilizados en el sistema de desencriptación no son iguales a los valores utilizados en el sistema de encriptación, la imagen desencriptada es un patrón ruidoso muy similar al de la

Figura 1(g). Por lo tanto, el resultado proporcionado demuestra que todas las claves (los dos órdenes fraccionarios  $p_1$  y  $p_2$  de las FrHTs, las dos imágenes pseudoaleatorias  $\phi_{p_1}(u)$  y  $\theta_{p_2}(v)$  y las dos RPMs  $r(x)$  y  $t(u)$ ) son necesarias en el sistema de descryptación para recuperar correctamente la imagen original.

De varios experimentos computacionales se obtiene que los órdenes fraccionarios de las FrHTs son sensibles a una variación de  $1 \times 10^{-4}$ . Utilizando la sensibilidad obtenida de los órdenes fraccionarios  $p_1$  y  $p_2$ , el espacio clave para los órdenes fraccionarios de las FrHTs es de  $4 \times 10^8$ . Las dos RPMs  $r(x)$  y  $t(u)$ , y las dos imágenes pseudoaleatorias  $\phi_{p_1}(u)$  y  $\theta_{p_2}(v)$  tienen un tamaño o resolución de  $512 \times 512$  píxeles y cada píxel tiene 256 valores posibles. El número de intentos necesarios para recuperar tanto las RPMs como las imágenes pseudoaleatorias es del orden de  $256^{(4)(512)(512)}$ . El espacio de claves total del proceso de cifrado propuesto es de  $(4 \times 10^8)(256^{1048576})$ , este valor para el espacio de claves es muy grande y mayor que los resultados obtenidos en las referencias (Millán & Pérez-Cabré, 2011; Vilardy *et al.*, 2012; Situ & Zhang, 2004; Unnikrishnan *et al.*, 2000; Chen & Zhao, 2006; Rodrigo *et al.*, 2007; Zhao *et al.*, 2008).

A partir de la simulación numérica desarrollada para esta investigación, el tiempo de cálculo para la FrHT digital implementando la ecuación (4) se reduce a la mitad en comparación con el tiempo de cálculo de la ecuación (3). Por lo tanto, el cálculo propuesto para la FrHT es más rápido y eficiente en comparación con el cálculo presentado en las referencias (Vilardy *et al.*, 2013a; Zhao *et al.*, 2008).

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un sistema de encriptación de imágenes basado en la codificación de fase, la FrHT, las RPMs y las operaciones de truncamiento en amplitud y fase. Se ha introducido una simplificación en el cálculo de la FrHT, que permite calcularla de forma más rápida y eficiente. La imagen encriptada es una distribución aleatoria de valor real que está muy bien protegida frente a ataques de seguridad debido a que el espacio de claves del sistema de encriptación-descryptación propuesto es muy grande. La seguridad de la imagen encriptada se debe a las operaciones no lineales aplicadas en el sistema de encriptación-descryptación, estas operaciones no lineales son la codificación de fase y las operaciones de truncamiento en amplitud y fase. Los resultados de las simulaciones numéricas han demostrado que la recuperación de la imagen original en el sistema de descryptación es muy sensible a los cambios en las seis claves del sistema de seguridad propuesto en esta investigación. Las dos claves de las imágenes pseudoaleatorias cambian cuando se modifican: la imagen a encriptar, las dos RPMs o los dos órdenes fraccionarios de las FrHTs. Por último, para recuperar la imagen original con una alta calidad y libre de ruido en la salida del sistema de descryptación, los valores de las seis claves utilizadas en los sistemas de encriptación y descryptación tienen que ser los mismos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Popular del Cesar y a la Universidad de La Guajira por su apoyo en esta investigación.

## REFERENCIAS

Chen, L., & Zhao, D. (2006). **Optical image encryption with Hartley transforms.** *Optics letters*, 31(23), 3438-3440.

Millán, M. S., & Pérez-Cabré, E. (2011). **Optical and Digital Image Processing: Fundamentals and Applications**, Eds G Cristóbal, P Schelkens and H Thienpont, (Weinheim: Wiley) chapter 33 pp 739–67

Morales, Y., Díaz, L., & Torres, C. (2015). **Radial Hilbert transform in terms of the Fourier transform applied to image encryption.** *Journal of physics: Conference series*, Vol. 582, No. 1, p. 012063.

Ozaktas H. M., Zalevsky, Z., & Kutay, M. A. (2001). **The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing.** J. Wiley & Sons.

Pei, S. C., & Ding, J. J. (2002). **Fractional cosine, sine, and Hartley transforms.** *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(7), 1661-1680.

Qin, W., & Peng, X. (2010). **Asymmetric cryptosystem based on phase-truncated Fourier transforms.** *Optics Letters*, 35(2), 118-120.

Refregier, P., & Javidi, B. (1995). **Optical image encryption based on input plane and Fourier plane random encoding.** *Optics letters*, 20(7), 767-769.

Rodrigo, J. A., Alieva, T., & Calvo, M. L. (2007). **Applications of gyrator transform for image processing.** *Optics Communications*, 278(2), 279-284.

Situ, G., & Zhang, J. (2004). **Double random-phase encoding in the Fresnel domain.** *Optics Letters*, 29(14), 1584-1586.

Towghi, N., Javidi, B., & Luo, Z. (1999). **Fully phase encrypted image processor.** *JOSAA*, 16(8), 1915-1927.

Unnikrishnan, G., Joseph, J., & Singh, K. (2000). **Optical encryption by double-random phase encoding in the fractional Fourier domain.** *Optics letters*, 25(12), 887-889.

Vilardy Ortiz, J. M., Torres Moreno, C. O., Mattos Vasquez, L., & Useche, J. (2011). **Cifrado De Imágenes Utilizando La Transformada Wavelet Fraccional.** *Revista Colombiana de Física*, 43(1), 170.

Vilardy, J. M., Millán, M. S., & Pérez-Cabré, E. (2012). **Improved decryption quality and security of a joint transform correlator-based encryption system.** *Journal of Optics*, 15(2), 025401.

Vilardy, J. M., Torres, C. O., & Jimenez, C. J. (2013). **Double image encryption method using the Arnold transform in the fractional Hartley domain.** *Proc. of SPIE*, 8785, 87851R.

Vilardy, J. M., Torres, C. O., & Mattos, L. (2013). **Image encryption-decryption system based on gyration transform and jigsaw transform.** *Proc. of SPIE*, 8785 -7851Q.

Vilardy, J. M., Millán, M. S., & Pérez-Cabré, E. (2014). **Nonlinear optical security system based on a joint transform correlator in the Fresnel domain.** *Applied Optics*, 53(8), 1674-1682.

Vilardy, J. M., Torres, Y., Millán, M. S., & Pérez-Cabré, E. (2014). **Generalized formulation of an encryption system based on a joint transform correlator and fractional Fourier transform.** *Journal of Optics*, 16(12), 125405.

Vilardy, J. M., Millán, M. S., & Pérez-Cabré, E. (2017). **Nonlinear image encryption using a fully phase nonzero-order joint transform correlator in the Gyration domain.** *Optics and Lasers in Engineering*, 89, 88-94.

Zhao, D., Li, X., & Chen, L. (2008). **Optical image encryption with redefined fractional Hartley transform.** *Optics Communications*, 281(21), 5326-5329.