

# MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE VENDA SOBRE CONTRATOS FUTURO DE MILHO NO MERCADO BRASILEIRO

*Data de submissão: 12/04/2024*

*Data de aceite: 03/06/2024*

**Liane Rucinski**

Ministério do Planejamento e Orçamento  
Brasília - DF  
<http://lattes.cnpq.br/1386322531054517>

**Rafael Pazeto Alvarenga**

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Paranaíba - MS  
<http://lattes.cnpq.br/5467311850426022>

**RESUMO:** A fim de auxiliar os produtores rurais na gestão do risco de mercado, a Política de Garantia de Preços Mínimos [PGPM] do Governo Federal permite subvencionar os prêmios de contratos de opção de venda em operações de “hedge” de produtos agropecuários. O objetivo deste estudo consistiu em analisar a efetividade de modelos de apreçamento na avaliação de opção de venda fora do dinheiro sobre contrato futuro de milho no mercado brasileiro. Foram testados os modelos de Black, Binomial e Mínimos Quadrados de Monte Carlo [LSM], combinados aos previsores de volatilidade histórica, implícita e determinística. Os prêmios obtidos pelos diferentes modelos foram comparados àqueles efetivamente praticados no

mercado. O modelo de Black, seguido do Binomial, ambos combinados à volatilidade implícita, apresentaram os menores desvios em relação aos prêmios reais de mercado, segundo o critério do erro médio absoluto percentual [MAPE], bem como as menores dispersões, medidas pela raiz quadrada do erro médio quadrático [RMSE]. O método LSM subprecificou as opções muito fora do dinheiro, quando combinado a qualquer dos estimadores de volatilidade analisados. Quando combinados à volatilidade histórica, os modelos em análise mostraram-se menos acurados e menos precisos. O estimador de volatilidade determinística do modelo Autorregressivo de Heterocedasticidade Condicional Generalizado [Garch] apresentou desempenho intermediário. Os resultados corroboraram o amplo uso do modelo de Black, sendo este o que demonstrou o melhor desempenho nos critérios de precisão e acurácia, dentre os modelos de precificação de opções analisados, especialmente quando associado à volatilidade implícita.

**PALAVRAS-CHAVE:** opções, modelo Binomial, Black, mínimos quadrados de Monte Carlo, volatilidade.

## PRICING MODELS FOR PUT OPTIONS ON CORN FUTURES IN BRAZILIAN MARKET

**ABSTRACT:** Aiming to help producers to manage market risks, in scope of the minimum price assurance policy [PGPM], Brazilian government can subsidize put options premia in financial hedging of agribusiness commodities. The object of this study was assessing the effectiveness of pricing models for out of the money put options on corn futures in Brazilian exchange market. Binomial, Black and Least Square Monte Carlo [LSM] methods, combined with historical, implied and deterministic volatility estimators were tested and analysed. Then, theoretical outputed prices were compared with real market data. Black and Binomial models combined with implied volatility resulted the smallest values of the mean absolute percentage error [MAPE] and of the smallest square root of mean square error [RMSE]. LSM method combined with any of the analysed volatility predictors underprecified deep out of the money options. Historical volatility combined with any of the analysed pricing models resulted less accurated and more discrepant premia related to market data. The deterministic volatility estimator of the Generalized Autorregressive Conditional [Garch] model presented intermediate performance. Results point out that Black model presented better features of precision and accuracy among the assessed models, specially when combined with implied volatility. This finding corroborates with the wide spread of this method.

**KEYWORDS:** options, Binomial-model, Black-model, least square Monte Carlo, volatility.

### INTRODUÇÃO

O risco de mercado, decorrente da volatilidade dos preços agrícolas, constitui fonte de incertezas quanto à receita dos produtores rurais.

A gestão do risco de mercado pode ser realizada em operações de “hedge”, quando os agentes assumem, no mercado financeiro, posição oposta àquela no mercado físico, protegendo-se contra movimentos adversos dos preços do ativo. As operações de “hedge” com derivativos agropecuários são montadas na entressafra, quando as expectativas se formam, e o encerramento da posição ocorre na época da colheita.

Nas operações amparadas pela Política de Garantia de Preços Mínimos, de que trata o Decreto-Lei nº 79, de 1966, a Lei nº 8.427, de 1991, prevê a concessão de bonificação equivalente a um percentual do prêmio pago na aquisição de contratos de opção de venda em bolsas de mercadorias e futuros nacionais ou internacionais.

O contrato de opção é o instrumento pelo qual o titular transfere ao lançador o risco de preço, mediante o pagamento de um prêmio, a fim de assegurar o direito, mas não a obrigação, de comprar (“call”) ou vender (“put”) o ativo ao preço estabelecido, em data futura.

A definição do preço mínimo considera fatores que influem nos mercados interno e externo e os custos de produção. Segundo a Teoria da Firma, a receita equivalente ao custo variável médio assegura a continuidade da produção no curto prazo. O ponto de equilíbrio é atingido quando a receita de vendas cobre o custo operacional de produção, que também inclui os custos fixos.

O milho, uma “commodity” comercializada em bolsas de mercadorias e futuros, também é uma cultura típica da agricultura familiar, utilizado na alimentação animal e na produção de etanol. De acordo com o Relatório de Oferta e Demanda do Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (Wasde/USDA), de mar. 2024, o Brasil é o terceiro produtor mundial de milho, com uma safra de 116 milhões de toneladas, em 2023/24, equivalente a 9,5% do total mundial, atrás apenas dos Estados Unidos e da China.

BAIDYA e CASTRO (2001) analisaram a convergência do modelo Binomial. ARAÚJO e BAIDYA (2004) avaliaram a sensibilidade do método de Mínimos Quadrados de Monte ao número de simulações, à discretização e à função de regressão. GABE e PORTUGAL (2004) compararam os previsores de volatilidade implícita e determinística. POON e GRANGER (2005) compilaram 93 estudos comparativos de volatilidade. SALIBY et al. (2007) avaliaram a amostragem descritiva na redução da variância em Simulação de Monte Carlo no apreamento de opções. SAITO e ROCHMAN (2008) compararam métodos numéricos de precificação de opções. COELHO et al. (2009) avaliaram o desempenho do Modelo de Black em opções sobre futuros de café arábica. TONIN e COELHO (2012) testaram métodos numéricos na precificação de opções sobre futuros de café arábica. SOUZA et al. (2014) analisaram a estrutura a termo da volatilidade de opções sobre futuros de soja do CME Group. CHATEAU (2014) e MAIA et al. (2014) avaliaram opções sob assimetria e excesso de curtose. SILVA e MAIA (2014) avaliaram previsores de volatilidade em contratos futuros de soja. MAIA et al. (2014) estudaram o alisamento da volatilidade pelo modelo de Corrado e Su. PONTES e MAIA (2017) testaram o modelo de Black na precificação de opções sobre futuros de boi gordo.

Visando à formulação de políticas de garantia de renda aos produtores, são necessários estudos sobre o desempenho de modelos de precificação de opções sobre as “commodities” agropecuárias negociadas no mercado brasileiro.

O presente estudo analisou a aderência de modelos de precificação de opções sobre futuros de produtos agropecuários no mercado brasileiro, comparativamente aos prêmios reais observados no mercado. Foram avaliados o modelo analítico de Black e os métodos numéricos da Árvore Binomial e dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo, combinados a previsores de volatilidade histórica, implícita e determinística. A análise foi conduzida sobre uma opção de venda sobre futuros de milho, tipo americana, fora do dinheiro, listada na B<sup>3</sup>.

O estudo pretende responder às questões: i) Dentre os modelos analisados, qual forneceu o melhor estimador dos prêmios de mercado? ii) Há diferença significativa entre os prêmios teóricos estimados pelos modelos em análise e os prêmios de mercado no período de contratação? iii) Qual modelo de precificação apresentou os melhores indicadores de precisão e acurácia? iv) Qual estimador da volatilidade apresentou os melhores indicadores de precisão e acurácia?

## MATERIAL E MÉTODOS

Foram testados o modelo analítico de Black e os modelos numéricos da Árvore Binomial e dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo, associados aos estimadores de volatilidade histórica dos log-retornos do ativo, de volatilidade implícita instantânea dos prêmios de mercado e de volatilidade determinística do modelo Autorregressivo de Heterocedasticidade Condicional [Garch].

A região produtora considerada foi a de Londrina, no Norte do Paraná, onde o plantio do milho ocorre de setembro a dezembro, e a colheita acontece de janeiro a maio. Destarte, foi escolhido o contrato de opção de venda sobre futuros de milho com vencimento em março de 2022, na época da colheita.

Considerando a operação de “hedge” com duração entre 60 e 90 dias, a janela de contratação foi definida no período de 16 dez. 2021 a 15 jan. 2022, na fase inicial do desenvolvimento da cultura.

As cotações dos contratos futuros, o indicador Esalq do milho na região de Campinas, de referência para a B<sup>3</sup>, e os preços pagos ao produtor no Norte do Paraná foram coletados da base de dados do Cepea para os *últimos* 12 meses de duração do contrato, entre a segunda quinzena de março de 2021 e a primeira quinzena de março de 2022.

As *séries* futuras foram consolidadas em uma *única* série contínua, considerando a cotação do contrato em aberto com vencimento mais próximo, segundo o procedimento adotado por SOUZA (2013).

Foram coletadas da plataforma Bloomberg, as cotações de fechamento dos prêmios nos 61 pregões ao longo da duração do contrato, de 16 dez. 2021 a 15 mar. 2022, para a opção de venda com preço de exercício de R\$ 95,00 sobre o contrato futuro de milho com vencimento em março de 2022 (CRDN2).

A série dos log-retornos do contrato futuro subjacente é obtida pela eq. (1):

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (1)$$

onde,  $r_t$  é o log-retorno do ativo subjacente ao contrato de opção na data atual,  $\ln$  designa o logaritmo neperiano, e  $P_t$  e  $P_{t-1}$  representam as cotações de fechamento do futuro subjacente na data atual e no dia útil anterior, respectivamente.

A Figura 1 apresenta a série de log-retornos do contrato futuro de milho nos doze meses anteriores ao vencimento, no período de 16 mar. 2021 a 15 mar. 2022.

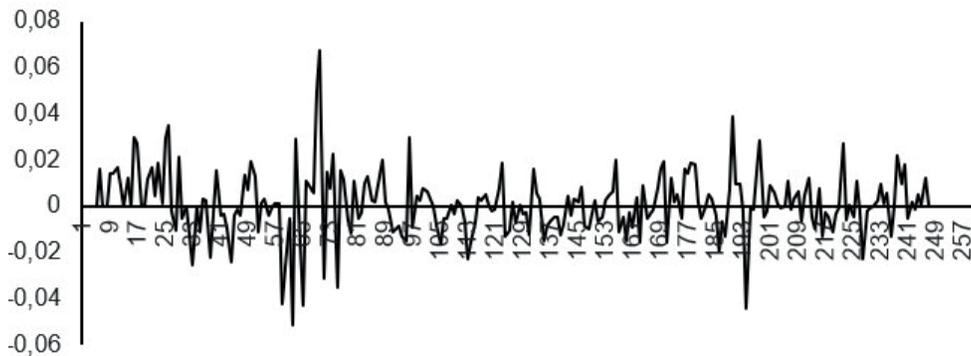


Figura 1. Log-retornos do contrato futuro de milho da B<sup>3</sup> vencimento mar. 2022

Fonte: Dados originais da pesquisa

O diferencial de base (*basis*), consiste no deságio do preço na região produtora em relação ao indicador à vista na região de referência para a Bolsa, ou à cotação do contrato futuro com vencimento mais próximo, considerado uma “proxy” do indicador na região de referência. Tal diferença varia ao longo do ano entre os períodos de safra e entressafra, o que se denomina risco de base. O diferencial de base é calculado pela eq. (2):

$$B = S - F \quad (2)$$

onde, *B* é o diferencial de base entre a região produtora e a região de referência, *S* é o preço à vista na região produtora, e *F* é a cotação do contrato futuro com vencimento mais próximo ou o indicador do produto na região de referência.

A receita a ser assegurada ao produtor, correspondente ao preço de exercício (“strike”) da opção de venda (“put”), deverá cobrir o custo de produção, acrescido do máximo prêmio *basis*, obtido pela eq. (3):

$$K = COP + |B| \quad (3)$$

onde, *K* é o preço de exercício da opção de venda, *COP* é o custo operacional de produção, e *B* é o diferencial de base entre a região produtora e a praça de referência para a bolsa, em que se dará a entrega da mercadoria.

O *basis* foi estimado pela máxima diferença entre as cotações do produto no Norte do Paraná e o indicador Esalq do milho, levantado na região de Campinas, de referência para a B<sup>3</sup>, nos doze meses anteriores ao vencimento em 15 mar. 2022. Assim, o diferencial de base considerado foi de R\$ 16,93 por saca.

O custo operacional de produção do milho de plantio direto de alta tecnologia, conforme levantamento Conab de março de 2022 na praça de Londrina - PR, foi de R\$77,72

por saca de 60 kg. Adicionando o prêmio *basis* de R\$16,93, resulta R\$94,65, o preço a ser garantido ao produtor na operação. Portanto, elegeu-se o preço de exercício (K) da opção de venda de R\$ 95,00 por saca.

Trata-se de opção fora do dinheiro, sendo o preço de exercício inferior à cotação do futuro subjacente no período de contratação, de 16 dez. 2021 a 15 jan. 2022.

A taxa de desconto livre de risco adotada nos cálculos foi a de referência para o Sistema Especial de Liquidação e Custódia de Títulos do Banco Central - Selic, que variou de 9,25% a 10,75% ao longo do período de contratação.

## MODELOS DE PRECIFICAÇÃO

O modelo de Black (BLACK, 1976) é derivado do conhecido modelo de Black-Scholes (BLACK e SCHOLLES, 1973) de avaliação de opções europeias. Porém, em lugar de um ativo à vista, aparece como subjacente um contrato futuro.

O modelo de Black assume as mesmas simplificações do modelo original de Black-Scholes. Considera que os preços do subjacente se comportam segundo um movimento browniano geométrico com distribuição log-normal, que os log-retornos seguem uma distribuição normal, assume a taxa de juros livre de risco e a volatilidade constantes, o exercício somente na maturidade, ausência de arbitragem, dividendos e custos de transação.

Porém, os fatos estilizados do modelo de Black não se configuram na prática. Conforme constatado por JANKOVÁ (2018), as séries de preços não são exatamente log-normais e os log-retornos desviam-se da curva de Gauss, apresentando assimetria, caudas pesadas e grande número de “outliers”.

Ao não reconhecer as variações da volatilidade ao longo do tempo, ou o efeito “sorriso”, que se refere ao aumento da volatilidade conforme o preço de exercício se afasta do preço do ativo subjacente, o modelo de Black tende a subprecificar opções profundamente dentro ou fora do dinheiro ou de longo prazo de maturidade. Também tende a subprecificar opções americanas por não precificar a possibilidade de exercício antecipado (HULL e WHITE, 1987), além de desprezar os custos de transação e a arbitragem.

Enquanto no modelo original de Black-Scholes, somente o preço de exercício é descontado a valor presente à taxa de juros livre de risco, no modelo de Black, tanto o preço de exercício como a cotação do contrato futuro subjacente são descontados a valor presente.

O prêmio da opção de compra é estimado pelo modelo de Black pela eq. (4):

$$c = e^{-rT}(FN(d_1) - KN(d_2)) \quad (4)$$

onde,  $F$  é a cotação do contrato futuro subjacente,  $K$  é o preço de exercício,  $T$  é prazo até a maturidade,  $r$  é a taxa de juros anual livre de risco em capitalização contínua,  $N$  indica a função de distribuição normal cumulativa. Os parâmetros  $d_1$  e  $d_2$  dependem também da volatilidade  $\sigma$ , única variável não diretamente observável. Sendo  $d_1$  e  $d_2$  dados pelas eqs. (5) e (6):

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5)$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) - (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (6)$$

onde,  $N(d_1)$  representa o “delta” da opção de compra, ou seja, a mudança no prêmio em função da mudança no preço do ativo subjacente, e  $N(d_2)$  é a probabilidade de exercício da opção de compra, ou a probabilidade de que o preço do subjacente ultrapasse o preço de exercício.

O prêmio da opção de venda é obtido pela paridade “put-call”, pela eq. (7):

$$p + Fe^{rT} = c + Ke^{rT} \quad (7)$$

onde,  $F$  é a cotação do futuro subjacente,  $K$  é o preço de exercício,  $T$  é prazo até a maturidade,  $r$  é a taxa de juros anual livre de risco em capitalização contínua.

Das eqs. (4) e (7), o prêmio da opção de venda no mesmo preço de exercício é dado pela eq. (8):

$$p = e^{-rT}(KN(-d_2) - FN(-d_1)) \quad (8)$$

onde,  $F$  é a cotação do contrato futuro subjacente,  $K$  é o preço de exercício,  $T$  é prazo até a maturidade,  $r$  é a taxa de juros anual livre de risco,  $N$  indica a função de distribuição normal cumulativa, e os parâmetros  $d_1$  e  $d_2$  são dados pelas eqs. (5) e (6), respectivamente:

Os métodos numéricos, como o Binomial e o de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, permitem precificar opções americanas, com possibilidade de exercício antecipado. Entretanto, apresentam um “tradeoff” entre o custo computacional e a convergência, que depende da complexidade da função-base, da discretização do tempo e do volume de simulações (ARAÚJO e BAIDYA, 2004).

O Modelo Binomial (1979) ou CRR, de COX, ROSS e RUBINSTEIN, consiste em uma aproximação em tempo discreto do movimento dos preços do ativo subjacente, que representa um processo estocástico em tempo contínuo.

O modelo assume que o preço do ativo subjacente se move em intervalos de tempo discretos e uniformes, para cima ou para baixo, segundo uma distribuição binomial. Sendo  $p$  a probabilidade neutra ao risco de o preço se mover para cima de um fator específico  $u$ , e  $1-p$  é a probabilidade de o preço se mover para baixo de um fator  $d$ .

No modelo CRR, a probabilidade  $p$  é definida de forma que a distribuição binomial simule o movimento browniano geométrico do preço do subjacente, pela eq. (9):

$$p = \frac{e^{-rt} - d}{u - d} \tag{9}$$

onde  $u$  e  $d$  são os fatores de movimentação do preço para cima e para baixo, respectivamente,  $r$  é taxa de juros livre de risco em capitalização contínua e  $t$  é o intervalo de tempo discreto, medido em anos de 252 dias úteis. O fator de movimentação para cima  $u$  é dado pela eq. (10):

$$u = e^{\sigma\sqrt{t}} \tag{10}$$

onde,  $\sigma$  é a volatilidade e  $t$  é o intervalo de discretização.

O fator de movimentação para baixo  $d$  é o inverso de  $u$ , dado pela eq. (11):

$$d = \frac{1}{u} \tag{11}$$

onde  $u$  é o fator de movimentação para cima.

A Figura 2 representa uma árvore binomial de três intervalos de tempo e os preços do ativo subjacente em cada nó:

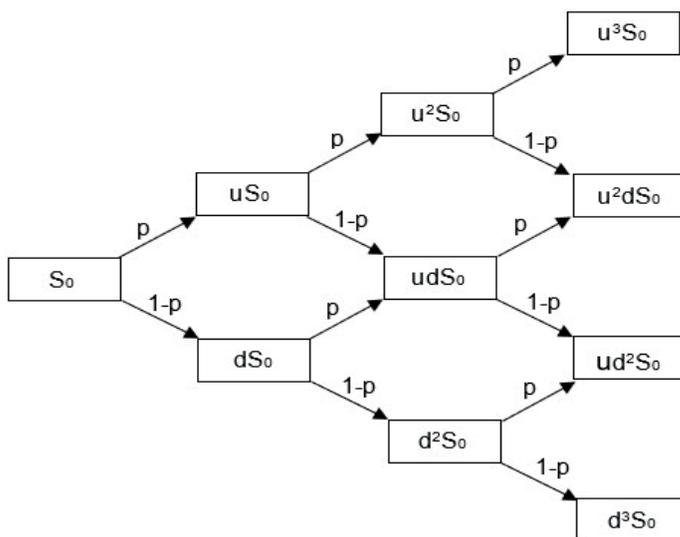


Figura 2. Árvore Binomial

Fonte: Dados originais da pesquisa

A árvore binomial é formada por “nós” representando os preços do subjacente a cada intervalo de tempo discreto, entre a data de avaliação e o vencimento da opção, em cada uma das trajetórias possíveis do preço do ativo.

A propriedade recombinante da árvore binomial, quando um movimento para cima seguido de um movimento para baixo equivale a um movimento para baixo e depois para cima, nas mesmas intensidades, permite que o preço seja estimado em cada nó, em cada trajetória de preço, partindo da data de avaliação até o vencimento (“forward”), pelas eqs. (12) ou (13), respectivamente, a depender de o subjacente ser um ativo à vista ou contrato futuro:

$$S_n = S_0 u^{nu} d^{nd} \quad (12)$$

$$F_n = e^{-rt_n} F_0 u^{nu} d^{nd} \quad (13)$$

onde,  $S_0$  ou  $F_0$  é a cotação do ativo à vista ou contrato futuro subjacente, respectivamente, na data de avaliação,  $S_n$  ou  $F_n$  é a cotação do ativo à vista ou contrato futuro subjacente no nó considerado,  $u$  e  $d$  são os fatores de movimentação do preço para cima ou para baixo, respectivamente,  $nu$  e  $nd$  referem-se ao número de movimentações do preço para cima e para baixo, respectivamente, até o nó considerado,  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $t$  é o intervalo de discretização e  $n$  designa o intervalo de discretização.

O valor esperado da opção, em cada nó, é calculado movendo-se recursivamente (“backward”), a partir dos nós finais, no vencimento, até convergir no primeiro nó na data de avaliação.

O valor esperado da opção em cada nó final, no vencimento, será o valor intrínseco, dado pelas eqs. (14) ou (15), para opção de compra (“call”) ou de venda (“put”), respectivamente, ou zero, se a opção terminar fora do dinheiro:

$$cn = \text{Max}(Fn - K, 0) \quad (14)$$

$$pn = \text{Max}(K - Fn, 0) \quad (15)$$

onde,  $K$  é o preço de exercício e  $F_n$ , é a cotação do subjacente no respectivo nó.

Nos nós anteriores ao vencimento, o valor esperado da opção americana é o maior entre o valor de exercício imediato e o valor binomial (ou de continuação), ou zero, se a opção estiver fora do dinheiro, dado pelas eqs. (16) ou (17):

$$Cn = \text{Máximo}(cn, Bn, 0) \quad (16)$$

$$P_n = \text{Máximo}(p_n, B_n, 0) \quad (17)$$

onde,  $C_n$  e  $P_n$  designam o valor da opção de compra ou de venda, respectivamente, no nó considerado,  $c_n$  e  $p_n$  são os valores de exercício imediato da opção de compra ou de venda, no nó e  $B_n$  é o valor binomial no nó.

Em cada nó, calcula-se, recursivamente, o valor binomial, que resulta da média dos valores dos dois nós subsequentes ponderados pelas respectivas probabilidades  $p$  e  $1-p$ , segundo as eqs. (18) ou (19):

$$B_n = e^{-rt_n} (pC_{n+1_{up}} + (1-p)C_{n+1_{down}}) \quad (18)$$

$$B_n = e^{-rt_n} (pP_{n+1_{up}} + (1-p)P_{n+1_{down}}) \quad (19)$$

onde,  $B_n$  é o valor binomial da opção no nó,  $r$  é a taxa de juros livre de risco em capitalização contínua,  $t$  é o intervalo de discretização, (um dia, convertido em anos de 252 dias úteis),  $p$  e  $1-p$  são as probabilidades de o preço do ativo subjacente subir ou descer, respectivamente,  $C_{n+1_{up}}$  e  $C_{n+1_{down}}$  são os valores esperados da opção de compra nos nós subsequentes se o preço subir ou descer, e  $P_{n+1_{up}}$  e  $P_{n+1_{down}}$  são os valores esperados da opção de venda nos nós subsequentes se o preço subir ou descer,  $n$  designa o intervalo de discretização.

Para as opções europeias, como não é permitido o exercício antecipado, o valor esperado nos nós anteriores ao vencimento será sempre o valor binomial.

O Método de Mínimos Quadrados de Monte Carlo, "Least Square Monte Carlo" [LSM], na sigla em inglês, proposto por LONGSTAFF e SCHWARTZ (2001), é uma aproximação em tempo discreto do movimento browniano em tempo contínuo dos preços do ativo subjacente. O método prediz, por regressões de mínimos quadrados, o valor de continuação de uma opção americana nos instantes anteriores ao vencimento, comparando-o ao valor de exercício, nesse instante.

O uso de maiores intervalos de discretização, funções polinomiais simplificadas e um menor volume de simulações, a fim de reduzir o custo computacional, prejudicam a convergência do método LSM (ARAÚJO e BAIDYA, 2004).

As trajetórias de preços do futuro subjacente, segundo um Movimento Browniano Geométrico, foram obtidas por Simulação de Monte Carlo, pela eq. (20):

$$F_{n+1} = F_n e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t})} \quad (20)$$

onde,  $F_{n+1}$  e  $F_n$  são as cotações do ativo subjacente na data  $n+1$ , e na data atual  $n$ , respectivamente,  $\mu$  é a média dos log-retornos no período,  $\sigma$  é a volatilidade,  $t$  é o intervalo de discretização (um dia, convertido em anos de 252 dias úteis), e  $\varepsilon$  é uma probabilidade pertencente à distribuição normal, representada por um número aleatório entre 0,001 e 0,999.

Foram simuladas dez mil trajetórias de preços do contrato futuro subjacente. Pela lei dos grandes números, o método de Monte Carlo exige um grande volume de simulações para uma melhor convergência. Porém, mediante análise de sensibilidade, ARAÚJO e BAIDYA (2004) concluíram que dez mil trajetórias de preço seriam suficientes para a convergência, e o ulterior aumento do número de simulações não resultou em expressiva melhoria da acurácia do modelo.

Visando melhorar a convergência, foi utilizada a técnica de redução de variância por variáveis antitéticas, por meio de pares de números aleatórios negativamente correlacionados, pertencentes à mesma distribuição de probabilidade. Seja  $\varepsilon$  um número aleatório entre 0 e 1, o número antitético será  $1-\varepsilon$ .

O exercício ótimo, no instante  $n$ , no caminho  $i$ , somente ocorre se a opção estiver no dinheiro e se o valor do exercício antecipado exceder o valor esperado de continuação, condicionado ao fato de a opção ainda não haver sido exercida. O método é aplicado recursivamente, do vencimento até a data de avaliação.

No vencimento, o valor da opção em cada caminho  $i$ , em que esta der exercício, será o valor intrínseco, ou zero, se a opção terminar fora do dinheiro, pelas eqs. (21) ou (22), para opção de compra ou de venda, respectivamente:

$$c_{ni} = \text{Max}(F_{ni} - K, 0) \quad (21)$$

$$p_{ni} = \text{Max}(K - F_{ni}, 0) \quad (22)$$

onde,  $c_{ni}$  ou  $p_{ni}$  é o prêmio da opção de compra ou de venda, no vencimento, no caminho  $i$ ,  $F_{ni}$  é a cotação do contrato futuro subjacente, no vencimento, no caminho  $i$ ,  $K$  é o preço de exercício,  $n$  identifica o intervalo de discretização, e  $i$  identifica o caminho de preço do ativo subjacente.

Nos instantes anteriores ao vencimento, o valor da opção, em um instante  $n$  de um caminho  $i$ , será o valor de exercício antecipado, se este for maior que o valor esperado de continuação, ou, caso contrário, o valor de continuação, ou zero, se a opção estiver fora do dinheiro no instante  $n$  e nos instantes posteriores no caminho  $i$ , dado pelas eqs. (23) ou (24), para opção de compra ou de venda, respectivamente:

$$c_{ni} = \text{Máximo}(0; \text{Se}((F_{ni} - K) > E[Y_{ni} | X_{ni}]; (F_{ni} - K); e^{-rt}c_{(n+1)i})) \quad (23)$$

$$p_{ni} = \text{Máximo}(0; \text{Se}((K - F_{ni}) > E[Y_{ni}|X_{ni}]; (K - F_{ni}); e^{-rt}p_{(n+1)i})) \quad (24)$$

onde,  $(F_{ni} - K)$  ou  $(K - F_{ni})$  representa o valor de exercício da opção de compra ou de venda, no instante  $n$  do caminho  $i$ ,  $F_{ni}$  é a cotação do futuro subjacente no instante  $n$  do caminho  $i$ ,  $K$  é o preço de exercício,  $r$  é a taxa de juros livre de risco em capitalização contínua,  $t$  é o intervalo de discretização (um dia, convertido em anos de 252 dias úteis),  $e^{-rt}c_{(n+1)i}$  ou  $e^{-rt}p_{(n+1)i}$  é o valor de continuação da opção de compra ou de venda, respectivamente,  $c_{(n+1)i}$  ou  $p_{(n+1)i}$  representa o valor da opção no instante  $n+1$ , no caminho  $i$ ,  $n$  indica o intervalo de discretização e  $E[Y_{ni}|X_{ni}]$  é o valor esperado de continuação no instante  $n$  do caminho  $i$ .

O vetor dos valores esperados de continuação  $E[Y_n|X_n]$  no instante  $n$ , é obtido por regressão polinomial de mínimos quadrados do vetor dos valores de continuação  $Y_n$  em função do vetor das cotações do ativo subjacente  $X_n$ . A regressão é realizada somente sobre os caminhos em que a opção estiver no dinheiro no instante  $n$ . Disso depende a convergência do método.

O vetor das cotações do futuro subjacente, no instante  $n$ , é dado pela eq. (25):

$$X_{ni} = [F_{ni}]_{i=1}^m \quad (25)$$

onde,  $X_n$  é o vetor das cotações do subjacente no instante  $n$ , e  $F_{ni}$  são os coeficientes das cotações do subjacente no instante  $n$  no caminho  $i$ , com  $i$  variando de um até  $m$ .

O vetor dos valores de continuação  $Y_n$  é formado pelos coeficientes dos fluxos de caixa futuros descontados ao instante  $n$ , pelas eqs. (26) ou (27), para opção de compra ou de venda, respectivamente:

$$Y_{ni} = [e^{-rt}c_{(n+1)i}, 0]_{i=1}^m \quad (26)$$

$$Y_{ni} = [e^{-rt}p_{(n+1)i}, 0]_{i=1}^m \quad (27)$$

onde,  $r$  é a taxa de juros livre de risco em capitalização contínua,  $t$  é o intervalo de discretização em anos,  $c_{(n+1)i}$  ou  $p_{(n+1)i}$  é o valor da opção de compra ou de venda no momento seguinte  $n+1$  no caminho  $i$ ,  $n$  designa o número do intervalo de discretização, e  $i$  é o caminho de preço do ativo, variando de 1 até  $m$ .

Na regressão, foi utilizado um polinômio de terceiro grau, definido em função do momento em que o coeficiente de determinação  $R^2$  parou de crescer. Em regra, quanto maior o grau polinomial da regressão, melhor a precisão, ou menor o desvio padrão dos prêmios teóricos (ARAÚJO e BAIDYA, 2004).

Os coeficientes dos valores esperados de continuação no instante  $n$  em cada caminho  $i$ , foram calculados pela equação de regressão de  $Y_n$  em função de  $X_n$ . Somente

são utilizados na regressão os caminhos  $i$  em que a opção estiver no dinheiro no instante  $n$ , seguindo recursivamente até a data de avaliação.

Em cada instante  $n$ , calcula-se o prêmio esperado da opção pela média do valor da opção em todos os caminhos  $i$ , variando de 1 até  $m$ , pelas eqs. (28) ou (29), para opção de compra ou de venda, respectivamente:

$$c_n = \text{Média}(c_{ni}) \quad i = 1 \dots m \quad (28)$$

$$p_n = \text{Média}(p_{ni}) \quad i = 1 \dots m \quad (29)$$

onde,  $c_n$  ou  $p_n$  é o valor da opção de compra ou de venda no instante  $n$ ,  $c_{ni}$  ou  $p_{ni}$  é o valor da opção no instante  $n$  no caminho  $i$ , obtidos pelas eqs. (23) e (24).

## PREVISORES DE VOLATILIDADE

A volatilidade das séries temporais financeiras varia segundo uma estrutura a termo, geralmente decrescendo com a redução das incertezas quando se aproxima a maturidade. A volatilidade apresenta um comportamento assimétrico, maior quando os preços estão caindo e menor quando estão subindo, além de formar “clusters” (conglomerados), alternando períodos de maior ou menor volatilidade a depender da estabilidade do mercado. No caso das opções, há ainda o efeito “smile” (sorriso), caracterizado pelo aumento da volatilidade dos prêmios conforme o preço de exercício se afasta da cotação do ativo subjacente.

Por sua simplicidade, o previsor de volatilidade futura mais utilizado é a volatilidade histórica, estimada pelo desvio padrão dos log-retornos entre a data de avaliação e o vencimento. Contudo, a volatilidade histórica não capta a estrutura a termo nem o efeito sorriso.

Dados antigos possuem menor relevância para prever o comportamento futuro das séries financeiras. Assim, em cada pregão, a volatilidade histórica foi estimada com base nos dias úteis restantes para o vencimento, multiplicando-se por raiz de 252 para obter a volatilidade anualizada, pela eq. (30):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2}{n-1}} \sqrt{252} \quad (30)$$

onde,  $\sigma$  é a volatilidade histórica anualizada,  $t$  é a data do pregão, variando de 1 até  $n$ ,  $n$  é o número de dias faltantes para o vencimento,  $r_t$  é o log-retorno do ativo na data do pregão, e  $\bar{r}$  é a média dos log-retornos no período considerado.

A volatilidade implícita instantânea do prêmio da opção incorpora toda a informação disponível e as expectativas atuais de mercado sobre o comportamento dos prêmios no momento seguinte, mas pouco poder explicativo ao longo do prazo de maturidade da opção. (GABE e PORTUGAL, 2004).

Devido à não linearidade da fórmula de Black, não é possível invertê-la a fim de obter-se, analiticamente, a volatilidade implícita do prêmio da opção, sendo requerido o emprego de métodos numéricos. (Turitto, 2013).

A volatilidade implícita do prêmio da opção foi estimada, por aproximação, pelo algoritmo iterativo de Newton-Raphson, com base na volatilidade instantânea do prêmio de mercado no momento anterior e na sensibilidade do prêmio da opção a mudanças na volatilidade, designada por “Vega”, pela eq. (31):

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \frac{P_m - P_{\sigma i}}{v_{\sigma i}} \quad (31)$$

onde,  $\sigma_i$  e  $\sigma_{i+1}$  são as volatilidades implícitas na última iteração e na iteração seguinte,  $P_m$  é o prêmio observado no mercado,  $P_{\sigma i}$  é o prêmio calculado pela equação de Black com base na volatilidade no instante anterior ( $\sigma_i$ ),  $v_{\sigma i}$  é a sensibilidade do prêmio da opção à alteração da volatilidade, denominada “Vega”, dada pela eq. (32):

$$v_{\sigma i} = F e^{-rt} \sqrt{t} N'(d_1) \quad (32)$$

onde,  $F$  é a cotação do futuro subjacente,  $r$  é a taxa de juros livre de risco em capitalização contínua em bases anuais,  $t$  é a unidade de tempo em anos, e  $N'(d_1)$  é a primeira derivada de  $d_1$ , calculada pela eq. (33):

$$N'(d_1) = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (33)$$

onde,  $d_1$  é obtido da Fórmula de Black, pela eq. (5).

A estimativa inicial da volatilidade implícita ( $\sigma_0^2$ ) foi obtida da estrutura a termo da volatilidade, em função do preço de exercício (K), na plataforma Bloomberg.

Foram realizadas três iterações, considerando a rápida convergência do algoritmo de Newton-Raphson.

O modelo Autorregressivo de Heterocedasticidade Condicional [Garch], proposto por ENGLE (1982) e generalizado por BOLLERSLEV (1986), descreve a volatilidade condicional, instantânea, dependente do tempo, deferente da volatilidade incondicional, estimada com base em toda a série de retornos.

O modelo Garch capta fatos estilizados das séries dos log-retornos, como os “clusters” de volatilidade, não gaussianidade, estacionariedade, independência linear e autocorrelação quadrática, conferindo maior peso às observações recentes. Extensões ao modelo descrevem as assimetrias de volatilidade (Egarch), ou a não estacionariedade da série de dados (Ilgarch).

O modelo Garch ( $p, q$ ) admite que a série de log-retornos seja estacionária, considera que sejam constantes a média, a variância e a autocorrelação, sem tendências ou sazonalidade, e assume que as covariâncias dependem somente da defasagem entre as observações.

O modelo Garch (1,1), com uma defasagem tanto para os log-retornos quadráticos ( $q$ ) como para o termo autorregressivo ( $p$ ), tem-se mostrado suficiente para explicar a volatilidade da maioria das séries financeiras.

A variância condicional do modelo Garch (1,1) é obtida pela eq. (34):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (34)$$

onde,  $\sigma_t^2$  é a variância condicional no instante atual,  $r_{t-1}^2$  é a primeira defasagem do log-retorno quadrático,  $\alpha$  é o coeficiente do termo de média móvel,  $\sigma_{t-1}^2$  é a primeira defasagem da variância condicional,  $\beta$  é o coeficiente do termo autorregressivo e  $\omega$  é o termo ponderado, dado pela eq. (35):

$$\omega = \Upsilon V_L \quad (35)$$

onde,  $V_L$  é a variância incondicional, de longo prazo, e  $\Upsilon$  é o coeficiente de ponderação da variância condicional.

Devido à estacionariedade dos log-retornos, a soma dos parâmetros de ponderação do modelo Garch (1,1) corresponde à unidade, segundo a eq. (36):

$$\alpha + \beta + \Upsilon = 1 \quad (36)$$

onde,  $\alpha$  é o coeficiente do termo de média móvel,  $\beta$  é o coeficiente do termo autorregressivo e  $\Upsilon$  é o coeficiente de ponderação do termo de variância incondicional no modelo Garch (1,1).

Das eqs. (35) e (36), obtém-se a variância incondicional pela eq. (37):

$$V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \quad (37)$$

onde,  $\alpha$  é o coeficiente do termo de média móvel,  $\beta$  é o coeficiente do termo autorregressivo e  $\omega$  é o termo de variância incondicional.

Os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\omega$  são ajustados por verossimilhança, de modo que os valores calculados e os extraídos da variância condicional  $\sigma_t^2$ , resultem o mais próximos possível. Conhecidos  $\alpha$  e  $\beta$ , o parâmetro  $\Upsilon$  é obtido pela eq. (36).

A função de verossimilhança, a ser maximizada, é dada pela eq. (38):

$$L_{\omega, \alpha, \beta} = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (38)$$

onde,  $\sigma_t$  é a volatilidade condicional,  $\sigma_t^2$  é a variância condicional e  $r_t^2$  é o log-retorno quadrático do ativo subjacente.

De acordo com GABE e PORTUGAL (2004), a volatilidade condicional  $\sigma_t$  é um previsor da volatilidade instantânea “um passo a frente”. Obtêm-se a volatilidade condicional anualizada  $\sigma_{ty}$ , pela eq. (39):

$$\sigma_{ty} = \sigma_t \sqrt{252} \quad (39)$$

onde  $\sigma_t$  é a volatilidade condicional. E a volatilidade incondicional, de longo prazo, anualizada, é obtida pela eq. (40):

$$\sigma_y = \sqrt{252V_L} \quad (40)$$

Onde  $V_L$ , é a variância incondicional, de longo prazo.

## MÉTRICAS DE DESEMPENHO

As métricas de desempenho permitem classificar os diferentes modelos segundo os critérios de acurácia e precisão.

A acurácia refere-se ao desvio de posição entre os valores estimados em relação aos observados, medida pelo Erro Médio Absoluto [MAE] e pelo Erro Médio Absoluto Percentual [MAPE], definidos pelas eqs. (41) e (42), respectivamente:

$$MAE(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (41)$$

$$MAPE(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| 100\% \quad (42)$$

onde,  $y_i$  é o valor observado,  $\hat{y}_i$  é o valor estimado, e  $n$  é o número de observações.

A precisão mede a dispersão entre os valores estimados e observados, medida pela Raiz Quadrada do Erro Médio Quadrático [RMSE], dada pela eq. (43):

$$RMSE(y, \hat{y}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (43)$$

onde,  $y_i$  é o valor observado,  $\hat{y}_i$  é o valor estimado, e  $n$  é o número de observações.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Tabela 1 apresenta os prêmios observados e os prêmios teóricos estimados pelos modelos em análise, ao longo do período de contratação:

Dia	Prêmio Real	Black			Binomial			LSM		
		$\sigma_H$	$\sigma_{VI}$	Garch	$\sigma_H$	$\sigma_{VI}$	Garch	$\sigma_H$	$\sigma_{VI}$	Garch
1	3,07	4,61	3,45	4,54	1,43	3,09	2,09	0,00	0,00	0,00
2	4,00	5,31	3,92	5,27	1,44	2,91	2,00	0,03	0,00	0,03
3	3,33	4,87	3,52	4,92	1,43	2,71	1,93	0,07	0,00	0,13
4	2,75	2,98	1,26	2,99	1,42	2,52	1,88	0,12	0,02	0,21
5	2,60	2,30	2,30	3,31	1,41	2,31	1,84	0,17	0,19	0,22
6	2,30	1,94	2,21	2,60	1,39	2,17	1,82	0,27	0,19	0,29
7	2,75	2,00	2,35	2,47	1,38	2,10	1,80	0,27	0,19	0,36
8	2,60	3,89	4,60	4,20	1,38	2,17	1,83	0,36	0,26	0,58
9	3,07	3,44	2,64	5,04	1,36	2,37	1,90	0,36	0,26	0,59
10	3,07	3,52	3,15	4,64	1,36	2,57	2,00	0,42	0,26	0,74
11	2,75	2,78	2,29	3,65	1,33	2,61	2,13	0,42	0,29	0,75
12	2,75	1,58	1,57	2,41	1,35	2,66	2,24	0,45	0,48	0,81
13	2,75	1,54	2,35	2,80	1,31	2,70	2,23	0,48	0,48	0,90
14	2,75	1,59	2,77	2,60	1,26	2,70	2,22	0,50	0,48	1,21
15	2,75	1,29	2,39	2,11	1,25	2,67	2,19	0,53	0,63	1,22
16	1,60	1,10	2,03	1,85	1,24	2,67	2,17	0,60	0,63	1,19
17	1,60	1,07	1,58	1,74	1,23	2,69	2,16	0,60	0,63	1,20
18	1,60	1,09	1,61	1,70	1,21	2,71	2,12	0,85	0,73	1,21
19	1,60	1,08	1,59	1,64	1,19	2,65	2,09	0,85	0,73	1,22
20	1,20	0,82	1,28	1,29	1,16	2,58	2,04	0,85	0,77	1,23
$\mu$	2,49	2,44	2,44	3,09	1,33	2,58	2,03	0,41	0,36	0,70
Mediana	2,68	1,97	2,32	2,70	1,35	2,65	2,07	0,42	0,28	0,75
$\sigma$	0,70	1,41	0,91	1,28	0,09	0,25	0,15	0,26	0,26	0,45
CV	0,28	0,58	0,37	0,41	0,07	0,10	0,07	0,64	0,73	0,65

Nota: Opção de venda sobre futuro de milho mar. 2022 e preço de exercício K = 95.

Tabela 1. Prêmios estimados pelos modelos de precificação e estimadores de volatilidade

Fonte: Resultados originais da pesquisa

A Tabela 2 mostra os resultados dos testes aplicados aos prêmios estimados:

Shapiro-Wilk e Jarque-Bera				Mann-Whitney e Kruskal-Wallis			
H <sub>0</sub> Normal H <sub>1</sub> Não Normal	Black	Binomial	LSM	H <sub>0</sub> Medianas = H <sub>1</sub> Medianas ≠	Black	Binomial	LSM
Histórica	H <sub>1</sub>	H <sub>0</sub>	H <sub>0</sub>	Histórica	H <sub>0</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>1</sub>
Implícita	H <sub>0</sub>	H <sub>1</sub>	H <sub>0</sub>	Implícita	H <sub>0</sub>	H <sub>0</sub>	H <sub>1</sub>
Garch	H <sub>0</sub>	H <sub>0</sub>	H <sub>1</sub>	Garch	H <sub>0</sub>	H <sub>0</sub>	H <sub>1</sub>

Tabela 2. Testes de hipóteses: prêmios estimados em relação aos prêmios observados

Fonte: Resultados originais da pesquisa

Os testes de Shapiro-Wilk e Jarque-Bera rejeitaram a normalidade das séries de log-retornos para um nível de significância “ $\alpha$ ” de 0,05. A não gaussianidade dos log-retornos não é captada pelo modelo de Black, mas somente pelos modelos de volatilidade determinística da família Garch.

O teste de Durbin-Watson, rejeitou a hipótese de independência da série de log-retornos, para um nível de significância “ $\alpha$ ” de 0,05. O teste de Ljung-Box indicou fraca dependência linear dos log-retornos, fraca autocorrelação significativa de primeira ordem e ausência de autocorrelação significativa de ordem superior. Essas condições são compatíveis com a aplicação do modelo Garch.

O teste de Bartlett rejeitou a hipótese de variância constante dos log-retornos, indicando a heterocedasticidade da série ao longo do tempo. A variância constante é uma simplificação assumida pelo modelo de Black e pela volatilidade histórica, que confere igual peso a todas as observações. A estrutura a termo da volatilidade é captada pelos estimadores de volatilidade implícita, ou instantânea, e determinística, que confere maior peso às observações recentes.

O teste de Dickey-Fuller Aumentado [ADF] rejeitou a presença de raiz unitária, concluindo ser a série estacionária. De acordo com PINHO et al. (2017), as séries dos log-retornos são geralmente estacionárias, apesar de as séries de preços serem normalmente não estacionárias. Caso o pressuposto de retornos estacionários fosse violado, seria requerido o uso da extensão integrada lgarch.

Os testes de Shapiro-Wilk e Jarque-Bera rejeitaram a hipótese de normalidade das dos prêmios observados nos doze meses anteriores ao vencimento. A hipótese de normalidade foi rejeitada para os modelos de Black combinado à volatilidade histórica, Binomial combinado à volatilidade implícita e LSM combinado à volatilidade determinística.

O teste de Bartlett rejeitou a homogeneidade das variâncias entre as séries dos prêmios reais observados e dos prêmios teóricos estimados pelos modelos de Black, Binomial e LSM, combinados às volatilidades histórica, implícita e determinística, em todos os casos.

Violados os pressupostos de normalidade e homogeneidade das variâncias, testes paramétricos como “t” de Student e “F” de Snedecor perdem significância, exigindo a aplicação de testes não paramétricos.

Os testes não paramétricos de Mann-Whitney e Kruskal Wallis rejeitaram a hipótese de igualdade das medianas entre a série de prêmios estimados pelo modelo LSM, combinado aos estimadores de volatilidade histórica, implícita e Garch, e a série dos prêmios observados no período de contratação, com significância “ $\alpha$ ” de 0,05. O mesmo ocorreu em relação ao modelo Binomial, combinado à volatilidade histórica. A igualdade das medianas não foi rejeitada para os prêmios teóricos do modelo de Black, combinado a quaisquer dos estimadores de volatilidade, e Binomial, associado às volatilidades Garch.

A Tabela 3 apresenta as métricas de desempenho dos modelos de precificação combinados aos modelos de volatilidade, comparados aos prêmios observados:

Modelo	Volatilidade	MAE	MAPE	RMSE
		R\$	%	R\$ <sup>2</sup>
Black	Histórica	0,751	31,124	0,871
Black	Implícita	0,396	15,773	0,631
Black	Garch	0,661	23,437	0,922
Binomial	Histórica	1,188	44,126	1,323
Binomial	Implícita	0,551	26,392	0,673
Binomial	Garch	0,738	28,407	0,859
LSM	Histórica	2,104	79,819	2,279
LSM	Implícita	2,147	81,604	2,333
LSM	Garch	1,793	64,747	2,079

Nota: Opção de venda sobre contrato futuro de milho com vencimento em mar. 2022 (CRDN2)

Tabela 3. Desempenho dos modelos de precificação e de volatilidade

Fonte: Resultados originais da pesquisa

A Tabela 4 classifica segundo os critérios de acurácia e precisão os modelos de precificação combinados aos estimadores de volatilidade.

Acurácia – MAE / MAPE				Precisão - RMSE			
Volatilidade	Black	Binomial	LSM	Volatilidade	Black	Binomial	LSM
Histórica	1	2	3	Histórica	1	2	3
Implícita	1	2	3	Implícita	1	2	3
Garch	1	2	3	Garch	2	1	3

Nota: 1 - Bom; 2 - Intermediário; 3 - Fraco

Tabela 4. Desempenho dos modelos de precificação

Fonte: Resultados originais da pesquisa

O modelo de Black, combinado aos estimadores de volatilidade histórica e implícita, apresentou o melhor desempenho nos critérios de acurácia e precisão. Com a volatilidade determinística, obteve o melhor desempenho no critério precisão e intermediário em acurácia.

TONIN e COELHO (2012) verificaram o bom desempenho do modelo de Black em comparação aos métodos numéricos na avaliação de opções com diferentes períodos de maturidade e graus de “moneyness”. COELHO et al (2009) concluíram pela aderência do modelo de Black na avaliação de opções fora do dinheiro.

O modelo Binomial, combinado aos estimadores de volatilidade histórica ou implícita mostrou desempenho intermediário nos critérios de acurácia e precisão. Com a volatilidade determinística, superou os modelos Black e LSM no critério de precisão, com desempenho intermediário quanto à acurácia.

COELHO et al (2009) e SAITO e ROCHMAN (2008) verificaram bons resultados quanto aos indicadores de acurácia e precisão para o modelo Binomial.

O método LSM subprecificou os prêmios, em qualquer caso, e apresentou fraco desempenho nos critérios de acurácia e precisão, com os estimadores de volatilidade histórica, implícita e Garch. No caso em análise, a baixa discretização temporal, o baixo número de simulações e a função polinomial simplificada impuseram condições severas ao emprego do método LSM.

Como o método LSM utiliza para as regressões de mínimos quadrados somente as trajetórias de preço em que a opção estiver no dinheiro, sua convergência ficou prejudicada no caso em análise, devido ao reduzido número de trajetórias restantes. Inversamente, SAITO e ROCHMAN (2008) confirmaram o bom desempenho do método, apesar do alto custo computacional.

As simplificações assumidas pelos modelos de precificação prejudicam a sua aderência. A hipótese de mercados plenamente eficientes não se configura na prática, há sempre assimetria de informações e arbitragem e as taxas de juros neutras ao risco teóricas normalmente diferem daquelas praticadas pelos agentes em função do risco do ativo objeto.

A Tabela 5 classifica os estimadores de volatilidade segundo os critérios de acurácia e precisão.

Acurácia – MAE / MAPE				Precisão - RMSE			
Prêmios	Histórica	Implícita	Garch	Prêmios	Histórica	Implícita	Garch
Black	3	1	2	Black	2	1	3
Binomial	3	1	2	Binomial	3	1	2
LSM	2	3	1	LSM	2	3	1

Nota: 1 - Bom; 2 - Intermediário; 3 - Fraco

Tabela 5. Desempenho dos estimadores de volatilidade

Fonte: Resultados originais da pesquisa

A volatilidade implícita, associada aos modelos de Black e Binomial, resultou nos melhores indicadores de acurácia e precisão, mas apresentou desempenho fraco quando aplicada ao método LSM.

POON e GRANGER (2005) concluíram que a volatilidade implícita constitui o melhor predictor da volatilidade futura. GABE e PORTUGAL (2004) e SOUZA et al (2014) verificaram a eficiência da volatilidade implícita na previsão de curto prazo. TONIN e COELHO (2012) constataram o bom desempenho da volatilidade implícita comparado à volatilidade histórica.

A volatilidade determinística do modelo Garch aplicada com o método LSM apresentou bom desempenho em acurácia e precisão, e desempenho intermediário quando associada ao modelo Binomial. Com o modelo de Black, demonstrou desempenho intermediário em acurácia e fraco em precisão.

GABE e PORTUGAL (2004) concluíram ser a volatilidade do modelo Garch o melhor predictor da volatilidade futura ao longo da maturidade da opção, por captar os “clusters” de volatilidade. POON e GRANGER (2005) verificaram que a volatilidade Garch se mostrou um predictor adequado da volatilidade futura ao longo do prazo da opção. Entretanto, PONTES e MAIA (2017) concluíram que a volatilidade determinística sobreprecificou os prêmios no modelo de Black.

A volatilidade histórica, associada ao modelo Binomial, apresentou desempenho fraco nos critérios de acurácia e precisão, mas desempenho intermediário quando aplicada ao método LSM. Com o modelo de Black, demonstrou fraco desempenho em acurácia e intermediário em precisão.

PONTES e MAIA (2017) verificaram que a volatilidade histórica subprecificou os prêmios teóricos do modelo de Black. TONIN e COELHO (2012) encontraram diferença significativa entre os prêmios calculados com o uso da volatilidade histórica e os prêmios observados, particularmente para opções muito dentro ou fora do dinheiro, por não captar o efeito sorriso e a estrutura a termo da volatilidade. POON e GRANGER (2005) concluíram que a volatilidade histórica pode ser um predictor satisfatório da volatilidade futura para opções no dinheiro ou próximas, quando houver grande disponibilidade de dados.

A falta de liquidez dos contratos listados na B<sup>3</sup> amplifica a oscilação dos prêmios, alongando a diferença entre a melhor oferta de compra e o menor preço de venda (“spread bid-ask”), afetando negativamente o desempenho dos modelos de volatilidade (NAVARRO et al, 2022).

## CONCLUSÕES

O modelo de Black, combinado à volatilidade implícita, apresentou o melhor desempenho pelos critérios de precisão e acurácia, o modelo Binomial obteve desempenho intermediário e o modelo LSM apresentou desempenho mais fraco.

A ampla difusão do modelo de Black impacta na decisão dos investidores e acaba exercendo influência sobre os prêmios reais de mercado.

Esperava-se uma melhor aderência do modelo Binomial, por este precificar a possibilidade de exercício antecipado das opções americanas.

O método LSM não se mostrou aderente na precificação de opções fora do dinheiro, subprecificando os prêmios, tendo em vista que as regressões são realizadas somente sobre as trajetórias em que a opção der exercício, prejudicando a convergência do método no caso em análise.

Como esperado, a volatilidade histórica subprecificou os prêmios da opção fora do dinheiro, ao não captar o efeito sorriso nem a estrutura a termo da volatilidade.

A volatilidade implícita apresentou os melhores indicadores de acurácia e precisão, a volatilidade determinística do modelo Garch obteve desempenho intermediário e a volatilidade histórica demonstrou desempenho mais fraco.

Esperava-se melhor desempenho do previsor de volatilidade determinística do modelo Garch, por poder captar os “clusters” de volatilidade.

A principal contribuição do estudo foi demonstrar que os prêmios teóricos do modelo de Black, em especial quando combinado à volatilidade implícita, apresentaram o melhor desempenho nos critérios de precisão e acurácia em comparação aos métodos numéricos, corroborando sua ampla utilização.

Estudos ulteriores poderão aprofundar o conhecimento sobre a precificação de opções no mercado brasileiro em situações diversas, tendo por objeto opções de compra e de venda, diferentes “commodities” agrícolas, modelos de apreçamento e previsores de volatilidade, envolvendo análises de sensibilidade de parâmetros como o grau de “moneyness” e o tempo até a maturidade.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, R.; BAIDYA, T. 2004. **Avaliação de opções reais através do método dos mínimos quadrados de Monte Carlo**. XXIV Encontro Nacional de Engenharia de Produção – Enegep, Florianópolis, SC, Brasil, 2004, Anais, p. 2248-2255.
- BAIDYA, T.; CASTRO, A. 2001. **Convergência dos modelos de árvores binomiais para avaliação de opções**. *Pesquisa Operacional*, Vol 21, nº 1, 17-30, jun. 2001
- BLACK, F. 1976. **The pricing of commodity contracts**. *Journal of Financial Economics* 3, 167-179.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. 1973. **The pricing of options and corporate liabilities**. *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- BOLLERSLEV, T. 1986. **Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity**. *Journal of Econometrics*, 31: 307–327.
- CHATEAU J. 2014. **Valuing european put options under skewness and increasing excess Kurtosis**. *Journal of Mathematical Finance*, 2014,4,160-177.
- COELHO, A.; PINHEIRO, S.; FERREIRA, F. 2009. **A fórmula de Black precifica corretamente as opções de compra sobre futuros agropecuários no brasil? Uma aplicação para o caso do café arábica**. *Pesquisa e Debate*, SP, vol. 20, nº 2(36) p. 299-315, 2009.
- COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. 1979. **Option pricing: a simplified approach**. *Journal of Financial Economics*, no 7, 1979, p. 229-263.
- ENGLE, R. F. 1982. **Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation**. *Econometrica*, 50: 987–1007.
- GABE, J.; PORTUGAL, M. 2004. **Volatilidade Implícita Versus Volatilidade Estatística: Um exercício utilizando opções e ações da Telemar S.A**. *Revista Brasileira de Finanças*, Rio de Janeiro, v. 2, n. 1, p. 47-73, 2004.
- HULL, J.; WHITE, A. (1987). **The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities**. *The Journal of Finance* XLII.
- JANKOVÁ, Z. 2018. **Drawbacks and limitations of Black-Scholes model for option pricing**. *Journal of Financial Studies and Research*. Vol. 2018. Article ID 179814.
- LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. 2001. **Valuing american options by simulation: a simple least-squares approach**. *Review of Financial Studies*, 14(1): 113-147.
- MAIA, V.; FIGUEIREDO, A.; KLOTZLE, M. 2014. **Smoothing the Volatility Smile using the Corrado-Su Model**. In: V Congresso Nacional de Administração e Ciências Contábeis – adCont 2014. Anais. Disponível em <<http://www.academia.edu>>. Acesso em 02 fev. 2022.
- NAVARRO, T.; NUNES, V.; ALFANO, V.; HU, O. 2022. **Análise dos modelos de Black e Scholes para precificação de opções no mercado financeiro brasileiro**. Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia de Produção. Universidade Presbiteriana Mackenzie. <https://dspace.mackenzie.br/handle/10899/29216>. Acesso em 07 jul. 2022.

PINHO, F.; CAMARGO, M.; FIGUEIREDO, J. 2017. **Uma revisão de literatura sobre modelos de volatilidade em estudos brasileiros**. *FACES Journal*, vol. 16 nº 1, 10-28, 2017.

PONTES, T.; MAIA, S. 2017. **Precificação de Opções sobre contratos futuros de boi gordo na BM&FBovespa**. *Economia Aplicada*, v.21, n. 4, 2017, 737-760.

POON, S.; GRANGER, C. 2005. **Practical issues in forecasting volatilities**. *Financial Analysts Journal*, vol. 61, nº 1, 2005, p. 45-56.

SAITO, R.; ROCHMAN, R. 2008. **Avaliação de métodos numéricos na precificação de derivativos: revisão e aplicação à opção de compra da Telebrás PN**. *Read Ed.* 61 V. 14 nº 3, Set/ 2008.

SALIBY, E.; GOUVÊA, S.; MARINS, J. 2007. **Amostragem descritiva no apreçamento de opções europeias através de simulação de Monte Carlo: o efeito da dimensionalidade e da probabilidade de exercício no ganho de precisão**. *Trabalhos para Discussão nº 134*. Banco central do Brasil. Disponível em: <<http://www.bc.gov.br>>. Acesso em: 03 nov. 2021.

SILVA, M.; MAIA, S. 2014. **Previsões de volatilidade diária um passo à frente: Um estudo dos contratos futuros de soja com liquidação financeira da BM&FBovespa**. Disponível em <https://www.anpec.org.br>. Acesso em 03 nov. 2021.

SOUZA, W. MARTINES-Filho, J.; MARQUES, P. 2013. **Uso da estrutura a termo das volatilidades implícitas das opções de soja do CME Group para previsões em Mato Grosso**. *Revista de Economia e Sociologia Rural*, vol. 51, nº 2, 255-274, Piracicaba, SP, Brasil.

TONIN, J.; COELHO, A. 2012. **Testando modelos de precificação de opções: análise das opções de compra sobre contratos futuros de café arábica na BM&FBovespa**. *Revista de Economia e Administração*, julho de 2012, DOI: 10.11132/rea.2012.606.

UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE (USDA). 2024. **World Agricultural Supply and Demand Estimates (Wasde)**. Mar. 2024. Disponível em <https://www.usda.gov/oce/commodity/wasde>. Acesso em 09 mar. 2024.