

REFLEXÕES SOBRE AS HABILIDADES DO CURRÍCULO PAULISTA E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO COMPARANDO COM A PESQUISA DE VAN HIELE

Data de aceite: 02/05/2024

Alessandra Domingues Doce de Castro

INTRODUÇÃO

O estudo tem como objetivo a pesquisa da introdução do ensino da Geometria associado ao desenvolvimento do pensamento geométrico olhando para o Currículo Paulista (São Paulo, 2019) no Ensino Fundamental Anos Iniciais, cujo documento está alinhado à Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), analisar neste documento o pensamento geométrico amparado nos níveis de conhecimento da Pesquisa de Van-Hiele. Como ponto de partida tem-se como propósito apresentar reflexões da História da Educação Matemática considerando o pensamento geométrico neste estudo, o Currículo Paulista (São Paulo, 2019), através dos níveis de conhecimento da Pesquisa de Van-Hiele visando construir nos alunos o saber matemático nas situações que compõem o pensamento geométrico. Esse pensar matemático com

foco na Geometria é conhecido como pensamento geométrico, e o objetivo geral é permitir que haja uma reflexão sobre a importância do conhecimento matemático para o desenvolvimento do conhecimento do aluno e as formas metodológicas e didáticas que possam ser utilizadas, permitindo que ocorra maior clareza e objetividade no processo de compreensão.

A palavra Geometria ao estudarmos seu conceito e sua origem do ponto de vista etimológico e seu significado, é palavra grega dividida em duas partes: sua formação é composta por dois termos distintos: *Geo* = terra e *métron* = medida; em relação ao que representa, geometria é uma das divisões (ramo) da matemática que se ocupa da posição e forma de objetos no espaço, e estuda as questões de propriedade, tamanho, força e posições relativas entre figuras, o pensamento algébrico-geométrico que vem desde os Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus e Árabes, passando pela Renascença e chegando aos dias atuais. Já a palavra de origem árabe “al-jabr” restauração,

verificando-se que na Espanha ainda hoje designa o médico que cuida de fraturas (em virtude da ocupação espanhola pelos muçulmanos), enquanto o termo “muqabala” significa comparação. Com o passar dos tempos, a palavra álgebra se impôs como sinônimo de “al-muqabala”. Posteriormente os hindus introduzem um símbolo completamente novo e até então desconhecido no sistema de numeração, o zero. Com a propagação da cultura dos hindus por meio dos árabes estes levam à Europa os denominados “Algarismos arábicos”, de invenção dos hindus, (Vasconcelos, 1925). Portanto é importante resgatar na História os pensamentos e fazer uma conexão com a realidade, permitindo compreender que as teorias e suas descobertas se iniciaram de fatos concretos e de abstrações (Aranha, 1998). Sendo assim, as expressões algébricas e a geometria não constituiriam um dilema para o aluno e sim um verdadeiro desafio. Os registros de representações de um determinado objeto matemático podem se apresentar em exercícios que articulados com a Geometria e a Álgebra, bem como seus conceitos trazem o benefício de contribuir com o aluno na visão das figuras e uma melhor aprendizagem. Assim analisando especificamente no Currículo Paulista poderemos verificar se estes objetivos são contemplados: exploração das relações entre as figuras e propriedades. Portanto, não basta conhecer os teoremas matemáticos isoladamente, como se fossem independentes, descontextualizados e sem sentido, sendo importante saber que estão interligados e que existe uma linearidade que deve ser acrescida de uma rede de significados utilizados frequentemente na nossa realidade cotidiana (Machado, 1994). Despertar no aluno a capacidade de desenvolver as articulações dos pensamentos algébrico e geométrico, bem como a habilidade de converter uma linguagem escrita em linguagem matemática, são aspectos que visa acrescentar contribuições aos demais estudos já elaborados no tocante à Álgebra e Geometria no atual contexto educacional, sendo a importância da atribuição de significados:

Esta nos parece ser a chave para a emergência, na escola ou na pesquisa, de um trabalho verdadeiramente interdisciplinar: a ideia de que conhecer é cada vez mais conhecer o significado, de que o significado de A constrói-se através das múltiplas relações que podem ser estabelecidas entre A e B, C, D, E, X, T, G, H, W, etc, estejam ou não as fontes de relações no âmbito da disciplina que se estuda. Insistimos: não se pode pretender conhecer A para, então, poder-se conhecer B ou C, ou X, ou Z, mas conhecimento de A, a construção do significado de A faz-se a partir das relações que podem ser estabelecidas entre A e B, C, X, G,... e o resto do mundo. (MACHADO, 2002, p. 190-191)

O estudo do pensamento algébrico-geométrico tendo por base uma abordagem histórica visando resgatar o pensamento árabe, caracterizado por unir a Geometria e a Álgebra, em oposição aos gregos que visavam a dissociação destas disciplinas para na verdade encobrir a intenção de manter e justificar seus domínios. A possibilidade de ampliar suas aptidões através do estudo de várias disciplinas simultaneamente, como por exemplo: a Matemática, a Informática e a História, estudando seus fundamentos, constitui um cenário favorável, sendo essa interdisciplinaridade a saber que:

...cada disciplina não pode resultar de uma apreciação isolada de seu conteúdo mas sim do modo como se articulam as disciplinas em seu conjunto; tal articulação é sempre tributária de uma sistematização filosófica mais abrangente, cujos princípios norteadores é necessários reconhecer. (MACHADO, 2002, p.194).

REFERENCIAL TEÓRICO

O pensamento geométrico dentre vários autores há uma pesquisa iniciada em 1959 por dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, que apresenta uma hierarquia de cinco níveis de processos de pensamento em vários contextos geométricos, nos quais os objetos e os produtos de pensamento vão evoluindo quanto maior for o conhecimento, experiências com figuras geométricas e desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim sendo resultará em maior apreensão de conhecimento dos alunos na Geometria, e, esta pesquisa possui quatro características: os níveis são sequenciais, não dependem da idade, a experiência geométrica é fator crucial e a comunicação, ou seja, o ensino ou a linguagem não podem estar em um nível acima do estudante de um determinado objeto de pensamento (Van de Walle, 2009). Na figura a seguir podemos observar a hierarquia de cinco níveis de processos de pensamento da Teoria de van Hiele, que demonstra que vão evoluindo à medida em que os objetos ou ideias serão criados e se relacionam para seguir e ser foco de um nível posterior.

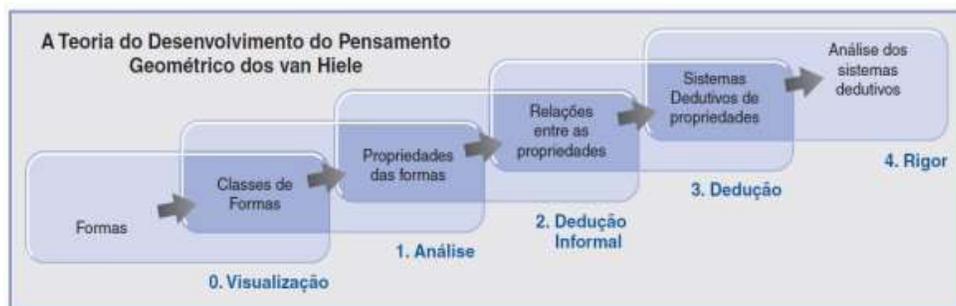


FIGURA 21.3 Em cada nível do Pensamento Geométrico, as ideias criadas nesse nível se tornam o foco ou objeto de pensamento do nível seguinte.

Figura 1: Os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele

Fonte: Van de Walle (2009, p.443)

Os níveis do pensamento geométrico de van Hiele descrevem os processos de pensamento nos contextos geométricos, buscam demonstrar como pensamos, os tipos de ideias de como pensamos geometricamente, são os objetos de pensamento dos quais somos capazes de pensar (Van de Walle, 2009). Podemos seguir estabelecendo estas ideias da seguinte forma conforme a Teoria, como segue:

No aspecto da visualização representada pelo nível 0 há o reconhecimento por parte dos alunos das formas geométricas, principalmente na aparência ocorre o reconhecimento destas formas.

No aspecto da análise representada pelo nível 1 há uma identificação por parte dos alunos das classes das formas geométricas, suas propriedades das formas: simetria, paralelas, dentre outras. O objeto de pensamento se desloca da forma para as suas propriedades.

No aspecto da dedução informal representada pelo nível 2 há um pensar sobre as propriedades dos objetos matemáticos, um desenvolvimento das relações entre as propriedades, poderão fazer conjecturas com um argumento dedutivo informal, tanto sobre as formas quanto as propriedades das figuras geométricas. Objeto de pensamento passa a ser as propriedades das formas.

No aspecto da dedução representada pelo nível 3 há o desenvolvimento de conjecturas e estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos, neste nível os argumentos dos alunos são dedutivos. O objeto de pensamento passa a estar voltado para a aplicação de sistemas com axiomas e teoremas na geometria.

No aspecto do rigor representada pelo nível 4, sendo o mais elevado da Teoria dos van Hiele, há uma atenção para os sistemas axiomáticos. O objeto de pensamento enfatizam não somente as deduções dentro de um sistema mas as distinções e relações entre os diferentes axiomas, assim os produtos de pensamento se caracterizam por estas comparações entre os sistemas axiomáticos e teoremas na geometria.

Assim podemos observar que conforme a Teoria dos Van Hiele que os produtos de pensamento em cada nível representam os objetos de pensamento do nível seguinte, portanto, importante que as ideias dos objetos de pensamento possam ir se relacionando para sempre estarem focados para uma avanço no ensino para níveis mais complexos, buscando o desenvolvimento do conhecimento no aluno para pensamento geométrico. O desenvolvimento das ideias de conceitos de Geometria e do senso do pensamento geométrico com ênfase em alunos desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, são fundamentais desde os primeiros anos. Podemos verificar a importância das implicações da Geometria para outras áreas curriculares, tais como: medidas (compreensão das relações entre área e perímetro ou superfície e volume), raciocínio proporcional (os objetos geométricos semelhantes tem dimensões proporcionais uma forma excelente para o desenvolvimento de espaço e visualização), a Álgebra (aliada à Geometria com a representação gráfica e figural, juntamente com a computação permite a simulação das formas) e inteiros (o plano de coordenadas conecta o posicionamento dos números, positivos e negativos na demonstração no plano e no espaço).

Como propor vivências para os alunos com os objetivos de Geometria com base em dois referenciais: o raciocínio espacial ou senso espacial e o conteúdo específico; estimulando suas compreensões e o desenvolvimento de estratégias para a resolução de

problemas envolvendo experiências geométricas ricas e interessantes; interagindo com seus vários usos e interpretações; e possibilitando lidar com as situações diárias que incluem os quatro objetivos para a Geometria que são constituídos pelos pilares: formas e propriedades, transformação, localização e visualização, conforme Van de Walle (2009). A pesquisa de dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof iniciado em 1959, que demonstra uma hierarquia de cinco níveis de processos de pensamento em vários contextos geométricos (a visualização, a análise, a dedução informal, a dedução e o rigor), nos quais os objetos e os produtos de pensamento vão evoluindo quanto maior for o conhecimento, experiências com figuras geométricas e desde os anos iniciais da Educação Infantil até Ensino Médio, demonstram uma proposta de reflexão para que a geometria possa ser aprendida com parâmetros e estratégia de ensino. Assim sendo resultará em maior apreensão de conhecimento dos alunos na Geometria, e, esta pesquisa possui quatro características: os níveis são sequenciais, não dependem da idade, a experiência geométrica é fator crucial e a comunicação, ou seja, o ensino ou a linguagem não podem estar em um nível acima do estudante de um determinado objeto de pensamento. Conforme Van de Walle (2009), a geometria pode proporcionar e trazer conexões matemáticas, e apresenta algumas propostas de intervenção na aula de matemática destinadas à Educação Infantil envolvendo blocos geométricos (Geoblocks), recortes de figuras (quebra-cabeça Mosaico) sempre relacionado ao mundo real, e à medida em que se avançam nos objetos matemáticos a utilização de softwares de geometria dinâmica tais como: o The Geometer's sketchpad, o Cabri-geomtre e a régua e compasso dentre outros, e ressalta que estas experiências significativas acontecem para que o aluno perceba que a construção de uma determinado objeto matemático após uma reflexão pode estar relacionado com outro objeto, independentemente da movimentação ou modificação aplicada, a relação entre eles é mantida. Desde a Educação Infantil, os alunos precisam construir ideias, sequências, conceitos de visão espacial, serem “desafiados” para desenvolver tais habilidades. Para isso, devemos fazer alguns questionamentos: De que modo os alunos podem ser ajudados a conectar o pensamento geométrico às ideias do mundo real? Quais atividades tem significado para que eles possam avançar? As figuras geométricas estão em toda parte e precisam ser trabalhadas em várias situações do nosso cotidiano. Quantificamos, medimos e comparamos nas mais variadas situações: vemos muitos objetos com formas geométricas entre nós, fazemos a estimativa (visualização mental), medimos, estabelecemos relação de medidas, aproximação espacial, muitas vezes, de forma inconsciente:

Foi escolhido o software de geometria dinâmica Cabri Géomètre II programa que estimula e dinamiza o estudo da geometria, por constituir ferramenta que interage com o estudante, que constrói e investiga as propriedades geométricas, estabelecendo conjecturas em tempo real. Isso nos permite afirmar que, numa construção geométrica feita com softwares de geometria dinâmica, é possível comprovar, validar ou não as hipóteses, testando-as tantas vezes quanto se queira, enquanto na geometria estática – régua e compasso – tem-se numa construção apenas um teste.

Entendemos, com isso, que o nível de raciocínio dos alunos que se utilizam dessas estratégias pode aproximar-se de um objetivo maior do ensino de

geometria, que é fazer com que eles desenvolvam habilidades de visualização, percepção espacial, análise, argumentação lógica e criatividade na resolução de problemas da área da matemática, da física, das artes ou mesmo de outras áreas do conhecimento humano. (Talavera, 2004, p.120)

Diante da pesquisa de Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, podemos nos aprofundar nos cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico como sendo importante fonte de investigação, pesquisa e reflexão do professor na elaboração de suas aulas, principalmente nos primeiros anos do Ensino Fundamental, aliados ao conhecimento dos alunos e no Currículo:

O modelo Van Hiele foi construído para figuras geométricas planas, mas é usado também para as figuras geométricas espaciais. Os autores destacam que a passagem de um nível para o outro depende da exploração que o professor faz em sala de aula das figuras geométricas. Consideram que essa passagem não é homogênea, que o estudante pode estar em um dos níveis para um tipo de conhecimento geométrico e em outro nível para outro tipo, por exemplo. Consideramos importante que o professor conheça esses níveis e que o planejamento de suas aulas proporcione a evolução do pensamento geométrico, sempre com base nos conhecimentos dos alunos e no currículo. Os estudos de Van Hiele (1986) apresentam cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico: Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução, Rigor. (Curi, 2021, p.6).

O Currículo Paulista terá proposta de mostrar como se apresenta a Geometria e a inserção do pensamento geométrico nos papel na formação integral nos alunos do Ensino Fundamental Anos Iniciais. Neste sentido demonstrar como o eixo da geometria aparece no Currículo Paulista (São Paulo, 2019), buscamos apresentar um estudo paralelo entre o documento curricular do Estado de São Paulo e a Teoria de modo que possamos refletir sobre suas consonâncias e similaridades no que tange o pensamento geométrico.

Foi homologado em primeiro de agosto de 2019, o Currículo Paulista é um documento de caráter normativo que as competências e habilidades essenciais para a educação integral dos estudantes do Estado de São Paulo, bem como um documento direcionador da formação docente e demais políticas públicas, em consonância com os preceitos da BNCC:

Contempla as competências gerais discriminadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprovada pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) e homologada em 20 de dezembro de 2017, bem como os currículos e as orientações curriculares das redes de ensino públicas e privadas. O Currículo Paulista define e explicita, a todos os profissionais da educação que atuam no Estado, as competências e as habilidades essenciais para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes paulistas e considera sempre sua formação integral na perspectiva do desenvolvimento humano. (SEE-SP/UNDIME-SP, 2019, p. 11)

Assim ele representa um marco importante na promoção da melhoria da qualidade na Educação do Estado de São Paulo, seja na aprendizagem dos alunos, na formação inicial e continuada de professores, na criação de materiais didáticos, na elaboração das avaliações e na constituição estrutural dos critérios que promovam o desenvolvimento da educação. O Currículo Paulista de Matemática possui cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística em consonância com a BNCC, e inseridas em cada uma destas unidades estão as ideias fundamentais: a equivalência, a ordem, a proporcionalidade, a aproximação, a variação, a interdependência e a representação. A Geometria é importante no aspecto da articulação com as demais disciplinas, promovendo aos estudantes o conhecimento do mundo e o desenvolvimento do pensamento geométrico:

Seu estudo deve propiciar aos estudantes a compreensão do mundo em que vive, e desenvolver a capacidade de descrever, representar, localizar-se; estudar sua posição e deslocamentos; identificar formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, desenvolvendo, assim, o pensamento geométrico. Em relação ao desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, entre as quais destacam-se a memória visual (a capacidade de recordar um objeto que não está mais no campo de visão, relacionando suas características com outros objetos), a percepção de figuras planas (diz respeito ao ato de focalizar uma figura específica em um quadro de estímulos visuais) e a discriminação visual (a capacidade de distinguir semelhanças e diferenças entre objetos; a classificação de formas e objetos e suas propriedades dependem da habilidade de isolar características comuns ou únicas que permitem a comparação por semelhança ou diferença). As habilidades de percepção espacial apoiam processos cognitivos relacionados à leitura e à escrita. Além disso, capacidades de localização espacial e o desenvolvimento de altas habilidades matemáticas também se relacionam à ampliação da percepção espacial. O desenvolvimento dessa habilidade pode se dar por meio da proposição de atividades geométricas problematizadoras, que envolvam experimentação e investigação, e manipulação de materiais. (SEE-SP/UNDIME-SP, 2019, p. 321-322).

O Currículo Paulista conforme descrito corrobora com a Teoria de Van Hiele pois descreve objetos de conhecimento que ora apresentam um conceito ou um procedimento, dos quais é mobilizado uma ou mais habilidades que se assemelham aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele.

A Base Nacional Comum Curricular no Ensino Fundamental Anos Iniciais no plano da Geometria:

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, espera-se que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando, como suporte, mapas (em papel, *tablets* ou *smartphones*), croquis e outras representações. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de

propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos. O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica. (BRASIL, 2018, p.272).

METODOLOGIA DE PESQUISA

A metodologia será ao longo desta investigação amparada por análise documental e bibliográfica, na qual o estudo do pensamento geométrico será descrito e verificado diante da pesquisa de Van-Hiele, e como se apresenta no Currículo Paulista a Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Esta pesquisa pretende oferecer uma análise das habilidades no Currículo Paulista para buscarmos resposta à pergunta norteadora neste estudo, a ideia central será a contribuição para que tanto professores como alunos possam obter neste trabalho uma fonte de consulta, bem como para futuras investigações na Educação e Ensino da Matemática. Assim no sentido de pesquisa como sendo um processo em constante evolução podemos concluir:

A pesquisa científica é entendida como um conjunto de processos sistemáticos e empíricos utilizado para o estudo de um fenômeno; é dinâmica, mutável e evolutiva. Pode se apresentar de três formas: quantitativa, qualitativa e mista. Esta última implica combinar as duas primeiras. Cada uma é importante, valiosa e deve ser respeitada da mesma maneira. (Sampieri, Collado, Lucio, 2013, p. 22).

Conforme Gil (2008), a pesquisa tem um significado que pode nos levar e permitir novos conhecimentos no campo da nossa realidade social, pois além de nos despertar para uma resposta a um determinado problema, inclui todos os aspectos voltados aos diversos relacionamentos humanos:

Pode-se definir pesquisa como o processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos. A partir dessa conceituação, pode-se, portanto, definir pesquisa social como o processo que, utilizando a metodologia científica, permite a obtenção de novos conhecimentos no campo da realidade social. Realidade social é entendida aqui em sentido bastante amplo, envolvendo todos os aspectos relativos ao homem em seus múltiplos relacionamentos com outros homens e instituições sociais. Assim, o conceito de pesquisa aqui adotado aplica-se às investigações realizadas no âmbito das mais diversas ciências sociais, incluindo Sociologia, Antropologia, Ciência Política, Psicologia, Economia etc. (Gil, 2008, p.25)

A metodologia é fundamental como sendo direcionadora para a realização da análise do pensamento geométrico, o Currículo Paulista, BNCC e níveis de conhecimento do pensamento de Van Hiele, serão pontos essenciais para a concretização desta proposta de pesquisa, e, para desenvolvimento de novas indagações e fonte de consulta. A metodologia representa o horizonte e os passos a serem seguidos pelo pesquisador para o desenvolvimento de um estudo que propõe e tem como significado:

A metodologia é a explicação minuciosa, detalhada, rigorosa e exata de toda ação desenvolvida no método (caminho) do trabalho de pesquisa. É a explicação do tipo de pesquisa, do instrumental utilizado (questionário, entrevista), do tempo previsto, da equipe de pesquisadores e da divisão do trabalho, das formas de tabulação e tratamento dos dados, enfim, de tudo aquilo que se utilizou no trabalho de pesquisa. A metodologia é composta de partes que descrevem o local, os sujeitos, o objeto de estudo, os métodos e técnicas, que muitas vezes estão descritos como procedimentos da pesquisa, as limitações da pesquisa, o tratamento de dados, conforme descrito na sinopse apresentada anteriormente. (KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p. 53-54).

Neste trabalho a metodologia escolhida servirá como norteadora entre os documentos oficiais e a teoria, visto que, as análises empregadas possibilitarão a construção da realidade do cenário Paulista obre a Teoria do Pensamento Geométrico.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

O Currículo Paulista conforme descrito em seu documento descreve objetos de conhecimento que ora apresentam um conceito ou um procedimento, dos quais é mobilizado uma ou mais habilidades que se assemelham aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Diante da pesquisa de Pierre Van Hiele e Dina Van Hiele-Geldof, podemos nos aprofundar nos cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico como sendo importante fonte de investigação, pesquisa e reflexão do professor na elaboração de suas aulas, principalmente nos primeiros anos do Ensino Fundamental, aliados ao conhecimento dos alunos e no Currículo:

O modelo Van Hiele foi construído para figuras geométricas planas, mas é usado também para as figuras geométricas espaciais. Os autores destacam que a passagem de um nível para o outro depende da exploração que o professor faz em sala de aula das figuras geométricas. Consideram que essa passagem não é homogênea, que o estudante pode estar em um dos níveis para um tipo de conhecimento geométrico e em outro nível para outro tipo, por exemplo. Consideramos importante que o professor conheça esses níveis e que o planejamento de suas aulas proporcione a evolução do pensamento geométrico, sempre com base nos conhecimentos dos alunos e no currículo. Os estudos de Van Hiele (1986) apresentam cinco níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico: Visualização, Análise, Dedução Informal, Dedução, Rigor. (Curi, 2021, p.6).

Por fim, apresentamos um paralelo entre o Currículo Paulista e a pesquisa de Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, demonstrando como a Geometria se apresenta para os alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, de modo que possamos refletir sobre sua consonância. O Organizador Curricular do Currículo Paulista está desenhado, para Matemática, contemplando as unidades temáticas da seguinte maneira: as habilidades (indicam o que deve ser ensinado em relação aos objetos de conhecimento), os objetos de conhecimento (se apresentam como um conceito ou um procedimento para desenvolver as

habilidades) e os verbos são utilizados para esclarecer os processos cognitivos inseridos nas habilidades, os quais estão inseridos em cada ano do Ensino Fundamental:

O quadro a seguir apresenta as indicações para os anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano), quanto ao ensino de Geometria, habilidades do Currículo Paulista e objetos de conhecimento para cada ano desse nível escolar.

UNIDADES TEMÁTICAS	ANO	HABILIDADES CURRÍCULO PAULISTA	OBJETOS DE CONHECIMENTO
Geometria	1º	(EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás.	Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.
Geometria	1º	(EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial.	Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.
Geometria	1º	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos cotidianos do mundo físico.	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico
Geometria	1º	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais
Geometria	2º	(EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.	Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido.
Geometria	2º	(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.	Esboço de roteiros e de plantas simples.
Geometria	2º	(EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico, por meio de registros.	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características.
Geometria	2º	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características.
Geometria	3º	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.	Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência.
Geometria	3º	(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.
Geometria	3º	(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.

Geometria	3º	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características.
Geometria	3º	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.	Congruência de figuras geométricas planas.
Geometria	4º	(EF04MA16A) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido.	Localização e movimentação: pontos de referência, direção e sentido.
Geometria	4º	(EF04MA16B) Descrever, interpretar e representar a posição ou a movimentação, deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.	Localização, movimentação e representação: pontos de referência, direção e sentido: paralelismo e perpendicularismo.
Geometria	4º	(EF04MA17A) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais, identificando regularidades nas contagens de faces, vértices e arestas no caso dos prismas e das pirâmides.	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características.
Geometria	4º	(EF04MA17B) Identificar as regularidades nas contagens de faces, vértices e arestas no caso dos prismas e das pirâmides.	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações e características.
Geometria	4º	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.	Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e/ou softwares.
Geometria	4º	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e/ou de softwares de geometria.	Simetria de reflexão.
Geometria	5º	(EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas.	Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.
Geometria	5º	(EF05MA15A) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.	Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.
Geometria	5º	(EF05MA15B) Construir itinerários para representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.	Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.
Geometria	5º	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.
Geometria	5º	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos.
Geometria	5º	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e/ou com o uso de tecnologias digitais.	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.

Quadro 1- Objetos de Conhecimento e Habilidades para Geometria no Currículo Paulista

Fonte: Adaptado pelo autor com base no Currículo Paulista (2019, p. 329-345)

O Currículo Paulista corrobora com os ideais propostos pelos níveis de pensamento geométrico de Van Hiele, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, comparando o documento temos as habilidades que indicam o que deve ser ensinado em relação aos objetos de conhecimento, e por conseguinte os objetos de conhecimento que se apresentam como um conceito ou um procedimento para desenvolver as habilidades, e os verbos são utilizados para esclarecer os processos cognitivos inseridos nas habilidades, os quais estão inseridos em cada ano do Ensino Fundamental. Já na Teoria de Van Hiele tem-se cinco níveis dos modos da compreensão das ideias espaciais, tornam-se processos de pensamento utilizados em contextos geométricos e os produtos de pensamento em cada nível são os objetos de pensamento do nível seguinte: o nível 0 (visualização), nível 1 (análise), nível 2 (dedução informal), nível 3 (dedução) e nível 4 (rigor).

Nos 1º e 2º anos observa-se o reconhecimento e os nomes das figuras geométricas com a realidade do aluno e as relações com seu mundo (como as formas são parecidas ou diferentes), nomear e explorar as formas; o que também observamos no nível 0 (visualização) de Van Hiele no âmbito das formas e como são parecidas.

Nos 3º e 4º anos observa-se uma evolução para a classificação, localização, simetria e congruência entre as figuras geométricas com a realidade do aluno e as relações com seu mundo (como as formas possuem propriedades, características e estão inseridas em uma mesma classe) o que não reconheciam no nível 0 de maneira explícita, agora observamos no nível 1 (análise) de Van Hiele avançando para as propriedades das formas.

No 5º ano observa-se uma exploração do pensamento geométrico sobre as propriedades das figuras: conceitos de simetria, congruência, proporcionalidade, linhas paralelas ou perpendiculares e classificação de ângulos, dentre outros, o que também observamos no nível 2 (dedução informal) de Van Hiele avançando para as relações entre as propriedades.

ANÁLISE DAS HABILIDADES DO CURRÍCULO PAULISTA E A TEORIA DE VAN HIELE:

UNIDADES TEMÁTICAS	ANO	HABILIDADES CURRÍCULO PAULISTA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	NIVEL DA TEORIA DE VAN HIELE
Geometria	1º	(EF01MA13) Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos cotidianos do mundo físico.	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico.	Visualização
Geometria	1º	(EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.	Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais.	Visualização
Geometria	2º	(EF02MA14) Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando- as com objetos do mundo físico, por meio de registros.	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento e características.	Visualização
Geometria	2º	(EF02MA15) Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.	Figuras geométricas planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo): reconhecimento e características.	Visualização
Geometria	3º	(EF03MA13) Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras.	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.	Análise
Geometria	3º	(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando- as com suas planificações.	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera): reconhecimento, análise de características e planificações.	Análise
Geometria	3º	(EF03MA15) Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo): reconhecimento e análise de características.	Análise

Geometria	3°	(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.	Congruência de figuras geométricas planas.	Análise
Geometria	4°	(EF04MA17A) Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais, identificando regularidades nas contagens de faces, vértices e arestas no caso dos prismas e das pirâmides.	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações, planificações e características.	Análise
Geometria	4°	(EF04MA17B) Identificar as regularidades nas contagens de faces, vértices e arestas no caso dos prismas e das pirâmides.	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides): reconhecimento, representações e características.	Análise
Geometria	4°	(EF04MA18) Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.	Ângulos retos e não retos: uso de dobraduras, esquadros e/ou softwares.	Análise
Geometria	4°	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e/ou de softwares de geometria.	Simetria de reflexão.	Análise
Geometria	5°	(EF05MA16) Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.	Figuras geométricas espaciais: reconhecimento, representações, planificações e características.	Dedução Informal
Geometria	5°	(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.	Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos.	Dedução Informal
Geometria	5°	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e/ou com o uso de tecnologias digitais.	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas: Reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.	Dedução Informal

Nos 1º e 2º anos do Currículo Paulista priorizam-se o reconhecimento e os nomes das figuras geométricas, bem como sua relação com a realidade do aluno (isto é, com o seu mundo). O estudante deve ser capaz de comparar as formas (ou seja, se são parecidas ou diferentes) com os objetos ao seu redor, nomeá-las, explorar o seu formato com demais formas geométricas no mundo físico. As mesmas recomendações também são observadas no nível 0 (visualização) de Van Hiele, que estuda o pensamento geométrico no âmbito das formas e de como são parecidas (ou não) entre si.

Nesses anos, os alunos precisam de experiências com diversas formas bi e tridimensionais. Devem buscar relações entre formas e agrupar figuras que tenham semelhanças (como proposta inicial de descoberta pelo professor das propriedades que os alunos possuem com relação ao pensamento geométrico inicial), reconhecer as formas no ambiente em que estão e adquirir noções espaciais e das propriedades das formas (lados paralelos, simetrias, ângulos etc.). Todos esses aspectos podem ser inseridos no nível 0, mas de maneira informal e observacional.

No 1º ano, tratamos de objetos de conhecimento direcionados para a identificar e nomear e também com as demais formas geométricas, sempre de modo a fazer com que o aluno não somente identifique as figuras de forma isolada, mas em conexão com o cotidiano. Ressalta-se a valorização das experiências que os alunos podem ter junto à Geometria ao trazê-la para a sua realidade, um ponto similar na Teoria de Van Hiele, a qual valoriza as experiências geométricas dos alunos desde os anos iniciais.

No 2º ano, observamos objetos de conhecimentos direcionados para além da identificação espacial aprendidas no 1º ano. O intuito é avançar para relações, comparações e reconhecimentos comuns entre as figuras, de maneira a tornar as experiências geométricas dos alunos mais complexas, ponto comum na Teoria de Van Hiele, segundo a qual os alunos vão evoluindo na Geometria na medida em que avançam pelos cinco níveis de pensamento geométrico.

Nos 3º e 4º anos, observa-se uma evolução para a classificação, a simetria e congruência entre as figuras geométricas e a realidade do aluno — isto é, para as relações entre elas e seu mundo. Agora, os estudantes identificam que as formas possuem propriedades e características específicas, que as tornam passíveis de ser inseridas em uma mesma classe. Isso era algo que não reconheciam no nível 0 de maneira explícita, mas que passam a observar no nível 1 (análise), avançando para as propriedades das formas.

Os alunos passam a considerar as formas dentro de uma classe, evoluindo para não mais observar um formato particular de figura. Com isso, começa a pensar nas particularidades das figuras geométricas, ou seja, em suas propriedades de uma maneira mais formal, identificando diagonais, lados paralelos e assim por diante. Uma observação importante quanto à diferença entre o nível 1 e o nível 0 é que o objeto de pensamento deve evoluir e refinar definições — como as de simetria e ângulos retos, por exemplo —, mas sempre levando em conta as formas e as figuras aprendidas no nível 0.

No 3º ano, observamos objetos de conhecimento direcionados para o reconhecimento e análise das figuras geométricas. A orientação deve estar sempre voltada para a análise, a planificação e o reconhecimento das características das figuras planas e espaciais que o aluno analisa em conexão com um contexto. Com isso, desenvolvem-se as suas habilidades de descrição, reconhecimento, classificação, comparação e associação entre figuras, sempre ressaltando-se a valorização das experiências que ele pode ter junto à Geometria ao trazê-la para a sua realidade — ponto similar na Teoria de Van Hiele, a qual valoriza a análise das propriedades das formas no nível 1.

No 4º ano, observamos objetos de conhecimento direcionados para o reconhecimento, representação e características das figuras geométricas. O aluno deve reconhecer as figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides), estabelecendo relações entre elas como contagem de faces, arestas, vértices e suas regularidades. Ressalta-se aqui a valorização das experiências que o estudante pode ter junto à Geometria ao trazê-la para a sua própria realidade com atividades em dobraduras, softwares de geometria e/ou malhas quadriculadas, ponto similar nas atividades propostas pela Teoria de Van Hiele.

No 5º ano, observa-se uma exploração do pensamento geométrico quanto às propriedades das figuras. Introduzem-se conceitos de simetria, congruência, proporcionalidade, linhas paralelas ou perpendiculares e classificação de ângulos, dentre outros — à semelhança do que observamos no nível 2 (dedução informal) de Van Hiele, que avança para as relações entre as propriedades.

Assim, o ensino ou a linguagem a ser desenvolvida para o aluno não pode ser em um nível superior, permitindo o protagonismo do aluno perante o pensamento geométrico, além da mediação do professor diante das técnicas e contextualizações que devem ser apresentadas aos discentes. Evidenciar contextos com figuras em que o aluno compreenda o seu papel na sociedade e sinta-se inserido ao meio em que se encontra, torna-se fundamental para que seu aprendizado faça sentido para si e promova a busca de um conhecimento concreto e eficaz, diante dos objetos de conhecimento e habilidades desenvolvidas no Currículo Paulista com grande ênfase.

CONCLUSÕES

Este artigo propôs, como objetivo geral, foi o de analisar como se apresenta a Geometria no Currículo Paulista, segundo os níveis de pensamento geométrico da teoria de Van Hiele nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental para desta forma investigar e concluir se, a partir deste documento, é possível trabalhar e desenvolver o pensamento geométrico no ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Através dos autores citados o embasamento de uma pesquisa documental que demonstre uma proposta de ampliar os conhecimentos com uma metodologia de ensino que vem ao encontro do desenvolvimento do pensamento geométrico resultando em autonomia, abstração e resolução de problemas

pelos alunos de uma maneira que possam fazer uma conexão com sua realidade. A proposta de despertar no aluno a capacidade de desenvolver o pensamento abstrato e espacial, que é uma das características da Álgebra e da Geometria, bem como a habilidade de converter uma linguagem escrita em linguagem matemática, visam acrescentar contribuições aos demais estudos elaborados no atual contexto educacional. A importância da atribuição de significados, construir, reconstruir e simular através de figuras, números, gráficos, tabelas através da utilização das tecnologias são possibilidades reais de ampliação de saberes matemáticos. Mas não podemos deixar de considerar a preparação com seriedade para que a aula tenha êxito, requer formação do professor, direcionamento ao conteúdo que pretende desenvolver e, principalmente, a comunicação aluno e professor que serão fundamentais para que os resultados sejam alcançados. A tecnologia cada vez mais presente no contexto educacional, requer que aluno e professor estejam engajados na apropriação desta ferramenta não para competir com esta, mas para constituir-se de uma ferramenta de apoio para o conhecimento de todos. Concluímos que para que estas possibilidades de interatividade, conexão e espírito crítico, requerem do professor e do aluno uma verdadeira motivação mútua para que a aprendizagem de fato ocorra nos aspectos ferramentas e ambientes:

O professor de matemática, para melhorar a qualidade do discurso, deve encorajar e aceitar o uso de computadores, calculadoras e outras tecnologias; materiais concretos usados como modelos; figuras, diagramas, tabelas e gráficos; termos e símbolos inventados e convencionais; metáforas, analogias e histórias; hipóteses escritas, explicações e argumentos; apresentações orais e dramatizações. O professor de matemática deve criar um ambiente de aprendizagem que promova o desenvolvimento o potencial matemático de cada aluno fornecendo e estruturando o tempo necessário para explorar a matemática segurança e inserir ideias e problemas significativos; usando o espaço físico e materiais de modo que facilitem a aprendizagem de matemática pelos alunos; fornecendo um contexto que encoraje o desenvolvimento de habilidades e proficiência matemática; respeitando e valorizando as ideias, os modos de pensar e as disposições matemáticas dos alunos; e consistentemente esperando e encorajando os alunos a trabalhar de modo independente ou colaborativo para atribuir e construir significados para a matemática; assumir riscos intelectuais levantando questões e formulando conjecturas; expor um senso de competência matemática validando e defendendo ideias com argumentos matemáticos. (Van de Walle, 2009, p.558).

E para o aluno a saber:

escutem, respondam e questionem o professor e os demais alunos; usem uma variedade de ferramentas para raciocinar, estabelecer conexões, resolver problemas e se comunicar; proponham e iniciem problemas e questões; façam conjecturas e apresentem soluções; explorem exemplos e contraexemplos para investigar uma conjectura; tentem se convencer e aos outros da validade de representações, soluções, conjecturas e respostas particulares; se baseiem em evidências e argumentos matemáticos para determinar a validade. (Van de Walle, 2009, p.558).

Buscamos também demonstrar que através da leitura deste artigo novas propostas de estudos voltados para a articulação de conteúdos e disciplinas, bem como interdisciplinaridade, para que sejam ensinados em conjunto e não de maneira compartimentada, para que o conhecimento seja construído com significado para o aluno, sempre sob a mediação e orientação do professor.

REFERÊNCIAS

ARANHA, M. L. de A. **História da Matemática**. 2ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 1998.

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR. **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar: possibilidades**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/193-tecnologias-digitais-da-informacao-e-comunicacao-no-contexto-escolar-possibilidades?highlight=WyJocSJd>. Acesso em 16 dez. 2020

CURI, E. **Algumas reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico no Currículo de Matemática da Cidade de São Paulo**. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/250560>. Acesso em: 11 set. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

KAUARK, F.; MANHÃES, F.C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da pesquisa: guia prático**. Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática: A Alegoria como Norma e o Conhecimento como Rede**, 1994. 266 p. Tese (Livre-Docência). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática - As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. 5ª edição. São Paulo: Cortez Editora, 2002.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna: Uma impregnação essencial**, 1989. 252 p. Tese (Doutoramento em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. São Paulo.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, P. B. **Metodologia de pesquisa**. 5ª. Ed. São Paulo: Editora Mcgraw Hill, 2013. 624 p.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista (Versão 1)**. São Paulo: SEE-SP/UNDIME-SP, 2018.

TALAVERA, L. M. B. **Geometria dinâmica e reconstrução do pensamento geométrico grego na sala de aula**. Exacta. Vol. 2, p. 117-132. São Paulo: UNINOVE, novembro 2004.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6ª edição. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VASCONCELLOS, F. de A. e. **História das Matemáticas na Antigüidade**. Aillaud e Bertrand: Paris Lisboa, 1925.