

# COMPARACIÓN DE LOS METODOS DE MIGRACIÓN BASADOS EN LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIRECCIONAL (OWWE)

*Data de aceite: 03/06/2024*

### **Jhorman G. Maldonado**

Grupo Pangea, Departamento de física y geología, Universidad de Pamplona

### **Luis Naspirán**

Instituto Tecnológico de Medellín

### **Francisco Cabrera**

Grupo Pangea, Departamento de física y geología, Universidad de Pamplona.

**RESUMEN:** La migración sísmica es una etapa fundamental en el proceso de reconstrucción del mapa estructural del subsuelo, a partir de la información registrada en superficie debido a las reflexiones de las ondas cuando una fuente perturba el medio terrestre. Si este medio es dispersivo, la energía se disipa lo que se observa en los sismogramas como una pérdida de amplitud y deformación en la señal. Los modelos matemáticos de velocidad compleja permiten introducir el término de atenuación en la ecuación de onda y por medio de la extrapolación de campos recuperar la energía perdida a medida que la onda se propaga. En

el presente trabajo se comparan los resultados de la migración efectuada según dos modelos de atenuación y su efecto sobre los datos.

**Palabras clave:** Migración sísmica, corrimiento de fase, ondas unidireccionales, atenuación.

**ABSTRACT:** Seismic migration is a fundamental step in the process of reconstruction of the structural map of the subsoil, based on the information recorded on the surface due to the reflections of the waves when a source disturbs the terrestrial environment. If this medium is dispersive, the energy dissipates what is observed in the seismograms as a loss of amplitude and deformation in the signal. The mathematical models of complex velocity allow to introduce the attenuation term in the wave equation and by means of the extrapolation of fields recover the lost energy as the wave propagates. In this work we compare the results of the migration carried out according to two models of attenuation and their effect on the data.

**KEYWORDS:** Seismic Migration, Phase Shift, One Way Wave Equations, attenuation.

## INTRODUCCIÓN

La migración utilizando las ecuaciones de sentido único, es un método recursivo de extrapolación de campos de onda, donde el campo en cada nivel de profundidad se calcula a partir de su valor en el nivel inmediatamente anterior. Este método es efectivo en estructuras donde se presentan variaciones laterales moderadas de la velocidad. En medios dispersivos la onda pierde amplitud y frecuencias a medida que se propaga. El coeficiente de atenuación es una característica del medio que determina qué tan dispersivo es. El recíproco del coeficiente de atenuación es el factor de calidad. El fenómeno de atenuación está asociado al de dispersión el cual se produce porque los componentes de frecuencia de la onda viajan a diferentes velocidades y debido a esto se produce una deformación del pulso mientras se propaga. Esto conduce al concepto de velocidad de fase, el cual permite involucrar la atenuación en la ecuación de onda.

Al utilizar los modelos de velocidad compleja en la migración pre-apilado por corrimiento de fase, se busca recuperar la energía perdida durante la propagación de la onda a través de un medio dispersivo.

## ECUACIÓN DE ONDAS UNIDIRECCIONALES

Una ecuación que modela el comportamiento del campo de presión  $P(x, z, t)$  es la ecuación de onda en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier [1]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega; \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x; \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z \right) \quad (2)$$

la ecuación (1) se convierte en

$$-\omega^2 P(k_x, z, \omega) = -k_x^2 v^2 P(k_x, z, \omega) + v^2 \frac{\partial^2 P(k_x, z, \omega)}{\partial z^2} \quad (3)$$

Resolviendo para la segunda derivada respecto a  $z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial^2 P(k_x, z, \omega)}{\partial z^2} = \left[ k_x^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right] P(k_x, z, \omega) \quad (4)$$

Llamando

$$k_z^2 = \left[ k_x^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right] \quad (5)$$

Es posible separar la ecuación (4) en dos:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + ik_z^2 \right) P(k_x, z, \omega) = 0 \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} - ik_z^2 \right) P(k_x, z, \omega) = 0 \quad (7)$$

las soluciones a las ecuaciones (6) y (7) son de la forma:

$$P(k_x, z + \Delta z, \omega) = e^{+ik_z \Delta z} \quad (8)$$

$$P(k_x, z - \Delta z, \omega) = e^{-ik_z \Delta z} \quad (9)$$

Estas expresiones representan ondas planas desplazándose en direcciones opuestas. La ecuación (8) representa una onda viajando hacia adelante (viaja hacia abajo) y la ecuación (9) representa una onda que se propaga hacia atrás (viaja hacia arriba). Dado el sentido único de la dirección de propagación, reciben el nombre de ecuaciones de onda unidireccionales. (Gazdag, 1984).

## ATENUACIÓN

La atenuación es el cociente entre la energía disipada en un ciclo sobre la energía total

$$\frac{1}{Q} = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (10)$$

donde  $Q$  es el factor de calidad, el cual cuantifica qué tan disipativo es el medio. En términos del factor de calidad, en 1979 se propuso un modelo para la velocidad compleja en el que  $Q$  es constante. (Kjartansson, 1979)

$$v_p = v_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\gamma \quad (11)$$

Donde  $\gamma = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{1}{Q} \right)$ .

Un segundo modelo es el de Kolsky- Futterman (Wang, 2008), donde la velocidad de fase está dada por

$$\frac{1}{v_p} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{\pi v_r Q_r} \ln \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (12)$$

donde  $v_0$  y  $Q_r$  son los valores de la velocidad de fase y el factor de calidad para una frecuencia de referencia. El modelo de Futterman y Kolsky es ampliamente utilizado en el procesamiento de datos sísmicos y sismología (Aki, 1980).

## INCLUSIÓN DEL FACTOR DE CALIDAD EN LA ECUACIÓN DE ONDA

Las propiedades de absorción del medio son descritas por el factor de calidad  $Q$  el cual está definido en términos del módulo de bulk ( $M$ ) mediante la ecuación

$$\frac{1}{Q} = \frac{M_I(r, \omega)}{M_R(r, \omega)}, \quad (13)$$

Donde  $M_I$  es la parte imaginaria y está relacionada con la pérdida de energía y  $M_R$  es la parte real del número de onda. Como la velocidad depende del módulo de bulk, resulta también una variable compleja,

$$v = \sqrt{\frac{M}{\rho}} \quad (14)$$

Donde  $\rho$  es la densidad del material. Al dividir las frecuencias sobre la velocidad se obtiene

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k_\omega + iL_\omega$$

De esta manera el número de onda, ahora no real sino complejo, definido en la ecuación (5) toma la forma

$$k_z^2 = [k_x^2 - (k_\omega + iL_\omega)^2].$$

La solución de la ecuación de onda, consecuentemente, cambia debido a que la cantidad subradical es un número complejo. La raíz cuadrada de un número complejo puede descomponerse en una parte real y otra parte imaginaria

$$k_z = \sqrt{k_x^2 - (k_\omega + iL_\omega)^2} = k_{zreal} + ik_{zimag} \quad (15)$$

donde  $k_{zreal}$  es la parte real y  $k_{zimag}$  es la parte imaginaria del número de onda.

Por lo tanto, el extrapolador ahora posee un término responsable de la atenuación y es de la forma

$$P(k_x, z \pm \Delta z, \omega) = e^{\pm ik_{zreal} \Delta z} e^{\pm k_{zimag} \Delta z} \quad (16)$$

al tomar los signos adecuados en los extrapoladores, se puede modelar la pérdida de energía o recuperarla.

## PSEUDO CÓDIGO DE MIGRACIÓN POR CORRIMIENTO DE FASE:

Para efectuar la migración sísmica pre-apilado utilizando extrapoladores, se necesita ingresar los datos de la fuente, del modelo de velocidad y los datos del sismograma.

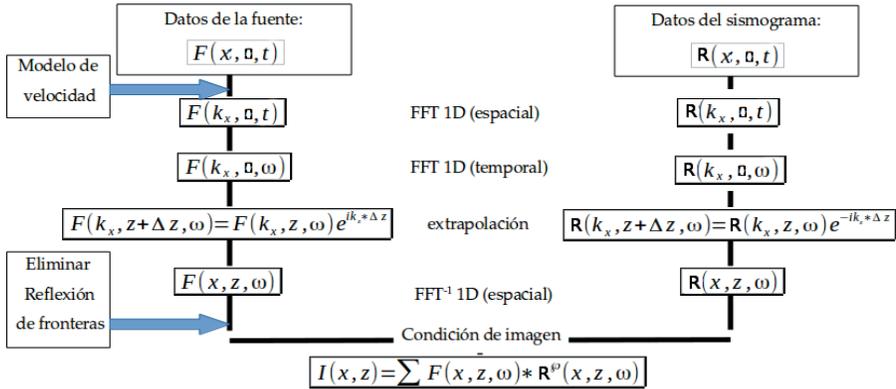


Figura 1. Pseudo código de migración por corrimiento de fase basado en (Gazdag, 1984).

En la figura 1 se aprecia el proceso sin tener en cuenta la atenuación, el extrapolador corresponde a las ecuaciones (8) y (9). Cuando se cambia la ecuación de onda para incluir la atenuación el extrapolador cambia, ahora además de ingresar los datos de la fuente, del modelo de velocidad y los datos del sismograma es necesario incluir un mapa de valores de del factor de calidad de acuerdo al mapa de velocidades.

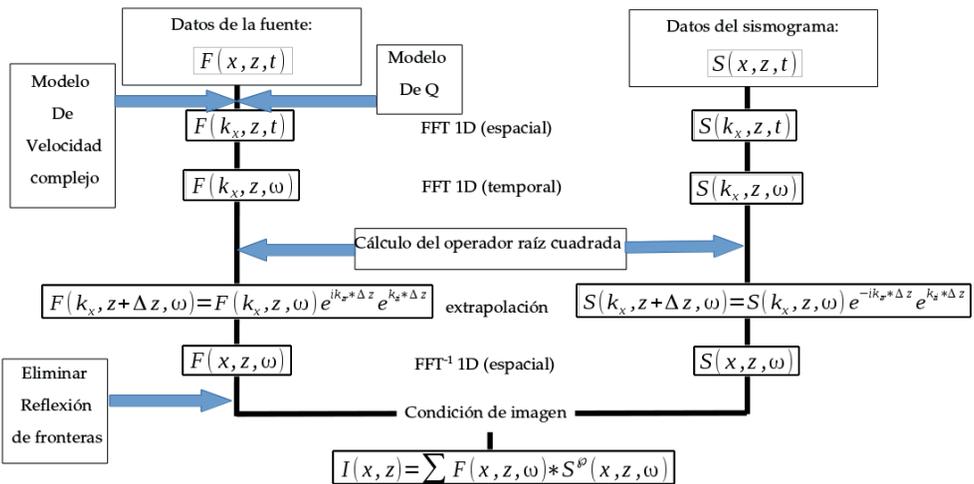


Figura 2. Pseudo código de migración por corrimiento de fase con corrección de la amplitud.

En la figura 2 se observa el nuevo esquema de migración, donde uno de los pasos más importantes es el cálculo del operador raíz cuadrada (Mittet et al. 1995), que se logra separando la raíz compleja en dos, una parte real y una parte imaginaria (ecuación 16). Utilizando los signos adecuados en los exponenciales se puede generar la ganancia en la amplitud de la onda. Sin embargo, es necesario distinguir tres casos al evaluar la raíz cuadrada.

Caso 1:  $k_x^2 < k_\omega^2 - L_\omega^2$  Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión (15) es mayor que cero, los términos en los exponentes para el campo de onda descendente ( $P_D$ ) son:

$$P_D(k_\omega, L_\omega, k_x) = e^{ik_{zreal}\Delta z} e^{k_{zimag}\Delta z} \quad (17)$$

y para el campo de onda ascendente ( $P_U$ ) son

$$P_U(k_\omega, L_\omega, k_x) = e^{-ik_{zreal}\Delta z} e^{k_{zimag}\Delta z} \quad (18)$$

Los signos en el exponente con el número imaginario indican la dirección de propagación de la onda y el signo en el otro exponencial es positivo con el fin de aumentar la amplitud en cada nivel.

Caso 2:  $k_x^2 = k_\omega^2 - L_\omega^2$  Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión (15) es igual a cero, los términos en los exponentes son iguales para el campo de onda descendente ( $P_D$ ):

$$P_D(k_\omega, L_\omega, k_x) = e^{i\sqrt{-k_\omega L_\omega} \Delta z} e^{\sqrt{-k_\omega L_\omega} \Delta z} \quad (19)$$

y para el campo de onda ascendente ( $P_U$ ):

$$P_U(k_\omega, L_\omega, k_x) = e^{-i\sqrt{-k_\omega L_\omega} \Delta z} e^{\sqrt{-k_\omega L_\omega} \Delta z} \quad (20)$$

Los signos en el exponente con la unidad imaginaria indican la dirección de propagación de la onda y el signo positivo en el otro exponencial permite aumentar la amplitud en cada paso de la extrapolación.

Caso 3:  $k_x^2 > k_\omega^2 - L_\omega^2$  Cuando el valor al interior de la raíz cuadrada de la expresión (15) es menor que cero, los términos en los exponentes para el campo de onda descendente ( $P_D$ ) son:

$$P_D(k_\omega, L_\omega, k_x) = e^{-ik'_{zreal}\Delta z} e^{-k'_{zimag}\Delta z} \quad (21)$$

y para el campo de onda ascendente ( $P_U$ ) son

$$P_U(k_\omega, L_\omega, k_x) = e^{-ik'_{zreal}\Delta z} e^{k'_{zimag}\Delta z} \quad (22)$$

Donde

$$k'_{zreal} = Re \left[ \sqrt{-k_x^2 + (k_\omega - iL_\omega)^2} \right] \quad (23)$$

y

$$k'_{zimag} = Im \left[ \sqrt{-k_x^2 + (k_\omega - iL_\omega)^2} \right] \quad (24)$$

Con estos extrapoladores se logra recuperar valores de amplitud de la onda a medida que esta se propaga.

## EXPERIMENTO

Se genera un mapa de velocidades con valores de velocidad y de específicos, como se muestra a continuación

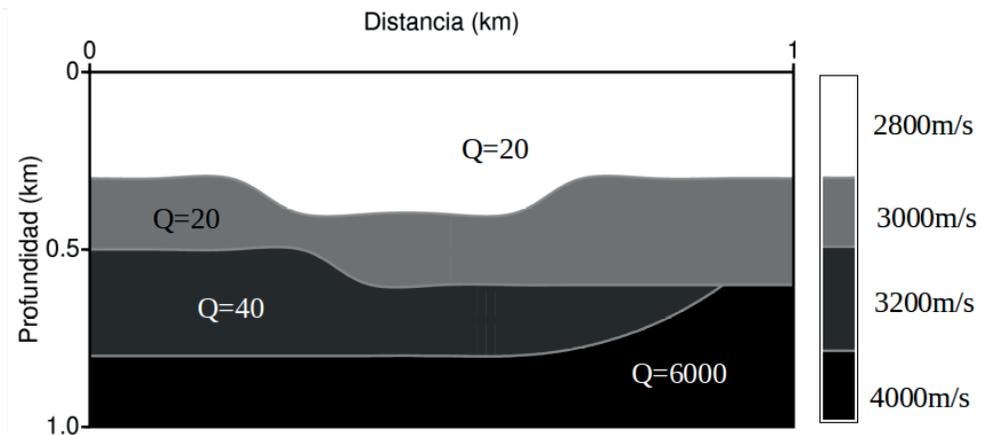


Figura 3. Modelo de velocidad y de factor de calidad.

Los datos para este modelo se obtienen a partir de rutinas de Seismic Unix (software libre de CWP) que permiten realizar adquisición de datos en modelos sintéticos.

Los valores elegidos para la velocidad y del factor de calidad Q se asumen teniendo en cuenta las características de un medio real, donde estos parámetros aumentan con la profundidad, debido a que las capas superiores representan materiales no consolidados, y a medida que se profundiza aumenta la presión y el medio se compacta siendo menos dispersivo.

El experimento se realiza adquiriendo datos (sismogramas) para 18 posiciones diferentes de la fuente; la migración pre-apilado en profundidad se realiza disparo a disparo. En la figura 4 se muestra el resultado de la migración utilizando el algoritmo de corrimiento de fase sin tener en cuenta la atenuación y en la figura 5 se superpone una imagen con la posición real de las interfaces para verificar.

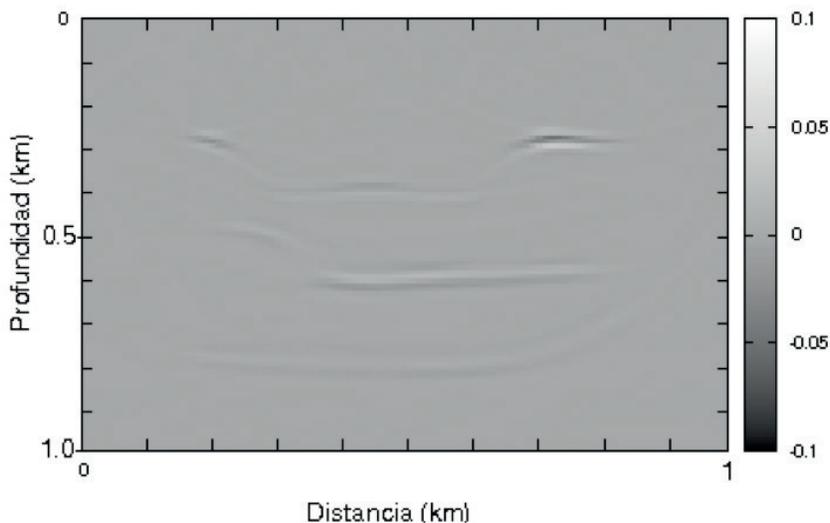


Figura 4. Resultado de la migración para 18 disparos sin tener en cuenta la atenuación.

La imagen de la figura 4 muestra el efecto de la atenuación en la migración, las interfaces someras se ven bien definidas y a medida que aumenta la profundidad la amplitud decae.

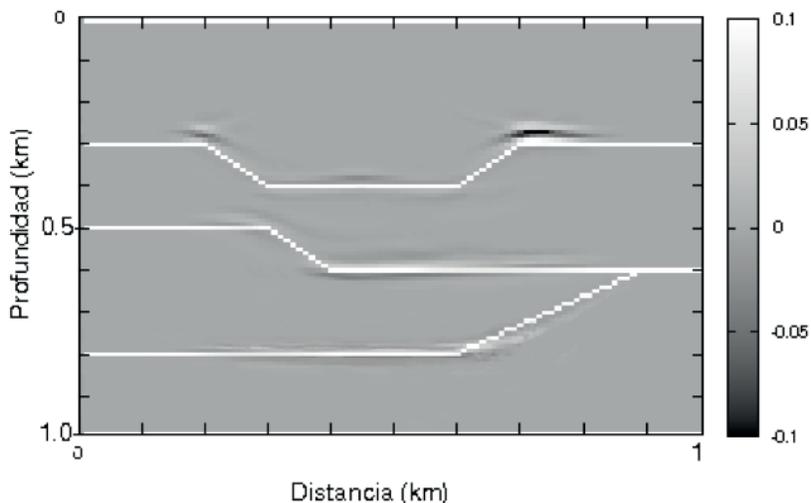


Figura 5. Imagen migrada superpuesta con la posición real de los reflectores.

En la figura 5 se evidencia la ubicación correcta de los eventos en la migración por corrimiento de fase para 18 diferentes posiciones de la fuente.

Se procede a realizar el mismo experimento con el método de migración PS, ahora con compensación de energía utilizando el modelo matemático de Futterman- Kolsky. El resultado de este proceso se puede ver en la figura 6

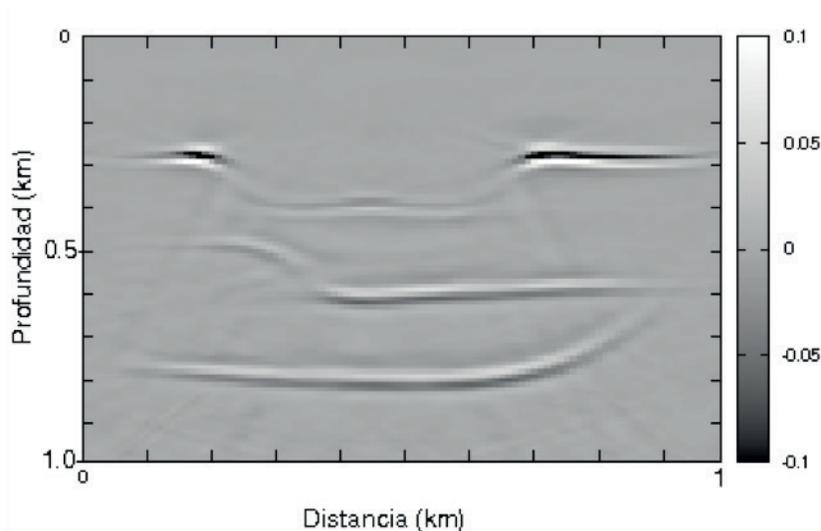


Figura 6. Imagen resultada de la migración por corrimiento de fase utilizando el modelo Matemático de Futterman-Kolsky.

Los resultados en términos de amplitud son buenos, las interfaces se ven bien definidas y con buena amplitud, ahora es necesario comparar con la estructura real (Figura 7).

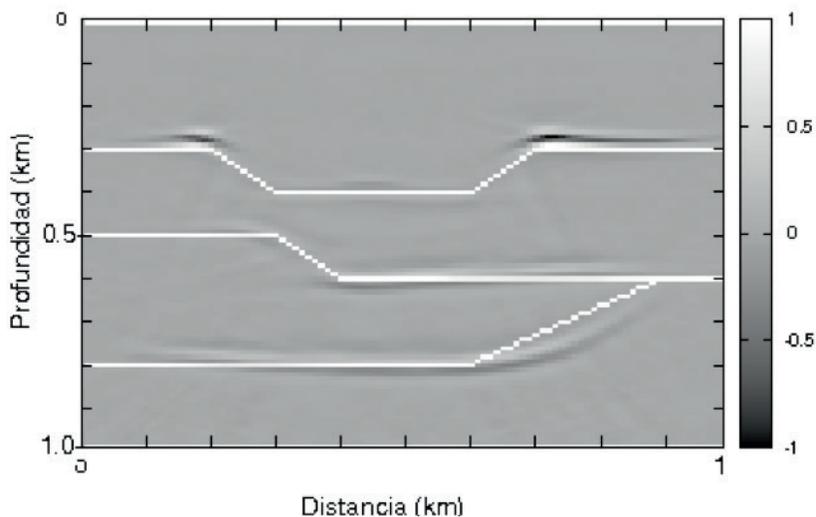


Figura 7. Comparación de la ubicación de las fronteras reales, con las obtenidas con la migración por corrimiento de fase utilizando el modelo de Futterman-Kolsky.

El resultado de esta migración muestra las interfaces con mejor amplitud, lo que significa que se produjo una compensación de la energía a medida que se realiza la extrapolación. Adicionalmente al contrastar la posición real de las interfaces con el resultado se evidencia que la posición corresponde con la estructura geológica modelada.

Por último, se realiza la migración por corrimiento de fase utilizando el modelo matemático de Kjartansson para lograr la compensación de energía. El resultado de esta migración se muestra en la figura 8.

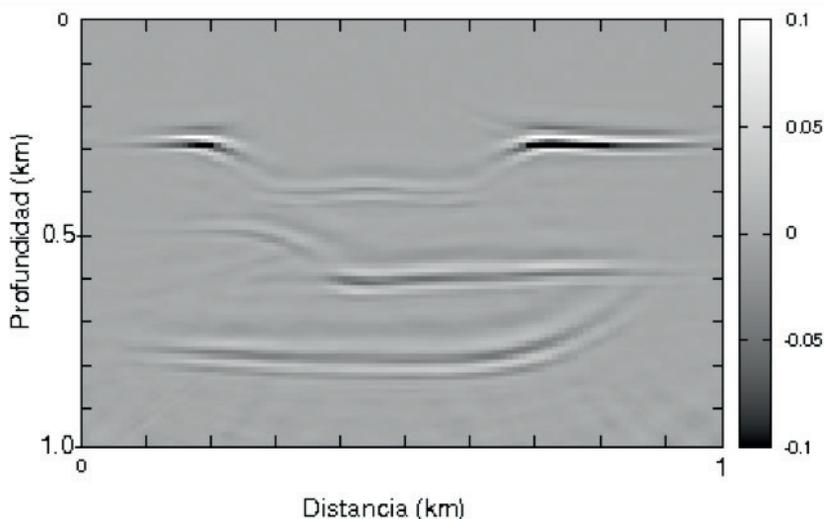


Figura 8. Imagen resultada de la migración pre-apilada por corrimiento de fase utilizando el modelo matemático de Kjartansson.

El resultado de esta migración muestra unas interfaces dobles, aunque recupera la amplitud puede producir problemas de interpretación, adicionalmente, al contrastar la imagen final con la estructura original se ve un desfase en la posición de los eventos (Figura 9).

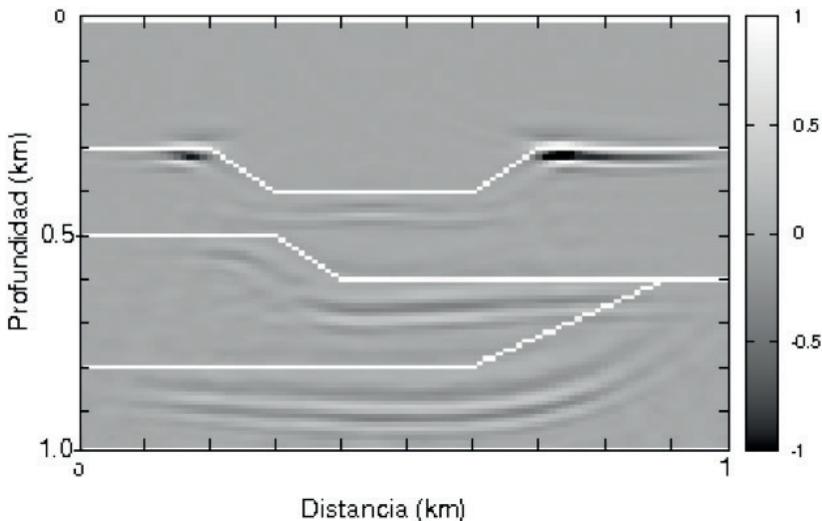


Figura 9. Comparación de la ubicación de las fronteras reales, con las obtenidas con la migración por corrimiento de fase utilizando el modelo de Kjartansson.

## CONCLUSIONES

El código de migración sísmica pre-apilado en profundidad por corrimiento de fase, permite obtener imágenes migradas de buena calidad en zonas con variaciones laterales de velocidad moderadas.

Al comparar las imágenes obtenidas por los tres métodos se aprecia una recuperación de amplitud cuando se incluye el factor de calidad  $Q$ , sin embargo, el modelo matemático que produjo mejores resultados es el de Futterman y Kolsky, que además de recuperar la amplitud posiciona los eventos en la ubicación correcta, por otra parte el modelo matemático de Kjartansson no arroja el resultado esperado, lo que puede producir problemas de interpretación.

Los ruidos en las imágenes finales se deben a dispersión numérica causada por la solución del operador raíz cuadrada y por efectos de bordes en el modelado de la onda descendente.

## REFERENCIAS

1. A. J. Berkhout, Wave field extrapolation techniques in seismic migration, a tutorial, Society of Exploration Geophysicists (1981).
2. A.J. Berkhout C.P.A. Wapenaar, ELASTIC WAVE FIELD EXTRAPOLATION, primera ed., ELSEVIER, 1989.
3. Einar Kjartansson, Constant  $q$  wave propagation and attenuation., Journal of Geophysical Research, Vol. 84, N B9 (August 10, 1979).

4. Carcione José M., Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media, Pergamon, 2001.
5. Roger Sollie Rune Mittet and Ketil Hokstad, Prestack depth migration with compensation for absorption and dispersion., GEOPHYSICS, VOL. 60, NO. 5 (SEPTEMBER-OCTOBER 1995).
6. Yanghua Wang, Seismic inverse Q Filtering, primera ed., BLACKWELL PUBLISHING, 2008.
7. O. Yilmaz, M. Cooper, and Doherty, Seismic data analysis, primera ed., seismic data analysis vol. 1, 2000.
8. Gerard T. Schuster, Basics of Seismic Imaging, primera ed., Copyright G. Schuster 2010., May 9, 2010.
9. Pujol, Elastic wave propagation and generation in seismology, Cambridge University Press, 2003.
10. Carcione J. M., Wave fields in real media: Theory and numerical simulation of wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media, Elsevier., 2007.