VESTÍGIOS DA ARITMÉTICA NO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Data de aceite: 02/05/2024

Karina de Oliveira Castro

Antonio Sales

RESUMO: Este estudo é um recorte da pesquisa desenvolvida em nossa tese (Castro, 2022). O objetivo desse extrato é investigar de que forma os alunos utilizam seus conhecimentos sobre aritmética em uma tarefa que explora o pensamento algébrico. Foram convidados sete estudantes para participar da pesquisa: alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio. Os resultados foram interpretados pelo filtro teórico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) além da contribuição de autores como Bosch e Kieran. Previamente, pode-se dizer que mesmo para os alunos mais próximos de um pensamento algébrico, a aritmética foi usada para a justificativa de seus procedimentos.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra. Generalização. Educação Básica. TAD.

INTRODUÇÃO

Este trabalho é um extrato de uma pesquisa cujo cerne é a generalização algébrica. Parte-se do pressuposto da existência de determinados níveis no processo de generalização dos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental e o objetivo é investigá-los. Aqui estão os resultados colhidos em uma primeira fase em que os alunos foram convidados a fazer uma tarefa com moldes no pensamento funcional, cuja característica principal é apoiar-se na relação entre variáveis, conforme explica Kieran *et al.* (2016). A autora nos mostra que essa abordagem privilegia o trabalho com objetos como variável e expressões numa perspectiva diferente da aritmética generalizada, ou seja, aquela que se propõe a explorar relações e propriedades inerentes às operações aritméticas.

A fonte principal de interpretação desses aspectos é a Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Chevallard (1999). A TAD tem como elementos principais as relações entre objetos, indivíduo e instituição. Objetos são as entidades materiais e imateriais, representadas pela letra *o* e que existem para o indivíduo *x*. Se há um conjunto de objetos *o* e um indivíduo *x*, há a instituição *I*. Vê-se também que esses elementos se relacionam: o indivíduo *x* se relaciona com a instituição *I* por meio do que a TAD chama de relação institucional e, ainda, o indivíduo *x* se relaciona com o objeto *o* por meio do que o autor chama de relação pessoal. Portanto, objeto, indivíduo e instituição são a base dessa teoria a qual interpreta a realidade por meio da relação que existe entre os seus elementos. A partir daí, outras ampliações foram sendo feitas no corpo teórico de forma que Bosch e Chevallard (1999) desenvolvem o que chamam de modelo praxeológico para melhor descrever a relação institucional. O indivíduo *x* cumpre determinadas tarefas na instituição *I* o que faz emergir, ainda, a sua relação pessoal com o objeto *o*. Portanto, a praxeologia modela a relação institucional do indivíduo com determinado objeto. E isso se dá, de acordo com os autores, por meio da execução de um conjunto de tarefas. Essas tarefas (T) são executadas por meio de alguma técnica (τ). Além disso, essa técnica precisa ser justificada por uma tecnologia (θ) a qual também está subsidiada por uma teoria (Θ). Sintetizando, admite-se que a atividade humana pode ser modelada seguindo uma organização praxeológica, simbolizada por [T, τ, θ, Θ]. Outra noção desenvolvida no âmbito da TAD é a dos objetos *ostensivos* e *não-ostensivos* (Chevallard, 1994; Bosch, Chevallard, 1999). Objeto ostensivo é todo aquele que assume uma forma material como caderno, lápis, diagrama, desenho. Por sua vez, objetos não-ostensivos são aqueles evocados no campo das ideias, dos conceitos, das noções. Portanto, pode-se dizer que determinadas noções matemáticas - como a generalização de uma lei matemática, por exemplo - são acessadas por meio de alguma forma material: uma função, uma sequência numérica, etc.. Ou seja, são utilizados os objetos ostensivos para acessar os não-ostensivos e tal processo se dá na resolução de tarefas, as quais pertencem ao universo da Instituição e, portanto, pertencem ao universo da relação tanto pessoal quanto institucional do indivíduo com o objeto considerado.

Fez-se necessário essa brevíssima descrição teórica para que o leitor possa compreender de que forma será conduzida a discussão dos resultados e, principalmente, possa interpretar o objetivo do trabalho aqui exposto: analisar a relação pessoal dos participantes em relação ao objeto matemático generalização no pensamento funcional e elencar os objetos ostensivos e não-ostensivos relacionados.

A justificativa pelo interesse da autora ao tema fundamenta-se nas ideias defendidas por Mason (1996). O autor é enfático ao afirmar que a generalização é onipresente na Matemática. Para ele, os currículos fornecem o conhecimento generalizado e o professor complementa fornecendo exemplos, os quais, para o estudante, podem ser interpretados como únicos representantes de determinado conteúdo, deixando de ser destacada, assim, a generalização que o subsidia. E Chevallard (1989, 1990) defende o trabalho com modelos matemáticos (modelos, nessa perspectiva, trazem muito de generalização em sua concepção). Para ele, aritmética e álgebra se relacionam de maneira dialética: o domínio para o cálculo algébrico surge dos sistemas numéricos e são as ferramentas desse cálculo algébrico que permite a construção de sucessivos sistemas numéricos. Outra posição adotada pelo autor e que também será evocada para a interpretação dos resultados diz respeito à sua defesa pela postura que leva o aluno a investigar o conhecimento - e não redescobri-lo. Infere-se que adotar essa posição ao investigar o conceito de generalização faz emergir conhecimentos bem genuínos, uma vez que aquele que investiga adota comportamentos diferentes de quem se propõe apenas a redescobrir, ou seja, repetir manifestações já registradas na história da matemática.

Por fim, encerra-se esta sessão trazendo alguns apontamentos colhidos da tese de Mariana Bosch (1994) - trabalho que serviu de motivação e orientação para a escrita deste trabalho. A autora defende que descrever uma relação institucional não é outra coisa que descrever uma técnica. É a técnica que determina a relação que se tem com o objeto. E é aqui o momento da hipótese: se a técnica faz parte tanto da relação pessoal quanto da relação institucional em relação ao objeto *o* (no presente caso, a generalização), o pressuposto é que, a partir da análise dessas técnicas empregadas pelos estudantes, é possível ter amostras a respeito do que eles têm por prática normalizada. Bosch (1994) explica, ainda, que o caráter rotineiro de uma instituição é a realização de tarefas e que, em tarefas naturalizadas, a técnica deixa de parecer como necessária. Portanto, segundo a autora, essa naturalização oculta meios que não são considerados como instrumentos. Mais uma vez lança-se mão da hipótese para supor que a escola não considera a generalização espontânea dos alunos como instrumento e, portanto, não tem controle sobre ela, a ponto de tomá-la como algo naturalizado, comum, corriqueiro. Defende-se que muitas técnicas que supostamente foram dadas como aprendidas, na verdade vieram de uma generalização espontânea. Segundo Bosch (1994), as tarefas rotineiras são soluções para problemas que na verdade não são problemas (pelo menos para a instituição!) e que quando alguma técnica rotineira se torna inadequada há o que ela chama de inércia institucional. Essa inércia tende a ignorar a problematicidade da tarefa para, em seguida, supor que esse fracasso ocorre devido à dificuldade do aluno. Finalizando esse item, julga-se oportuno esclarecer que para Bosch (1994) uma tarefa será sempre uma construção institucional e que depende de técnicas disponíveis na instituição para realizar essa tarefa.

MATERIAL E MÉTODOS

Esse trabalho é uma impressão dos primeiros resultados colhidos os quais subsidiaram uma tese que estava em andamento. Contudo, a ausência das aulas presenciais devido ao período pandêmico à época, alterou os rumos iniciais da pesquisa. Não foi possível aplicar as tarefas no modo idealizado inicialmente. Trabalhávamos em uma escola no estado de Minas Gerais que adotou as ferramentas do ensino remoto.

Contudo, sendo uma escola pública, não se pôde contar com a sincronicidade nas aulas. Explicando: os professores postavam suas tarefas, explicações gravadas, materiais, em um aplicativo desenvolvido pelo governo. Contudo, pouquíssimos estudantes o acessavam no horário das suas aulas. Professores que faziam uso de ferramentas como o *Google Meet* relatavam que praticamente nenhum aluno participa das aulas ao vivo. Assim, precisávamos descobrir novos métodos para nos encontrarmos virtualmente com nossos alunos. A ideia inicial da pesquisa era trabalhar com alunos dos oitavos e nonos anos do Ensino Fundamental. Porém, pouquíssimos interagiam conosco por meio das ferramentas virtuais. Assim, foi preciso alterar planos.

Decidiu-se, então, convidar alguns estudantes de diferentes anos escolares para participar de pesquisa. Assim, fizemos uso do aplicativo *WhatsApp* e entramos em contato com os alunos que demonstravam certa frequência de forma *online*. E o que no início foi um desafio e motivo de grandes preocupações, tornou-se uma excelente oportunidade de investigação e coleta de dados. Como convidamos alunos do 8º, 9º e 1º ano do Ensino Médio, foi percebida certa preponderância em suas respostas que muito ajudaram nos questionamentos, hipóteses e inferências. Durante a discussão dos resultados, no próximo item, serão explorados devidamente esses aspectos.

Dado que o foco de pesquisa se dá em torno da generalização, foi elaborada uma tarefa e apresentada aos alunos por meio de conversas no *WhatsApp* (áudios também). Assim, eles deveriam desenvolvê-la da forma que julgassem mais conveniente e retornar o resultado usando o mesmo aplicativo. Esse alunos não tiveram contato com nenhum outro participante e desenvolveram a tarefa sozinhos. A tarefa elaborada pela primeira autora deste foi enviada a eles por meio de um arquivo *pdf*. Portanto, aqui nesse trabalho, é trazida a discussão dos resultados que colhidos nessa fase.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi enviada aos alunos participantes a questão abaixo (Figura 1), que denominou-se de $Q_{0,}$ no dia 25 de junho do corrente ano.

A escolha desta tarefa se deu por acreditar em seu alto poder de análise: são investigados aqui aspectos que envolvem noção de variável, generalização de ideias e linguagem simbólica.

Q0) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.
Veja as condições dos planos.

PLANO A: paga-se um valor fixo de R$ 170,00 por mês e R$ 50,00 por consulta.

PLANO B: paga-se um valor fixo de R$ 280,00 por mês e R$ 40,00 por consulta.

Qual é o plano mais vantajoso?

Figura 1 – Tarefa aplicada aos participantes.

Fonte: Dados da pesquisa, 2021.

O objeto *o* aqui considerado pertence ao campo da álgebra. Trata-se de noção de função. O plano mais vantajoso depende do número de consultas. O intento foi investigar que tipo de técnica o participante empregaria na resolução. Destaca-se aqui que essa não é uma tarefa rotineira, nos moldes de Bosch (1994), conforme destacado anteriormente. Portanto, supomos de antemão que esse fato já provocaria nos estudantes reações ligadas ao tipo de técnica empregada. Não houve de parte da pesquisadora nenhum tipo de orientação com relação a isso; eles foram estimulados a pensar por conta própria e a devolver o resultado de seu raciocínio. Sete alunos enviaram suas respostas: 3 do oitavo ano, 3 do nono e 1 aluno do 1º ano do Ensino Médio. Esses dados são analisados por meio das iniciais dos nomes desses estudantes. Comecemos pelo três do oitavo ano. Logo a seguir, serão feitas as considerações.

Abaixo, a descrição do relato do aluno M.O.

O A é mais vantajoso a partir do 10 o B a partir do 11 é mais vantajoso.

(Áudio da professora perguntando como ele pensou.)

Eu fui multiplicando os dois até o resultado mudar a longo prazo.

(Áudio da professora perguntando se ele atribuiu valores aleatórios aos planos.)

Sim, comparava o A com o B conforme eu multiplicava.

A próxima aluna, M.R, enviou foto com sua resposta (Figura 2). Logo a seguir vem a transcrição.

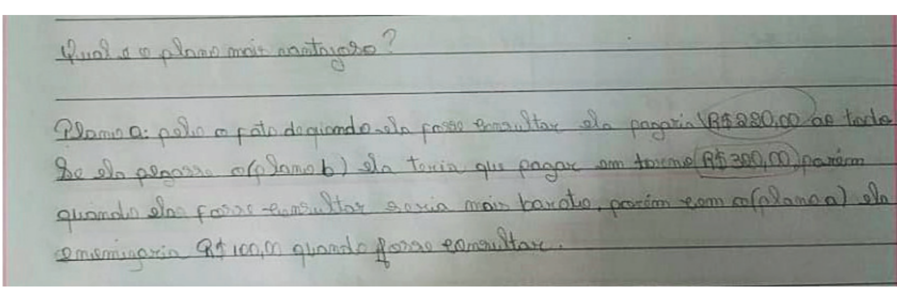

Qual é o plano mais vantajoso?
Plano a: pelo o fato de quando ela fosse consultar ela pagaria R$ 280,00 ao todo
Se ela pegasse o (plano b) ela teria que pagar em torno R$ 300,00 porém
quando ela fosse consultar seria mais barato, porém com o (plano a) ela
economizaria R$ 100,00 quando fosse consultar.

Figura 2 – Protocolo de um estudante.

Fonte: Dados da pesquisa, 2021.

Transcrição: *Plano A: pelo fato de que quando ela fosse consultar ela pagaria R$ 220,00 ao todo. Se ela pagasse o Plano B ela teria que pagar em torno de R$ 300,00, porém quando ela fosse consultar seria mais barato, porém com o plano A ela economizaria R$ 100,00 quando ela fosse consultar.*

Já o aluno J.M fez sua resposta pelo aparelho celular e enviou conforme a imagem seguinte (Figura 3).

Q_0) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.
Veja as condições dos planos.
PLANO A: paga-se um valor fixo de R$ 170,00 por mês e R$ 50,00 por consulta.
PLANO B: paga-se um valor fixo de R$ 280,00 por mês e R$ 40,00 por consulta.
Qual é o plano mais vantajoso?

Plano (A) seria o mais barato obviamente, somando mensalidade e consulta comparado ao plano (b), porém nem sempre o mais barato é o melhor plano, depende de cada pessoa escolher o plano desejado...

Figura 3 – Protocolo de um estudante.

Fonte: Dados da pesquisa, 2021.

Até então foi possível perceber que esses estudantes do oitavo ano lançaram mão de técnicas da aritmética. O primeiro deles comparou resultados por meio de tentativa (e se aproximou do resultado correto). Os outros dois somaram os valores que apareceram no enunciado. Julga-se que esses alunos fizeram uso de procedimentos aritméticos, preocupando-se em utilizar os valores que foram propostos, que estavam à vista. Bosch (1994, p. 68) explica em sua tese que o desenvolvimento da aritmética carrega consigo traços de discursos feitos na língua materna, numa espécie de tradução literal de uma situação. Assim, os objetos que compõem a tradição aritmética provêm de um trabalho discursivo, de uma oralidade. Para ela existe uma reação natural à chegada dos símbolos algébricos, uma vez que seria preciso clarear as fórmulas por meio de um discurso inteligível. Contudo, esse discurso oral da aritmética perde terreno quando se tem contato com novas técnicas que recorrem cada vez mais ao trabalho escrito. Portanto, até aqui fica claro que a ausência de novas técnicas dificultou a compreensão da tarefa, uma vez que o discurso aritmético, nesse caso, tornou-se inviável (embora os dois alunos não tenham percebido).

A seguir, observemos as respostas dos alunos do nono ano. O estudante V.H fez observações interessantes. Transcrevemos a seguir o diálogo.

Karina, na verdade tem um problema.

Diga.

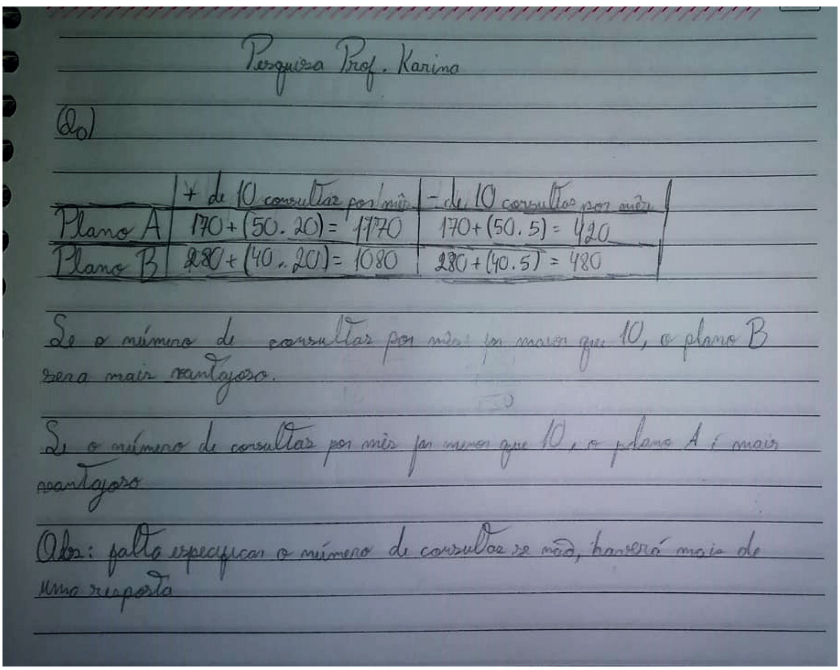
Não está especificado se ele quer por exemplo: se ele quer a diferença entre cada uma indo nas consultas todos os dias, ou numa quantidade já prescrita.

Isso é uma boa observação mesmo!

Pois dependendo da quantidade de dias que se usa, o plano A vai ser mais vantajoso que o B.

Escreve para mim por favor.

Na figura 4, a seguir, pode-se verificar como o aluno desenvolveu sua tarefa.



Pesquisa Prof. Karina

Q6)

	+ de 10 consultas por mês	- de 10 consultas por mês
Plano A	170+(50.20)= 1170	170+(50.5) = 420
Plano B	280+(40.20)= 1080	280+(40.5) = 480

Se o número de consultas por mês for maior que 10, o plano B sera mais vantajoso.

Se o número de consultas por mês for menor que 10, o plano A é mais vantajoso

Obs: falta especificar o número de consultas se não, haverá mais de uma resposta

Figura 4 – Protocolo de um estudante

Fonte: Dados da pesquisa

Ele entendeu que aqui a solução depende do número de consultas. Esse conceito de relação funcional, um objeto não-ostensivo, precisa de determinadas técnicas para vir à tona, os objetos ostensivo adequados. No trabalho de Kieran *et al.* (2016, p.5) encontramos uma definição de pensamento algébrico citado de Blanton e Kaput (2004): é a capacidade do aluno de construir, justificar e expressar conjecturas sobre determinadas relações e estruturas matemáticas. Portanto, pode-se dizer que ele fez uso do que vamos chamar aqui de um "discurso algébrico", pois o aluno já fez uso das ideias de variável. Ou seja, ele demonstra compreender noções que podem ser traduzidas pela linguagem simbólica da álgebra mas utilizou um discurso aritmético para justificá-lo. Observe na figura 4 que ele usa uma expressão aritmética para demonstrar o seu pensamento.

Agora o raciocínio do aluno P. H. Ele afirma que o plano A é mais vantajoso. Figura 5.

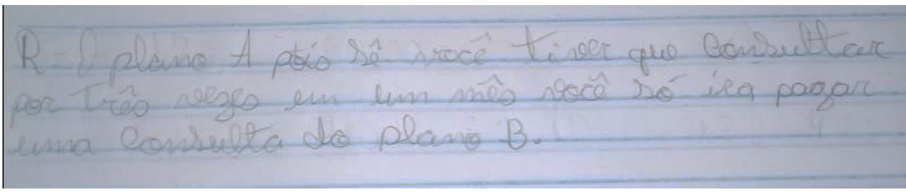

R- O plano A pois se você tiver que consultar por três vezes em um mês você só irá pagar uma consulta do plano B.

Figura 5 – Protocolo de um estudante

Fonte: Dados da pesquisa, 2021

A seguir, a justificativa do aluno.

Bom primeiro eu calculei a soma das parcelas de cada alternativa e depois calculei caso a pessoa tivesse que pagar a consulta três vezes, então eu vi que se eu fizer o plano A eu vou conseguir consultar três vezes que é o valor que eu iria gastar em só uma consulta do plano B.

P.H percebeu que o plano mais vantajoso depende do número de consultas e também justificou sua escolha por meio do que está sendo chamado aqui de discurso algébrico. Ele identificou a presença da variação nos resultados e utilizou ferramentas da aritmética na justificativa.

Pelo modelo praxeológico citados anteriormente, tarefas são executadas por meio de técnicas. Essas técnicas são justificadas por meio do que o autor chama de tecnologia. Até aqui foi visto que os estudantes utilizaram técnicas do cálculo aritmético e a justificam por meio dos cálculos numéricos.

Por fim, a resposta do aluno G.S, do 1º ano do Ensino Médio.

Plano A. Se pensamos financeiramente o plano A é o mais vantajoso por obviamente ser o mais barato em pagamento mensal, mas a qualidade do plano no geral pode ser ruim pelo preço ser menor, sendo que a consulta do plano A pode ser melhor do que o plano B por ser mais caro o valor. O pagamento mensal do plano B é mais caro e pode ter mais qualidade como assistência médica melhor ou acessos fáceis e ser também vantajoso pela qualidade.

O modo de pensar desse aluno conduz ao questionamento sobre a importância de conhecer de que forma o estudante interpreta as situações que lhe são propostas. Percebe-se que ele analisou a situação sob um prisma, diríamos, mais cotidiano. Ele não se preocupou em utilizar recursos matemáticos, limitou-se a afirmar que planos mais caros costumam oferecer mais vantagens a seus clientes. Conjectura-se então que tal fato se deu devido à maturidade do aluno e ao fato de estar mais inteirado da rotina financeira do dia a dia.

Nesse momento é conveniente dizer que Bosch e Chevallard (1999) lembram que é um equívoco considerar que os estudantes percebem os objetos ostensivos de forma natural. Eles precisam ser apresentados, construídos juntos aos estudantes. Kieran *et al.* (2016, p.15) também é categórica ao afirmar que para desenvolver o pensamento algébrico é preciso trabalhar intencionalmente para isso desde as primeiras séries e que ele não é desenvolvido naturalmente por meio do currículo.

A respeito do discurso oral que acompanha a aritmética mencionado anteriormente no trabalho de Bosch (1994), Chevallard (1989, p. 29) também fala que a ferramenta essencial da aritmética é a linguagem comum. Já a álgebra fornece um meio mais poderoso. A aritmética fica presa no conhecimento oral e confia ao papel apenas a realização de operações em números. Por isso não vai muito além dos problemas de primeiro grau. Segundo o autor, a introdução dos parâmetros muda a modelagem aritmética, onde há enunciados de linguagem comuns, para uma modelagem algébrica em que as instruções pedem expressões literais, simbólicas, nas quais o cálculo algébrico opera.

Chevallard (1989) afirma ainda que, para se fazer álgebra, é necessário pensar algebricamente, fazendo uso apenas dos seus símbolos, sem recorrer às “traduções” aritméticas ou discursivas.

CONCLUSÃO

Pelo que foi visto até aqui, pensamos que esses alunos fizeram uso de uma espécie de “discurso algébrico”, ou seja, uma tentativa de resolver uma situação que pode ser traduzida por técnicas algébricas (uma função, por exemplo) porém pelas ferramentas da aritmética.

No entanto, o tema de interesse maior é a generalização algébrica. Por meio desse pequeno trabalho conjecturamos que um dos níveis que a compõem é esse discurso já imbuído de algum pensamento algébrico mas que necessita de justificativas a nível aritmético.

Percebe-se também que a aplicação de uma tarefa não rotineira fez vir à tona pensamentos bem genuínos dos estudantes, os quais utilizaram técnicas que vão da soma dos valores vistos (ostensivos utilizados), passam pela tentativa, até chegarem nas ideias de variação (não-ostensivos). Não se trata, portanto, de uma dificuldade dos alunos, mas de uma manifestação de como se dá sua relação pessoal com o objeto estudado.

Esse trabalho molda-se na investigação de uma situação atual, ou seja, não fizemos intervenções. Assemelha-se a uma tarefa diagnóstica. E percebemos que esses estudantes lidaram não só com alguns vestígios da aritmética, mas apoiaram-se nela para manifestar seu pensamento algébrico. Deixamos aqui nossa aposta na pertinência e atualidade do tema e nosso compromisso de contribuir sempre mais com os estudos e pesquisas da área.

REFERÊNCIAS

BOSCH, M. **La dimensión ostensiva em la actividad matemática: el caso de la proporcionalidad.** 1994. 476 fls. Dissertação (Doutorado em Ciências-Matemática) – Universidade de Barcelona, Barcelona, 1994.

BOSH, M., CHEVALLARD, Y. .La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble: La Pensé Sauvage-Éditions, v.19, n°1, p. 77 – 124, 1999.

CASTRO, K.O. **Generalização algébrica**: uma abordagem praxeológica. 2022. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2022. Disponível em: https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/48261 Acesso em: 28 fev. 2024.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans des mathématiques aucollège - deuxiemepartie. Perspectives curriculaires : La notion de modelisations.** 1989. Disponível em: https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR89002/IGR89002.pdf. Acesso em: 12 ag. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans des mathématiques au collège – Troisième partie. Voies didactiques et problèmes didactiques.** 1990. Disponível em: https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR90001/IGR90001.pdf. Acesso em: 12 ag. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans des mathématiques aucollège - deuxiemepartie. Perspectives curriculaires : La notion de modelisations.** 1989. Disponível em: https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR89002/IGR89002.pdf. Acesso em: 12 ag. 2020.

CHEVALLARD. Yves. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique.** 1994. Disponível em:http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125 Acesso em: 16 jun 2021.

KIERAN, C. *et al*. **Early Algebra:** research into its nature, its learning, its teaching**.** Switzerland**:** Springer Nature, 2016. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32258-2. Acesso em: 06. Jun. 2020

MASON, J. **Expressing generality and roots of álgebra.** 1996. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/279402143_Expressing_Generality_and_Roots_of_Algebra. Acesso em: 13 jun. 2020.