

A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PESQUISA HISTÓRICA

Data de aceite: 01/04/2024

Pablo Ernandes Alves Santos

Graduando em Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Tocantins

Gabriella Stephany Camargo Pimenta

Graduando em Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Tocantins

Rosângela Costa Bandeira

Professora Esp. Instituto Federal do Tocantins

RESUMO: Este artigo científico explora o desenvolvimento histórico dos Números Complexos. A criação desse conjunto numérico, frequentemente associada erroneamente à resolução de equações quadráticas, é revisada para revelar sua verdadeira origem e propósito, especialmente na resolução de equações cúbicas. O texto destaca uma lacuna no processo de ensino, sobretudo no ensino médio, evidenciando a resistência dos professores em abordar os Números Complexos. A falta de aplicação concreta e a remoção do tema do currículo após a implementação da Base Nacional Comum Curricular em 2018 são discutidas, enfatizando a importância de uma

aprendizagem significativa que conecte os conceitos matemáticos ao cotidiano dos alunos. A dificuldade de compreensão dos Números Complexos, devido ao alto nível de abstração, é abordada, destacando a Unidade Imaginária como um ponto crítico. Diante desse cenário, o objetivo do trabalho é desmistificar a história dos Números Complexos, revelando suas aplicações na realidade e revisando suas propriedades fundamentais. A metodologia adotada inclui uma pesquisa histórica baseada em produções acadêmicas de diversos autores, visando uma compreensão mais clara do presente e uma melhor previsão do futuro no campo da Matemática. O artigo propõe seguir um percurso histórico dos Números Complexos no desenvolvimento subsequente do trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Números Complexos. História. Aplicações. Propriedades.

THE EVOLUTION OF COMPLEX NUMBERS: A HISTORICAL RESEARCH

ABSTRACT: This scientific article explores the historical development of Complex Numbers. The creation of this numerical set, often erroneously associated with the resolution of quadratic equations, is revisited to unveil its true origin and purpose, particularly in solving cubic equations. The text highlights a gap in the teaching process, especially in high school, revealing teachers' reluctance to address Complex Numbers. The lack of concrete application and the removal of the subject from the curriculum after the implementation of the National Common Curricular Base in 2018 are discussed, emphasizing the importance of meaningful learning that connects mathematical concepts to students' daily lives. The difficulty in comprehending Complex Numbers due to their high level of abstraction is addressed, emphasizing the Imaginary Unit as a critical point. Given this scenario, the objective of the work is to demystify the history of Complex Numbers, revealing their real-world applications, and reviewing their fundamental properties. The adopted methodology includes a historical research based on academic productions from various authors, aiming for a clearer understanding of the present and better predictions for the future in the field of Mathematics. The article proposes to follow a historical path of Complex Numbers in the subsequent development of the work.

KEYWORDS: Complex Numbers. History. Applications. Properties.

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da Matemática, e das ciências em geral, advém das necessidades da espécie humana, da insuficiência dos paradigmas de cada época. Com os Números Complexos não foi diferente. Porém, os verdadeiros motivos pelos quais este conjunto numérico foi criado, na maioria dos casos, não são expostos durante o processo de ensino, já que sua criação é, erroneamente, associada à resolução de equações quadráticas, deixando de lado a resolução de equações cúbicas (discutiremos mais à frente).

Ainda no processo de ensino, principalmente durante o ensino médio, era notório um fator limitante para a aprendizagem dos conceitos relacionados aos Números Complexos, assim como Júnior (2009, p.8) expõe em sua dissertação:

É frequente percebermos, entre os professores de matemática, uma resistência em abordar este tema. Embora conheçam a teoria, que envolve definições, operações e as diferentes formas de representar estes números, eles parecem tímidos quanto à legitimidade de se ensinar este tópico, o que vêm provocando a sua eliminação prática de muitos currículos escolares. Muitos justificam este movimento por uma falta de aplicação concreta dos números complexos e pouco se discute sobre a importância destes entes matemáticos no desenvolvimento da própria ciência.

Esta falta de aplicação concreta pode ter sido um dos fatores determinantes para a remoção dos Números Complexos do ensino básico, após o advento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018, ainda que o real motivo não seja citado no documento (CEDRON, 2021, p.10). De fato, uma aprendizagem significativa ocorre quando o aluno consegue enxergar além da sala de aula, relacionando os diferentes conteúdos estudados

com seu cotidiano. “Onde usarei isso na minha vida?” é uma das perguntas mais feitas aos professores de Matemática.

Outra problemática envolvendo os Complexos¹ é a dificuldade de apreensão dos conceitos devido ao nível de abstração necessário, principalmente no que tange a Unidade Imaginária, que será apresentada nas próximas seções. Ora, os próprios números Reais são de um considerável grau de abstração por não possuírem, como defendem alguns teóricos da Filosofia da Matemática, nenhuma relação causal conosco. Esta situação somada à falta de aplicabilidade do conteúdo, pode ter gerado a já mencionada remoção do conteúdo do ensino médio. Só no ensino superior é que somos introduzidos ao conjunto dos Números Complexos.

Em face do exposto, este trabalho tem como objetivo desmistificar a história dos Números Complexos, expor suas principais aplicações na Realidade e revisar algumas de suas propriedades fundamentais. Para tal, o percurso metodológico adotado parte de uma pesquisa histórica ancorada nas produções acadêmicas de diversos autores. Para Sigelmann (1984, p.144), a pesquisa histórica

[...] está interessada na determinação, avaliação e compreensão de eventos passados com o propósito primordial de obter compreensão mais clara sobre o presente e melhor previsão do futuro. É uma investigação crítica de eventos, desenvolvimentos e experiências do passado, análise cuidadosa da validade das fontes de informação sobre o passado e interpretação da evidência à luz de pressupostos teóricos.

Tendo estabelecido os objetivos e métodos, sigamos para o desenvolvimento, no qual faremos o percurso histórico dos Números Complexos.

DESENVOLVIMENTO

A História nem sempre é contada da forma como realmente aconteceu. Partes são adulteradas ou esquecidas na medida em que o tempo avança. Um dos exemplos mais famosos na História da Matemática é a associação da criação dos Complexos à resolução de equações quadráticas. A verdadeira história por trás desta origem é bem diferente.

DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES CÚBICAS

Nosso passeio começa por volta do ano de 1510, na Itália. Um matemático chamado Scipione Del Ferro havia encontrado uma forma de resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, com p e q positivos. Porém, não publicou seus resultados, mostrando-os apenas para alguns amigos bem próximos. Ele nasceu na cidade de Bolonha, em 1465. Filho de Floriano e Filippa Ferro, estudou na Universidade de Bolonha, onde foi nomeado professor de Aritmética e Geometria em 1496. Faleceu em 1526, com 61 anos.

1. O termo “Complexos” será utilizado no decorrer do artigo para se referir aos Números Complexos.

Entre esses amigos próximos, estava seu aluno Antonio Maria Fior. Possuindo do conhecimento que permitia resolver equações cúbicas daquele tipo, Fior desafia Nicolo Fontana (1550 – 1557), que era conhecido como Tartaglia (gago) pois, na infância, foi gravemente ferido com golpes de sabre, principalmente na região da boca, causando-lhe defeitos permanentes na fala. O desafio consistiu em resolver equações de terceiro grau. O que Fior não esperava, é que Tartaglia não só conseguiria resolver as equações propostas, como também, encontrar a fórmula resolutive de Del Ferro, enquanto Fior não conseguiu resolver nenhuma das equações propostas, uma vez que as equações de Tartaglia eram do tipo $x^3 + px^2 = q$ (JÚNIOR, 2009, p. 13).

Ciente dos acontecimentos envolvendo este duelo, um novo nome entra na história dos Números Complexos: Girolamo Cardano (1501 – 1576). Ele propõe a Tartaglia que lhe contasse a fórmula resolutive das equações cúbicas, a fim de publicá-la, com a devida autoria, em sua obra *Pratica Arithmeticae* (1539). Tartaglia não aceitou a proposta, já que tinha a intenção de publicar sua descoberta por conta própria. Porém, após muito insistir, Cardano finalmente obtém a fórmula sem a demonstração e a publica, sem autorização, em sua obra *Ars Magna* (1545). Ele acabou demonstrando-a mais tarde, de modo semelhante à demonstração que se segue:

Partamos da equação do tipo $x^3 + px + q = 0$.

Agora, fazendo x ser a soma de duas parcelas, ou seja, $x = u+v$, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}(u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0\end{aligned}$$

Suponha que u, v e p são tais que $3uv + p = 0$, então obtemos as seguintes relações:

$$u^3 + v^3 = -q \text{ e } u^3v^3 = \frac{-p^3}{27}$$

Sabemos a soma e o produto dos números u^3 e v^3 , portanto, podemos considerá-los como sendo raízes da seguinte equação do segundo grau:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

Conclui-se que

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Estes são os valores de u^3 e v^3 . Como $x = u + v$,

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}$$

E assim x fica determinado (JÚNIOR,2009, p. 20).

DAS RAÍZES QUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Cardano conseguiu, então, demonstrar a fórmula resolvente de equações do terceiro grau. Contudo, surgiu um novo desafio. O matemático italiano Rafael Bombelli se depara com a seguinte equação cúbica em seu livro intitulado *Álgebra*: $x^3 = 15x + 4$. Aplicando a fórmula já demonstrada por Cardano, Bombelli obteve o seguinte valor para x:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}\right)}$$

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$$

Bombelli sabia que havia três números reais que satisfaziam essa equação, que são 4, $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$. O que tornou o problema intrigante foi o fato de aparecerem raízes reais a partir de uma fórmula que faz aparecer raízes quadradas de números negativos. Assim como na descoberta dos incomensuráveis (Irracionais) na antiga Grécia, o ser humano estava diante de uma nova “crise” na matemática; a crise dos Complexos.

Diante deste achado, Bombelli foi o primeiro matemático disposto a aceitar a existência de um novo tipo de número, mesmo que o termo número imaginário tenha sido adotado por René Descartes. Sua capacidade de manipular os números imaginários foi o que validou a aplicabilidade da fórmula de Cardano. Como declara Junior (2009, p.27):

Bombelli conseguiu enxergar que os valores complexos dos radicais $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})}$ e $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$ deveriam ser relacionados com os próprios radicais, ou seja, eles deveriam diferir apenas no sinal. Bombelli sabia que 4 era uma solução da cúbica mencionada acima, exibindo o fato extraordinário de que números reais poderiam ser obtidos através de operações com expressões contendo números imaginários.

Porém, como encontrar a raiz 4 dessa equação através destas duas parcelas já conhecidas? Segue o possível método utilizado pelo matemático italiano.

Consideremos $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} = a + b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} = a - b\sqrt{-1}$ com $a > 0$ e $b > 0$ ainda não conhecidos. Sendo assim, a relação implica que: $2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3 = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1}$.

Dessa igualdade, segue que $a(a^2 - 3b^2) = 2$ e $b(3a^2 - b^2) = 11$. Se as soluções forem inteiras, a primeira dessas condições nos diz que deve ser igual a 1 ou 2, e a segunda condição nos diz que tem valor 1 ou 11. Como apenas as opções $a = 2$ e $b = 1$ satisfazem a ambas simultaneamente, obtemos as igualdades:

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3 \text{ e } 2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3$$

Podemos concluir que uma das soluções para a equação cúbica $x^3 + 15x + 4$ é dada por:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} \\ x &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ x &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}). \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Perceba que ao manipular essas expressões, surge um termo especialmente curioso, o $\sqrt{-1}$. Foi o matemático e cientista suíço Leonhard Euler (1707-1783) que substituiu este termo por uma letra do alfabeto, o i , que ficou conhecida como Unidade Imaginária. Além desta contribuição significativa, ele foi o primeiro a estudar os números da forma $z = a + bi$, com a e b reais, que veremos com mais rigor a seguir. Estes receberam o nome de Números Complexos (CEDRON, 2021, p.16).

O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O surgimento dos números complexos representou uma revolução na compreensão matemática, desafiando concepções tradicionais e demandando uma formalização cuidadosa. Dada a natureza única desse novo conjunto numérico, contendo uma componente imaginária representada por $\sqrt{-1}$ ou i , os matemáticos perceberam a necessidade de estabelecer uma base teórica sólida para os números complexos. Foi o trabalho notável do já citado Leonhard Euler, entre outros, que proporcionou uma formalização rigorosa desse conjunto, tratando números complexos como entidades algébricas que envolvem uma parte real e uma parte imaginária. Essa formalização não apenas consolidou a aceitação dos números complexos na matemática, mas também estabeleceu as bases para uma compreensão mais profunda das relações entre números reais e imaginários. A seguir, veremos como os complexos ficaram definidos.

O conjunto dos números complexos, denotado por \mathbb{C} , consiste em pares ordenados de números reais nos quais são definidas as operações de igualdade, adição e multiplicação. Comumente, utiliza-se a letra para representar um complexo, assim:

$$z \in \mathbb{C} \leftrightarrow z = (a, b), \text{ sendo } a, b \in \mathbb{R}$$

Para a sequência, é importante que saibamos sobre as três importantes definições citadas.

1) *Igualdade*: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, possuírem primeiros termos iguais e segundos termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

1) *Adição*: chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

2) *Multiplicação*: chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Outra importante definição é a de Unidade Imaginária, já mencionada anteriormente. Chamamos Unidade Imaginária (i) o número complexo $(0, 1)$.

Perceba que:

$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$, sendo esta a principal propriedade da unidade imaginária.

Ademais, como definido, todo complexo pode ser representado por um par ordenado de números reais, ou seja, $z = (a, b)$. Assim, temos:

$$z = (a, b)$$

$$z = (a, 0) + (0, b)$$

$$z = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$z = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Como a unidade imaginária é representada pelo par ordenado $(0, 1)$, temos que:

$$z = a + bi$$

Na qual a é chamada parte real de z , e b é chamada de parte imaginária de z .

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM COMPLEXO

Outro meio de representar um número complexo é por sua forma trigonométrica. Para isso, precisamos ter em mente duas definições:

1) *Módulo*: Chama-se módulo ou valor absoluto de um complexo $z = a + bi$ ao número real não negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Também usamos a letra grega ρ (rô) para representar o módulo.

2) Argumento: Chama-se argumento de um complexo $z = a + bi$, não nulo, ao ângulo θ tal que

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho}, \text{ em que } \rho = |z|$$

Destas relações decorre que $a = \rho \cos \theta$ e $b = \rho \operatorname{sen} \theta$. Como a forma algébrica é $z = a + bi$, ao substituir, temos:

$$z = \rho \cos \theta + \rho \operatorname{sen} \theta \cdot i$$

$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

E esta é chamada de forma trigonométrica ou polar de z .

APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O processo educacional é uma jornada gradual que está intrinsecamente ligada à maneira como os conteúdos são abordados, tanto pelos educadores quanto pelos estudantes. Para que a aprendizagem alcance significado, é imperativo estabelecer uma vinculação com a realidade, promovendo uma conexão genuína com os objetos e situações do cotidiano. Uma abordagem fundamentada em exemplos concretos tende a ser mais eficaz durante os estágios de assimilação e acomodação de conceitos nas estruturas cognitivas individuais de cada aluno.

Para Valadares (2011),

Quando uma nova informação é relacionada (de um modo sistemático e concreto) com um subsunçor que o aprendiz já possui, essa nova informação passa a ter significado para ele, um significado que é o seu, mais ou menos próximo ou afastado do chamado significado científico, ou seja, aquele que é comungado pelos membros da comunidade que domina cientificamente essa nova informação.

Neste contexto, é de fundamental importância expor as aplicações dos números complexos na realidade, uma tarefa que foi desafio para uma grande parcela de educadores.

Complexos na engenharia eletromagnética

Os números complexos são ferramentas matemáticas poderosas que podem ser usadas para resolver muitos problemas em engenharia eletromagnética. São especialmente úteis na representação de campos elétricos e magnéticos, permitindo que os engenheiros combinem as componentes real e imaginária de um campo em uma única expressão:

$$E = E_1 + iE_2$$

Onde:

- E_1 é a componente real do campo elétrico
- E_2 é a componente imaginária do campo elétrico

Outra aplicação chave dos números complexos na engenharia eletromagnética é a resolução das equações de Maxwell, que descrevem o comportamento de campos elétricos e magnéticos no espaço e no tempo. Essas equações formam um sistema complexo de quatro equações diferenciais parciais que são difíceis de resolver analiticamente. No entanto, os números complexos oferecem uma maneira de transformar as equações de Maxwell em um sistema mais manejável de equações lineares, que podem ser resolvidas usando técnicas de análise complexa.

Complexos na física

Na física quântica, os números complexos desempenham um papel fundamental na representação e análise das funções de onda associadas a partículas subatômicas, como elétrons e fótons. Estas funções de onda fornecem uma descrição probabilística da localização de uma partícula em um determinado ponto no espaço. A equação de Schrödinger, considerada a pedra angular da mecânica quântica, é uma equação diferencial parcial que modela o comportamento dessas funções de onda. A expressão complexa desta equação facilita sua resolução, simplificando o tratamento matemático.

Além disso, os números complexos são empregados na física quântica para representar operadores, entidades matemáticas que descrevem o comportamento das partículas subatômicas. O operador de energia, por exemplo, é utilizado para quantificar a energia associada a uma determinada partícula. Em aplicações mais específicas, os números complexos são utilizados de maneiras diversas: na determinação da probabilidade de encontrar um elétron em uma posição específica em um átomo, na avaliação da energia de um elétron através do operador de energia, e no cálculo da probabilidade de interação entre partículas subatômicas por meio do produto interno das funções de onda correspondentes. Essas aplicações ilustram a versatilidade e a eficácia dos números complexos como ferramentas essenciais na compreensão e modelagem dos fenômenos quânticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo tomou como missão auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem dos números complexos com uma abordagem histórica e material. Como vimos, este enfoque não apenas facilita a compreensão, mas também promove a retenção duradoura do conhecimento, fornecendo uma base sólida para o desenvolvimento contínuo do aprendizado. A análise histórica nos proporciona uma visão esclarecedora do processo de construção do conhecimento, contextualizando cada descoberta dentro das circunstâncias de sua época. Ao compreender esse processo, os alunos percebem que o conhecimento

não surge de maneira autônoma, mas é forjado através de interações complexas e influências específicas. Essa compreensão profunda ressalta que nenhum conhecimento é causa de si, eliminando a noção de acaso e realçando a importância de examinar as raízes e os fatores que contribuem para a formação de ideias e descobertas.

Ademais, destaca-se a abordagem material no processo educacional. Ao conectar os eventos históricos aos materiais de estudo tangíveis, proporciona-se aos alunos uma experiência mais imersiva e significativa. A contextualização por meio de materiais concretos não apenas enriquece a compreensão do passado, mas também estabelece pontes sólidas entre teoria e prática. Essa abordagem material não apenas torna o conhecimento mais acessível, mas também inspira uma apreciação mais profunda das complexidades do desenvolvimento do conhecimento ao longo do tempo. Dessa forma, ao reconhecer a importância do contexto histórico e adotar uma abordagem material, a educação se transforma em uma jornada envolvente, capacitando os alunos a apreciarem a interconexão entre o conhecimento, eventos históricos e o mundo que os cerca.

REFERÊNCIAS

BOMBELLI, R. **L'Algebra**. (1972). G. Rossi. Bolonha, 1579.

BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CARDANO, G. **Ars Magna**. Massachusetts Institute of Technology, 1968.

CEDRON, Lucas Wurster. **Números complexos: um estudo de suas aplicações**. 2021.

COSTA, J. M.; MELO, J. A. C. Aplicação de números complexos em engenharia eletromagnética. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 3, p. 377-390, 2006.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar – Complexos, polinômios e equações**. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 6.

JÚNIOR, Ulício Pinto. **A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS: “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”**. 2009.

NAHIN, P. J. **An imaginary tale**. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1998.

PINTO, José Eustáquio; LAUDARES, João Bosco. Objeto de Aprendizagem de Números Complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 3, 2016.

SIGELMANN, Elida. Tipos de pesquisa: aspectos metodológicos específicos. **Arquivos Brasileiros de Psicologia**, v. 36, n. 3, p. 141-155, 1984.

VALADARES, Jorge. A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 1, p. 36-57, 2011.