CAPÍTULO 5

DO TRIÂNGULO RETÂNGULO ESTÁTICO PARA O CICLO TRIGONOMÉTRICO: PROPOSTA PARA ENSINAR TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 01/02/2024

Paulo Ferreira do Carmo
Universidade Federal de Mato Grosso – Campus Universitário do Araguaia

Jordanna Souza Rocha
Universidade Federal de Mato Grosso – Campus Universitário do Araguaia

RESUMO: A justificativa para o estudo da trigonometria na educação básica é baseada na sua aplicação em diversas áreas de conhecimento, pesquisas indicam que o professor deve planejar suas aulas explorando diversos registros de representação de conceitos trigonométricos com o intuito de favorecer a aprendizagem do assunto. Diversas pesquisas relacionadas ao tema apontam problemas de aprendizagem afirmando que seu estudo é baseado na memorização de fórmulas e em regras para a resolução de exercícios, em geral, sem relação com o cotidiano dos alunos. Esta comunicação tem por objetivo compartilhar uma sequência didática para o ensino de trigonometria abordando os seguintes tópicos: razões trigonométricas, ciclo trigonométrico, funções periódicas (função seno) e resolução de problemas recorrendo a utilização de materiais concretos com o intuito de potencializar a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio. Para a elaboração da sequência didática recorremos a preceitos da teoria dos níveis de pensamento geométrico (VAN HIELE, 1984) e da Teoria de Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009) e para o desenvolvimento das atividades propostas na sequência didática sugerimos a utilização da metodologia de ensino Resolução de Problemas.

PALAVRAS-CHAVE: Trigonometria; Razões Trigonométricas; Função Seno.

INTRODUÇÃO

A trigonometria está presente em vários campos do saber como por exemplo, na engenharia, na música, na física, na eletricidade e em quase todo evento que ocorre de forma periódica. Para que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los. Desta maneira o conteúdo de trigonometria se mostra ideal para atender estes requisitos, pois este se trata de um ramo da geometria onde comumente trabalha-se com números irracionais, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

De acordo com documentos oficiais (PCN, BNCC e orientações curriculares), devido a sua tamanha presença em diversas áreas e pela sua capacidade de aprofundar a noção de número e estimular o caráter investigativo dos alunos, podemos dizer que o ensino e a aprendizagem de trigonometria são significativamente importantes na educação básica.

Porém quando falamos sobre trigonometria nos deparamos com algumas dificuldades que são apresentadas no decorrer do ensino e que acarretam consequências na aprendizagem dos alunos. Acredita-se que parte dessas dificuldades são causadas pela forma de como esse conteúdo é abordado na educação básica.

Segundo Oliveira (2013, p. 82) “o professor deve ter conhecimento das propostas curriculares vigentes para garantir ao seu aluno acesso ao conhecimento básico que se espera desta fase de escolarização”. Esse conhecimento por parte do professor é significativo para o modo de como ele ensina trigonometria para seus alunos, visto que:

> Os obstáculos relacionados ao ensino de matemática decorrem em parte, de um ensino baseado em transmissão mecanizada dos conteúdos descontextualizados e pouco desafiadores de pensamento e à inteligência dos estudantes (OLIVEIRA, 2013, p. 85).

De acordo com algumas pesquisas, o estudo da trigonometria se baseia na memorização de fórmulas e regras para a resolução de exercícios, que no geral, são totalmente desarticulados do cotidiano dos alunos. Na pesquisa de Mota *et al.* (2013), os autores apontam algumas dificuldades por parte dos alunos na identificação de elementos do triângulo e na compreensão do significado das razões trigonométricas.

Vários assuntos dentro da trigonometria necessitam do uso de instrumentos manipuláveis, como a construção de triângulos, ângulos, ciclo trigonométrico, entre outros. Na pesquisa de Santos *et al.* (2016) foi detectado que seus sujeitos de pesquisa (alunos da educação básica) apresentaram dificuldades em traçar formas geométricas e seus ângulos devido às inabilidades em trabalhar com os instrumentos manipuláveis, como esquadro, régua, compasso e transferidor.

Na pesquisa de Ramos *et al.* (2014), os autores sugerem que as aulas deveriam ser planejadas recorrendo a utilização de materiais concretos, problemas e desafios, de modo a evitar atividades repetitivas, já que a repetição apenas leva ao domínio do procedimento pela memorização e não pela aprendizagem.

Para Oliveira (2013, p. 80)

> Estas propostas e orientações sugerem que sejam asseguradas as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondam a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo do triângulo retângulo, do triângulo qualquer, na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas.

O professor é o principal agente que faz a mediação entre os alunos e o conteúdo a ser estudado, com isso ele tem o poder de encorajá-los ou desencorajá-los, e com um planejamento de aula, de acordo com as necessidades de seus alunos, ele pode estimular o pensamento, o questionamento e discussão de ideias para resolver problemas, favorecendo a compreensão do assunto. Além disso, o professor pode trazer o conteúdo de matemática de maneira interligada para a vida não só do aluno como também de todo grupo social ao qual ele pertence.

Para Oliveira (2013, p. 12):

> Considerando a trigonometria um dos tópicos da matemática rico em aplicações práticas que envolvem várias áreas de atuação humana, podemos utilizar disto para enriquecer as aulas com atividades práticas que permitam ao estudante compreender a importância dos conteúdos de trigonometria para o desenvolvimento de algumas profissões, além de proporcionar a integração de outros componentes curriculares.

Visto tais dificuldades tanto por parte do ensino quanto da aprendizagem sobre este tema, algumas propostas de ensino são abordadas para que se potencialize essa capacidade de ensinar e aprender. Com base nisso, e observando essas dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, faz-se a justificativa deste estudo.

De acordo com os documentos oficiais no Ensino Fundamental - Anos Finais, deve-se colocar em foco, quanto a unidade temática geometria, as análises de ampliações e reduções de figuras planas no sentido de incrementar os conceitos de congruência e semelhança. Sendo assim, as razões trigonométricas mostram-se uma ferramenta conveniente para auxiliar na identificação de figuras congruentes ou semelhantes, visto que duas figuras são semelhantes se, e somente se, seus ângulos (e consequentemente suas razões trigonométricas) são iguais.

Baseado nessas pesquisas e nos documentos oficiais esta comunicação tem por objetivo compartilhar uma sequência didática para o ensino de trigonometria abordando os seguintes tópicos: razões trigonométricas (conceito e aplicações), ciclo trigonométrico e funções periódicas (função seno e função cosseno) e resolução de problemas recorrendo a utilização de materiais concretos com o intuito de potencializar a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio.

Utilizaremos o termo sequência didática, de acordo com Zabala (1998, p. 18) que diz: "são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

De acordo com Bini (1977 *apud* ZABALA, 1998, p. 54) a sequência do modelo tradicional, que esse autor denomina circuito didático dogmático, seria formada por 4 fases:

> (1) comunicação da lição; (2) estudo individual sobre o livro didático; (3) repetição do conteúdo aprendido (numa espécie de ficção de haver se apropriado dele e o ter compartilhado, embora não se esteja de acordo com ele), sem discussão nem ajuda recíproca; (4) julgamento ou sanção administrativa (nota) do professor ou da professora.

De acordo com as pesquisas supracitadas, esse modelo de ensino tradicional tem contribuído para agravar os problemas de aprendizagem em trigonometria.

Com relação a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) são indicadas as *unidades temáticas* (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística); os *objetos de conhecimento* e; as respectivas *habilidades* que são trabalhadas no Ensino Fundamental (EF) e no Ensino Médio (EM) de acordo com o ano ou série. Segue nos quadros a seguir as habilidades (Quadro 1) e as habilidades vinculadas a Competência Específica 3 (Quadro 2) vinculadas aos conteúdos de geometria e de trigonometria que devem ser estudadas no EF - Anos Finais e no Ensino Médio, respectivamente.

Ano	Código	Habilidade
6º	EF06MA19	Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
6º	EF06MA24	Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
7º	EF07MA24	Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
7º	EF07MA25	Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
7º	EF07MA26	Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
7º	EF07MA28	Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida à medida de seu lado.
7º	EF07MA31	Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
7º	EF07MA32	Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
8º	EF08MA14	Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
8º	EF08MA19	Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
9º	EF09MA10	Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
9º	EF09MA12	Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
9º	EF09MA13	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
9º	EF09MA14	Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Quadro 1 – Habilidades relacionadas aos conteúdos de geometria e de trigonometria no EF– Anos Finais.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 - Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
EM13MAT306 - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Quadro 2 – Habilidades relacionadas a Competência Específica 3 no Ensino Médio.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

A proposta de sequência didática abordará os seguintes conceitos/assuntos trigonométricos com o intuito de potencializar a aprendizagem sobre o assunto:

Atividade	Conceito/assunto	Habilidade/competência	Objetivo
1	Razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).	EF06MA19 EF09MA13	Identificar elementos do triângulo e compreender o significado das razões trigonométricas elementares.
2	Construção e utilização de um Teodolito (aplicação do conceito de razões trigonométricas).	EF08MA19 EF09MA12 EM13MAT308	Construir e/ou saber utilizar instrumentos manipuláveis, como esquadro, régua, compasso, transferidor e teodolito para calcular medidas inacessíveis.
3	A Roda Gigante: funções periódicas (seno ou cosseno).	EM13MAT306 EM13MAT308	Introduzir o conceito de função periódica e discutir suas propriedades através da utilização de materiais concretos.
4	A periodicidade da pressão sanguínea.	EM13MAT306	Resolver problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos.

Quadro 3 – Sequência didática: atividades

Fonte: elaborado pelos autores.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A partir desses estudos podemos afirmar que a aprendizagem de conceitos trigonométricos apresenta problemas de aprendizagens e esta comunicação pretende contribuir para uma melhoria da aprendizagem em trigonometria no Ensino Médio, através de uma sequência didática, recorrendo a preceitos do modelo para o desenvolvimento do pensamento geométrico (VAN HIELE, 1984 *apud* GONÇALVES *et al.*, 2016) e da Teoria de Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009 *apud* SILVA, TELES, 2020).

O modelo de van Hiele (1984) para o desenvolvimento do pensamento geométrico se coloca como um guia para aprendizagem e para avaliação das habilidades dos alunos em geometria. Esse modelo consiste em cinco níveis de compreensão, assim denominados: (1) Visualização; (2) Análise; (3) Dedução Informal; (4) Dedução Formal; e (5) Rigor, que descrevem as características do processo de pensamento (VAN HIELE, 1984 *apud* KALEFF *et al.*, 1994).

Para o casal Van Hiele, no nível 1, os estudantes são capazes de reconhecer e nomear figuras, conversar a respeito delas, agrupá-las e classificá-las, iniciando a compreensão da classificação das formas. No nível 2, os objetos de pensamento, para os estudantes, são todas as formas dentro de uma classe, bem mais do que analisar apenas uma forma única, ou seja, identificar uma forma, não por seu aspecto, mas pelas propriedades das figuras. No nível 3, os estudantes começam a estabelecer relações entre as propriedades dos objetos geométricos sem as restrições de um objeto particular. No nível 4, os estudantes dominam o processo dedutivo, o processo de demonstrações e reconhecem condições necessárias e suficientes – de acordo com Gonçalves *et al.* (2016) o significado da dedução deve ser compreendido como um modo de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. E por fim, no nível 5, os estudantes são capazes de avaliar as distinções e relações entre diferentes sistemas axiomático. O objetivo da sequência didática que será proposta nesta comunicação é fazer com que os alunos atinjam o nível 3 (Dedução Informal) sobre o conceito de razões trigonométricas no triangulo retângulo para em seguida articular com o ciclo trigonométrico e por fim associá-lo à função trigonométrica (função seno) na sua representação tabular, gráfica e algébrica.

A linguagem matemática é composta por simbologias que cumprem a função de fornecer uma representação de um conceito ou de um objeto matemático. Duval (2009, *apud* SILVA, TELES, 2020), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), nomeia essas simbologias de representações semióticas. Essas possuem diversos registros de representações como: linguagem natural, tabular, gráfica, algébrica ou figural. Para Duval (2009), a compreensão só ocorre quando os alunos conseguem transitar de uma representação para outra com facilidade, de modo que se torne natural e não mecanizado, mas a maioria dos alunos tem uma compreensão limitada a forma de representação do objeto/conceito matemático causando diversos problemas de aprendizagem. De acordo com Duval (2009), o importante é o tratamento dado registro de representação do objeto estudado. O ato da *conversão* é mudar a forma de como um objeto é representado, conservando suas características totais ou parciais (por ex.: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ = 0,25 + 0,50 = 0,75 *conversão* de registros: fracionário → decimal → tratamento decimal), já o *tratamento* ocorre dentro do mesmo registro (por ex.: $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{19}{20}$ *tratamento* para o registro fracionário). Por isso o professor tem a difícil tarefa de saber expressar a diferença e a equivalência entre as representações.

O objetivo da sequência didática que será proposta nesta comunicação é favorecer um fluência entre os registros geométricos, tabulares, gráficos e algébricos dos conceitos de razões trigonométricas e de funções trigonométricas (função seno) pois de acordo com Duval, a compreensão só ocorre quando os alunos conseguem transitar de uma representação para outra com facilidade, de modo que se torne natural e não mecanizado.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo de Ramos *et al.* (2014) visou promover a divulgação da construção de materiais instrucionais para o ensino de trigonometria, com o intuito de gerar um debate acerca de sua utilização. Seu público-alvo foram alunos da licenciatura em matemática, professores de matemática da educação básica e interessados em discutir o ensino e a aprendizagem de trigonometria com o uso de materiais manipulativos. Os autores utilizaram a trigonometria como exemplo, por ela apresentar uma relação significativa na aprendizagem relacionada com o desenvolvimento de habilidades e competências, desde que seu estudo esteja relacionado às aplicações, evitando o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações, enfatizando os principais aspectos das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. De acordo com Ramos *et al.* (2014) os professores devem acompanhar constantemente a aprendizagem de seus alunos, a partir de discussões nas aulas, bem como a utilização de recursos nas atividades e através do *feedback*, favorecendo a aprendizagem através de um ensino diversificado. Esses autores concluem o artigo afirmando que a proposta de construção dos materiais foi realizada a partir de atividades vivenciadas por professores e registradas em cursos, eventos, livros e outros locais de pesquisa e que foram desenvolvidos 11 recursos para a construção de uma lista de problemas concernentes ao estudo de trigonometria na educação básica.

O estudo de Santos *et al.* (2016) teve por objetivo descrever a elaboração de uma sequência de atividades planejada por um grupo de licenciandos de matemática, de pedagogia e de uma professora da educação básica e sua aplicação. Seus sujeitos de pesquisa foram alunos de uma turma da 3ª série do EM e o assunto abordado foi trigonometria. Os autores elencaram algumas dificuldades relacionadas ao professor de matemática: ele precisa buscar constantemente soluções para que o ensino de matemática se torne um elemento que supere os obstáculos que ocorrem na atividade docente; seu papel no processo de aprendizagem é de extrema importância; sua formação deveria ocorrer de maneira associada à realidade da sala de aula; seu ensino deveria ser apoiado na reflexão sobre os conhecimentos e também sobre aplicações desses conhecimentos nas demais ciências. Em suas conclusões Santos *et al.*, (2016) afirmaram que seus sujeitos de pesquisa estudaram trigonometria de um modo diferente do ensino tradicional, sentindo-se motivados. E finalizaram o artigo afirmando que “o desenvolvimento da sequência constituiu uma alternativa potencial para o trabalho dos professores, possibilitando a realização de trabalhos como estes” (p. 9).

Galvão *et al.* (2016) citam que a motivação para seus estudos surgiu da constatação de que uma das dificuldades, no estudo das funções trigonométricas, é a compreensão de conceitos como os: do ciclo trigonométrico e da medida de um ângulo em radianos. Esse estudo teve por objetivo: verificar as contribuições de uma estratégia de ensino, formada pela combinação do contexto experimental com o contexto computacional, para a aprendizagem significativa dos principais conceitos presentes na transição das razões no triângulo retângulo para as funções trigonométricas. Afirmaram que foi constatado dificuldades relacionadas às medidas de ângulos em radianos, à representação no ciclo trigonométrico, à construção de tabelas trigonométricas e gráficos em atividades de ensino. Foi criado um conjunto de atividades introdutórias recorrendo a construção da função seno, baseado pelo percurso histórico de construção dos conhecimentos em trigonometria. Seus sujeitos de pesquisa foram 9 alunos de um curso de licenciatura em matemática que cursavam o 3º semestre. Galvão *et al.* (2016) em suas considerações finais afirmaram que foi constatado que a estratégia de ensino trouxe contribuições para a aprendizagem significativa dos conceitos básicos de trigonometria tais quais: na conversão de medidas de ângulos em radiano para grau e vice-versa; na construção de tabelas trigonométricas e de gráficos de funções periódicas. De acordo com os autores "esta combinação, juntamente com a avaliação constante das estratégias adotadas ao longo das atividades, possibilitou explorar os vários aspectos dos conteúdos considerados como subsunções para a construção de uma função trigonométrica" (p. 1141).

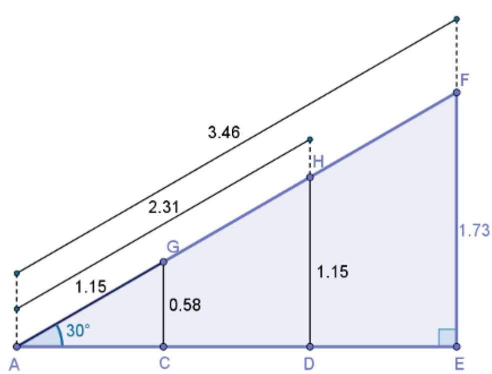
ASPECTOS METODOLÓGICOS – SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ENSINAR TRIGONOMETRIA NO EM

Nesta seção vamos apresentar nossa proposta de sequência didática e as possíveis possibilidades de abordagens para favorecer a aprendizagem de acordo com os documentos oficiais e com o referencial teórico adotado.

<u>Atividade 1</u>: Revendo um velho conhecido (SÃO PAULO, 2018 - adaptada)

O triângulo retângulo é uma das figuras geométricas mais famosas. São poucas as pessoas que nunca precisaram usar essa forma geométrica em alguma situação real. Isso se deve às suas várias propriedades que permitem uma variedade de aplicações no mundo real. Nesta atividade vamos descobrir e usar algumas dessas propriedades.

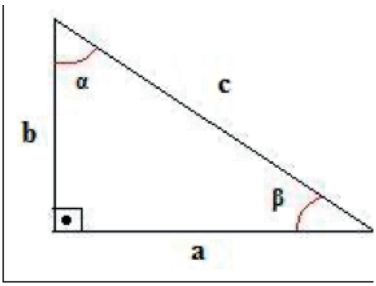
a) Observe a figura a seguir e responda: quantos triângulos há nessa figura?



Considerando as medidas apresentadas, use uma calculadora para calcular as razões indicadas: $\frac{CG}{AG} =$ _____ $=$ $\frac{DH}{AH} =$ _____ $=$ $\frac{EF}{AF} =$ _____ $=$

Todas essas razões foram aproximadamente iguais? dê uma justificativa para isso acontecer.

b) Diante dessa descoberta é possível imaginar que outras razões poderiam ser estabelecidas entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos. Olhe novamente para a figura e escreva outras razões desse tipo. Dentre as razões que se pode escrever entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos algumas se destacam:



$$seno\ de\ um\ \hat{a}ngulo\ (\beta) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$cosseno\ de\ um\ \hat{a}ngulo\ (\beta) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$tangente\ de\ um\ \hat{a}ngulo\ (\beta) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{b}{a}$$

c) Com o estabelecimento dessas razões foi possível calcular o valor do seno, cosseno e tangente de uma infinidade de ângulos. Aqui está uma tabela com esses valores para os ângulos mais usados (ângulos notáveis).

	seno	**cosseno**	**tangente**
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

<u>Sugestões para discussões</u>: em todo triangulo retângulo com um ângulo interno de 30º a relação entre o cateto oposto e a hipotenusa (razão trigonométrica seno) é $\frac{1}{2}$, isso significa que o cateto oposto tem a metade do comprimento da hipotenusa. Já com relação ao cosseno de 45º ser igual ao seno de 45º, isso significa que qualquer triangulo retângulo com um ângulo interno de 45º possui dois catetos com as mesmas medidas e que *cos*45º = *sen*45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ≅ 0,707 significa que o cateto oposto ou adjacente tem aproximadamente 70,7% do comprimento da hipotenusa neste tipo de triangulo (Habilidade BNCC EF07MA24 e Nível 3 do modelo de Van Hiele). Possibilidade de articulação com o ciclo trigonométrico (habilidade EM13MAT306) que tem o raio/hipotenusa = 1 unidade e os infinitos pontos da

circunferência que formam infinitos triângulos retângulos e suas projeções (projeção eixo vertical – cateto oposto – função seno; projeção eixo horizontal – cateto adjacente – função cosseno) para cada ponto da circunferência – conceito de continuidade das funções seno e cosseno – já a função tangente (contraexemplo) não é continua em todo o seu domínio (por ex.: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \nexists$ generalizando D(tg) = $\{x \in R /\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\}$.

<u>Atividade 2</u>: Construção e utilização de um Teodolito (SANTOS, 2015 adaptado).

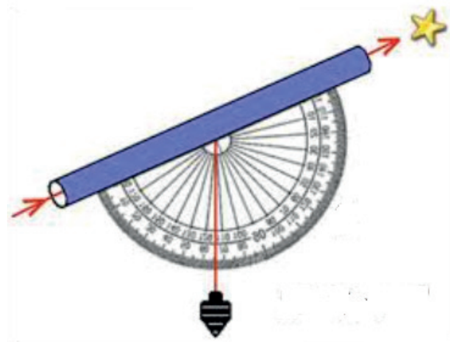


Figura 1 – Imagem Teodolito

Fonte: http://iffmauricio.pbworks.com/w/file/fetch/103401959/Andr%C3%A9_PD_Oficina2.pdf

Medindo a altura do ponto mais alto em uma sala de aula ou de uma caixa d'água no terreno da escola. Esquema para coleta de dados (altura do observador (Y), distância entre observador e objeto que terá a altura medida (*d*) e a medida do ângulo (α) através do teodolito)

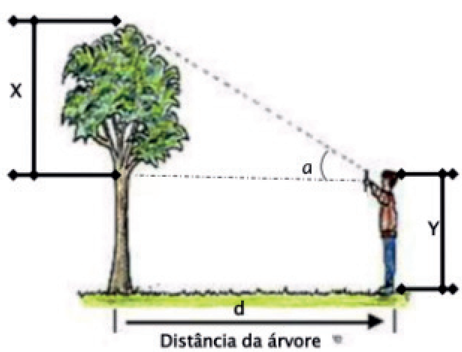


Figura 2 – Esquema para visualização do problema proposto.

Fonte: https://pt.slideshare.net/mathfms/o-teodolito-e-a-trigonometria-2541599

Para facilitar a coleta e organização dos dados, utilize o Quadro a seguir:

Ação	Instrumento	Cálculo	Resposta
Medir altura do observador (*Y*)			
Medir distância do observador ao objeto (*d*)			
Medir ângulo marcado no teodolito (θ)			
Calcular o complementar de α ($\alpha = 90^o - \theta$)			
Identificar a razão trigonométrica utilizada. Usar calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica escolhida.			
Calcular altura (*X*). Lembre-se que $h = Y+X$			

Sugestões para discussões: Nesta atividade precisa se atentar nas dificuldades apresentadas pelos alunos no manuseio dos instrumentos de medidas (régua/ trena/ fita métrica para medir as distâncias e no teodolito para medir ângulos) como apresentado nas pesquisas supracitadas nesta comunicação. Pode-se trabalhar com os conceitos de semelhança de triângulos e de razões trigonométricas associados as seguintes habilidades: EF06MA24, EF09MA12, EF09MA13 e EM13MAT308 e explorar o uso da calculadora cientifica para o cálculo do valor da razão trigonométrica adotada, que neste caso será a razão trigonométrica *tangente* pois relaciona os dois catetos do triângulo retângulo utilizado na situação.

Atividade 3: A Roda Gigante (Matemática Multimidia adaptada)

O objetivo desta atividade é a introdução do conceito de funções periódicas e discutir suas propriedades através da utilização de materiais concretos.

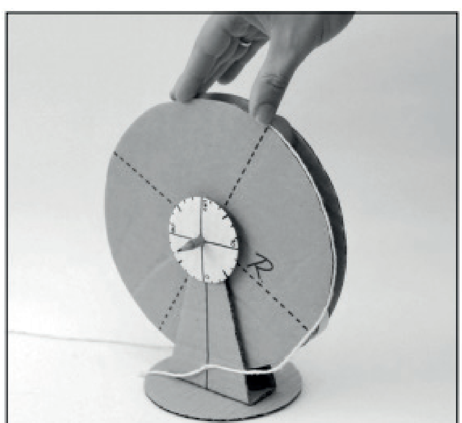


FIG. 2 *Medindo comprimento.*

Imagem 1 – A Roda Gigante construída com papelão, tampas de garrafas pets, palitos, barbante e cola quente.

Fonte: Matemática Multimídia (https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1033)

Instruções para coleta de dados: Preencha a tabela a seguir com a informações coletadas a partir do recurso didático (Roda Gigante).

Os alunos devem mover a Roda Gigante em sentido anti-horário e fazer medições da altura da tampinha com uma régua/trena/ fita métrica (as tampinhas estão coladas nas posições 0º, 45º, 90º e assim sucessivamente). Devem registrar a altura e o ângulo deslocado para 20 diferentes posições em duas voltas efetuadas na Roda Gigante.

Ângulo (radiano)	**Altura (cm)**
...	...

Obs.: para converter medida de ângulo em grau para radiano se atente para a seguinte igualdade: $180^{\circ} = \pi rad$

Depois, os alunos devem repetir o mesmo procedimento, mas agora deve anotar em outra tabela o comprimento percorrido por um ponto na extremidade da roda-gigante em função da altura do ponto. Para medir o comprimento percorrido, os alunos devem usar o barbante.

Comprimento (cm)	Altura (cm)
...	...

Construção de gráficos (em papel quadriculado): colhidas as informações necessárias nas tabelas, os alunos devem fazer dois gráficos marcando os pontos em um plano cartesiano.

Gráfico 1: ângulo (radianos) x altura (cm)

Gráfico 2: comprimento barbante (cm) x altura (cm)

Sugestões para discussões: Nesta atividade precisa se atentar (novamente) nas dificuldades apresentadas pelos alunos no manuseio dos instrumentos de medidas (régua/ trena/ fita métrica/ transferidor de grau). Explorar as relações entres as duas tabelas (medida dos ângulos em graus e radianos e a questão da periodicidade entre as duas voltas na Roda Gigante). Com relação a periodicidade se atentar aos conceitos de amplitude, imagem e domínio da função (discutir a questão do eixo ser em radianos em não em graus nos materiais didáticos). A habilidade a ser explorada nesta atividade será a EM13MAT306 e a conversão do registro tabular para o registro gráfico de acordo com TRRS (DUVAL, 2009).

Atividade 4: A periodicidade da pressão sanguínea (SÃO PAULO, 2017)

O gráfico a seguir representa a variação da pressão (**P**, em milímetros de mercúrio (mmHg)) nas paredes dos vasos sanguíneos em função do instante (**t**, em segundos) em que a medida da pressão foi realizada.

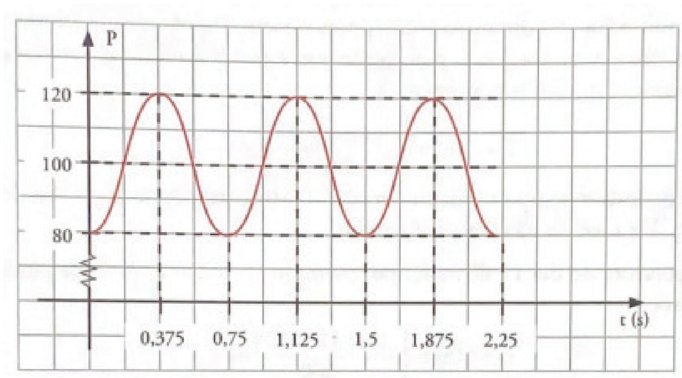


Imagem 2 – Gráfico pressão sanguínea x tempo

Fonte: São Paulo (2017, p. 53)

Observando que a imagem da função é o intervalo [80, 120], que a amplitude é 20 e que o período é 0,75 = $\frac{3}{4}$, podemos escrever a equação da função:

$$P(t) = 100 - 20cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$$

a) Calcule a medida da pressão no instante 2 segundos.

b) Quais são os instantes de tempo entre 0 e 1 segundo em que a pressão sanguínea é igual a mmHg.

Sugestões para discussões: Nesta atividade temos os registros: gráfico e algébrico da função periódica que podem ser utilizados para resolução. Pode-se explorar a soluções gráficas (aproximadas) e as soluções algébricas (exatas). Através do gráfico dá para explorar as principais características de funções periódicas: $f(x) = Acos(Bx) + C$ (relação dos coeficientes: A → amplitude (proporcional), B → período (inversamente proporcional), C → translação eixo vertical; imagem (valores no eixo *y*); amplitude (máximo e mínimo), período: T = $\frac{2\pi}{B}$ (grandezas inversamente proporcionais), domínio da função (valores no eixo *x*). A habilidade a ser explorada nesta atividade será a EM13MAT306 e o *tratamento* e a *conversão* entre os registros de representação acordo com TRRS (DUVAL, 2009).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta comunicação foi compartilhar uma sequência didática para o ensino de trigonometria recorrendo a utilização de materiais concretos com o intuito de potencializar a aprendizagem dos alunos do Ensino Médio. Recorremos a pesquisas relacionadas sobre o assunto e as teorias de aprendizagem: modelo para o desenvolvimento do pensamento geométrico (VAN HIELE, 1984) e a Teoria de Registros e Representação Semiótica (DUVAL, 2009). Esperamos que esta sequência didática possa contribuir para a melhoria da aprendizagem de conceitos trigonométricos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) pela bolsa concedida para participar do Programa de Educação Tutorial (PET) PET Matemática Araguaia.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G.; MIASHIRO, P. M. **A transição das razões para as funções trigonométricas.** BOLEMA, Rio Claro - SP, v. 30, n. 56, p. 1127 - 1144, dez. 2016.

GONÇALVES, F. A.; GOMES, L. B.; VIDIGAL, S. M. P. **Materiais manipulativos para o ensino de figuras planas** (recurso eletrônico). Organizadoras: Katia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. Porto Alegre: Penso, 2016 (Coleção Mathemoteca; v. 4).

KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. S.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. **Desenvolvimento do pensamento geométrico - o modelo de van Hiele.** BOLEMA, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

MOTA, T. B.; JUCÁ, R. S.; PINHEIRO, C.A.M. **Uma análise de erros nas relações trigonométricas no triângulo retângulo.** In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. PUCPR. Curitiba, 18-31 jul. 2013.

OLIVEIRA, J. E. M. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas.** Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - MINAS GERAIS, 2013.

PORTAL M3 – A roda-gigante (**Matemática Multimídia**). Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/ . Acesso em: 12 de abril de 2023

RAMOS, R. C. S. S.; PEREIRA, L. M.; GAI, S. M.; HEBERLE, A. G. P. **Oficina de ensino de trigonometria para a educação básica - construção e análise de materiais**. In: XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil, 13-16 nov. 2014.

SANTOS, L. A. M. **Utilização de material concreto no ensino de matemática: uma experiência com o teodolito caseiro no ensino de trigonometria**. 2015, 87 f.: il. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fundação Universidade Federal de Rondônia, porto Velho, 2015.

SANTOS, M. B.; PAZ, L. K. S.; AMANCIO, V. S.; SILVA, J. S. B.; SILVA NETO, J. F.; COSTA, C. L. **Ensinando e aprendendo trigonometria no ensino médio**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**,** São Paulo – SP**,** 13 a 16 de julho de 2016.

SÃO PAULO. **Material de apoio ao currículo do estado de São Paulo**. Caderno do Aluno – Matemática, Ensino Médio, 2ª série, Volume 1, 2014-2017.

SÃO PAULO. **Sequência didática: razões trigonométricas.** 3ª **Série do Ensino Médio**, Matemática, São Paulo, 2018

SILVA, A. S.; TELES, R. A. M. **Convergências entre o livro didático e o ensino de função quadrática: um olhar sob os registros de representação semiótica**. Revista Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 22, n. 2, p. 604-634. 2020.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar.** Tradução Ernani F. da F. Rosa, Reimpressão 2010 – Porto Alegre: Artmed, 1998.