

# CONSTRUÇÃO DE UM CIRCUITO RL, MODELAGEM DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL GOVERNANTE E COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ANALÍTICA E OS DADOS EXPERIMENTAIS

*Data de aceite: 01/02/2024*

**Leicam Feroldi Martelo**  
UTFPR

**Kailaine de Oliveira da Silva**  
UTFPR

**Jocelaine Cargnelutti**  
UTFPR

**RESUMO:** Neste artigo propõem-se, a modelagem da equação diferencial ordinária referente a um circuito elétrico resistor-indutor (RL), a obtenção da solução analítica e a comparação com os dados experimentais (carga e corrente elétrica) obtidos a partir de um circuito elétrico que foi construído com materiais recicláveis. Esta abordagem prática visa aguçar o interesse do estudante na disciplina e no curso de graduação, oferecendo-lhe mais um incentivo para sua permanência na universidade. Assim como em outras disciplinas o ensino da teoria de equações diferenciais ordinárias (EDO) pode ser associado aos experimentos práticos, permitindo o estreitamento entre a teoria e a prática, oportunizando a aprendizagem eficiente do conteúdo abordado e a percepção de como a matemática

está embutida em diversos eventos ao nosso redor. Além disso, a modelagem matemática é um artifício interessante, potente e esclarecedor, pois permite uma melhor visualização das leis e propriedades que regem o evento estudado. Seguindo neste caminho, este trabalho contempla a modelagem da equação diferencial ordinária que governa o movimento de carga e corrente em um circuito elétrico RL, sua resolução analítica e a comparação entre os resultados analíticos e dados experimentais obtidos a partir do circuito elétrico. Deste modo, a segunda lei de Kirchoff e conceitos da teoria da eletricidade, foram utilizadas para a realização da modelagem da equação diferencial ordinária que governa o circuito RL. A solução analítica deste problema foi obtida pelo método do fator integrante, pois a equação diferencial ordinária governante do circuito elétrico possui as características de ser linear e de primeira ordem. A construção de um circuito foi realizada utilizando materiais recicláveis que podem ser encontrados em residências, escolas, universidades ou em locais que recebem lixo eletrônico. A construção do circuito oportunizou a obtenção dos dados experimentais (carga e corrente elétrica), que foram medidos por

meio de um multímetro. Posteriormente, esses dados foram comparados com os obtidos pela solução analítica. O erro relativo obtido mostra a compatibilidade entre os dados obtidos pelo experimento e a solução analítica. O objetivo deste trabalho é diminuir a distância entre a teoria e a prática. Dessa forma, o texto possui caráter prático educativo de ensino e aprendizagem, trazendo ao público a importância de associar os conceitos e propriedades à resolução de problemas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem matemática. Equação Diferencial Ordinária. Circuito RL. Ensino e aprendizagem.

## INTRODUÇÃO

Nos primeiros semestres dos cursos de graduação em Matemática, Química, Engenharias, Física e outros, os alunos apresentam dificuldades na disciplina de cálculo. Estas dificuldades somam-se mais adiante na disciplina de equações diferenciais. Com o intuito de amenizar estes problemas, despertar o aluno para as novas abordagens didáticas e incentivar a pesquisa, busca-se estreitamento entre o conceito teórico e sua aplicação, permitindo aos alunos, além do entendimento do conteúdo, a visualização prática na sua área de graduação (CARGNELUTTI; GALINA, 2015).

De acordo com Oliveira e Iglori (2013), a disciplina equações diferenciais traz muitos desafios para os estudantes, principalmente pela grande quantidade de conteúdos vistos em outras disciplinas que são necessários para o seu bom entendimento. Além disso, o aluno precisa compreender os conceitos e técnicas intrínsecos da disciplina e este processo pode apresentar menor dificuldade quando aliado a uma aplicação prática contextualizada.

Parece adequado que a escola possa promover um ensino no qual os alunos tenham a possibilidade de compreender as leis e propriedades relacionadas ao conteúdo, conhecer e relacionar suas representações e utilizá-los para interpretar fatos da realidade. Com esta perspectiva, a modelagem matemática apresenta-se como uma alternativa pedagógica eficiente (VERTUAN, 2007).

De acordo com Schmidt, Ribas e Carvalho (1998), ensinar deveria ser mais do que apenas a transmissão de conteúdos. Ampliar e potencializar o desenvolvimento de habilidades para que o aluno possa refletir sobre os assuntos que o cercam e como a matemática está inserida em muitos eventos.

### Justificativa

Neste sentido, este texto traz a modelagem e resolução analítica da equação diferencial que rege o movimento da carga e corrente em um circuito elétrico (RL). Além disso, a solução analítica é comparada com os dados provenientes da medição no circuito elétrico que foi construído com material recicláveis.

## REFERENCIAL TEÓRICO

### Equações Diferenciais

De acordo com Boyce e DiPrima (2006), uma equação diferencial é uma lei, ou uma prescrição, que estabelece a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as taxas são derivadas e as relações são equações que regem o comportamento de algum processo físico.

De acordo com Neto (2021), as equações diferenciais ordinárias foram inicialmente introduzidas por Isaac Newton (1646-1727), no século XVII, por meio de estudos realizados sobre cálculo diferencial e integral, e posteriormente por Gottfried Wilhelm (1646-1717) Leibniz, no século XVII. Leibniz trouxe importantes contribuições para o estudo das equações diferenciais ordinárias, estabeleceu o método de separação de variáveis, redução de equações homogêneas, e o procedimento necessário para se resolver equações lineares de primeira ordem. As equações lineares de primeira ordem e suas aplicações, são os primeiros tópicos a serem estudados na disciplina de EDO, conseqüentemente possui inúmeras aplicações, nesse caso utilizaremos um dos métodos, conhecido como fator integrante, para resolver problemas relacionados com circuitos RL.

Para Konzen (2023) “Equação Diferencial (ED) é o nome dado a qualquer equação que tenha pelo menos um termo envolvendo a diferenciação (derivação) de uma incógnita” (Ibid, p. 1). Ou seja, é uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes relacionadas a variáveis independentes.

Quando são introduzidos problemas de Cálculo é comum que cause estranheza entre os alunos, por ser um conteúdo de difícil visualização. Quando isso ocorre, uma das formas de aperfeiçoar essa visualização é fazer o uso de atividades interativas, ou expositivas, para que assim possa estimular o interesse e entendimento do aluno ao conteúdo ensinado. Para Moreno e Azcárate (1997; 2003) o que determina a forma que o professor atua em sala de aula, pode estar baseado em três modelos diferentes entre si de ensino. O primeiro é aquele que se baseia no ensino tradicional, ou seja, a aplicação de técnicas analíticas e resolução de equações diferenciais. O Segundo é mais aperfeiçoado, visto que considera as equações diferenciais um instrumento que visa modelar matematicamente problemas práticos, e a resolução desses problemas se dá através de representações gráficas, numéricas e simbólicas. O último modelo traz uma característica transitória, ou seja, o professor entra em conflito sobre o “que faz” e o “que poderia fazer”.

O ensino das Equações Diferenciais caminha no modelo de ensino tradicional, mas quando falamos de hodiernidade é notável que o ensino superior vem sofrendo algumas modificações. De acordo com Dullius, et al. (2011), o contexto em que são introduzidas as equações diferenciais hoje em dia, é diferente ao que tinha a meio século atrás, pois agora as exigências e as necessidades dos alunos são outras, além dos avanços tecnológicos. Apesar disso, o contexto em que é apresentado as equações diferenciais continua como

era há meio século, não acompanhando as mudanças que acompanham as fases da sociedade, as aulas devem ser repensadas, além disso, os avanços tecnológicos devem ser considerados.

## Modelagem matemática

A Modelagem Matemática “[...] consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2011, p. 16).

Dessa forma podemos interpretar a modelagem matemática como um processo em que situações da vida cotidiana são articuladas matematicamente, ou seja, são traduzidas para a linguagem matemática. A modelagem é fundamental na solução de problemas práticos visto que a partir disso surgirá a resolução de problemas reais. Biembengut e Hein (2014), destacam que a modelagem matemática “[...] é uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias” (Ibid, p. 9). Assim sendo, a modelagem matemática pode ser usada, não somente para obter determinada solução, mas também para incorporar novos conhecimentos ou para adquirir novas habilidades a partir dos conhecimentos que possui.

Seguindo nesta linha apresenta-se, a seguir, a modelagem da equação diferencial ordinária que modela um circuito elétrico RL.

## Circuito Resistor-Indutor

Um circuito elétrico é um caminho fechado no qual os elementos elétricos do circuito estão ligados por um meio condutor. Uma corrente elétrica passa por esses componentes causando a diferença de potencial em cada componente (IRWIN; NELMS, 2013).

A corrente elétrica é definida como o fluxo de partículas com carga elétrica que se deslocam de um polo de um componente á outro.

A diferença de potencial também conhecida como tensão elétrica, é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um circuito. Sua unidade de medida é o Volts e pode representar tanto uma fonte de energia quanto a energia “perdida” ou armazenada (queda de tensão).

Os elementos que compõem o circuito determinam sua classificação. Neste trabalho se utilizará apenas circuito do tipo RL. Estes são compostos por resistores e indutores.

Para o estudo de Aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias em circuitos elétricos RL é preciso resgatar alguns conceitos básicos de eletricidade.

A Primeira Lei de Ohm diz que um condutor com resistência elétrica constante mantido à temperatura constante, a intensidade de corrente elétrica será proporcional à diferença de potencial aplicada entre suas extremidades:

$$R = \frac{V}{i} \quad (1)$$

onde,  $R$  é resistência, medida em ohms ( $\Omega$ ),  $V$  é a voltagem/Carga, medida em volts e  $i$  é a corrente, medida em amperes.

As duas leis de Kirchhoff são indispensáveis para os estudos do circuito RL, sendo elas: A Primeira lei estabelece que a soma das intensidades de corrente que chegam a um nó é igual à soma das intensidades de corrente que deixam o nó. A segunda lei considera que é nula a soma algébrica das tensões encontradas em cada elemento do circuito.

A expressão para obter a Indutância  $L$  é dada por:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (2)$$

onde,  $L$  é a indutância da bobina, medida em Henry,  $N$  é a quantidade de espiras da bobina,  $A$  é área do núcleo da bobina, medida em metros quadrados [ $m^2$ ],  $l$  é o comprimento da bobina, medida em metros [ $m$ ] e  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do ar que equivale a  $4\pi 10^{-7}$  [ $H/m$ ].

A corrente elétrica expressa por meio de derivada também é necessária. Define-se como intensidade da corrente elétrica  $i$  a taxa de variação da carga elétrica  $q$  em relação ao tempo  $t$  que atravessa uma seção transversal de um condutor, sendo:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (3)$$

De acordo com os materiais recicláveis obtidos, o circuito elétrico RL foi construído conforme a Figura 1.

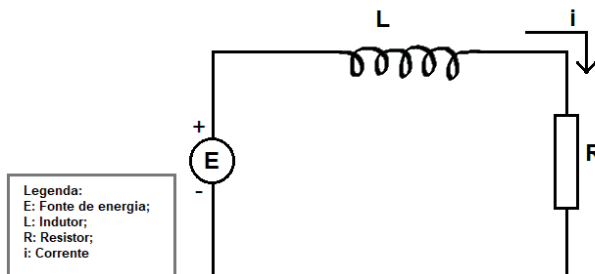


Figura 1: Circuito RL.

Fonte: Dos autores (2023).

A lei das correntes de Kirchhoff implica que a mesma corrente passa por cada elemento do circuito elétrico. Aplicando a lei das tensões de Kirchhof a este circuito, a qual estabelece para um circuito RL que a soma das quedas de tensão no resistor R e no indutor L devem ser iguais à tensão fornecida E:

$$L \frac{dq}{dt} + Ri = E \quad (4)$$

Dividindo a equação (4) por L que:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \quad (5)$$

A expressão (5) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não homogênea e pode ser resolvida pelo método do fator integrante. Este método é utilizado para resolver EDOs lineares de primeira ordem.

#### Resolução Analítica

A equação diferencial ordinária (5) possui solução analítica e ela é obtida, a seguir, pelo método do fator integrante (ZILL, 2006).

Para aplicar este método é necessário que a EDO esteja na forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = f(t) \quad (6)$$

Observando a equação (5), tem-se que:

$$p(t) = \frac{R}{L} \quad (7)$$

Segue, portanto, que o fator integrante possui a seguinte forma:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L} dt} \quad (8)$$

Resolvendo a integral de (8), tem-se:

$$\mu(t) = e^{\frac{R}{L}t} \quad (9)$$

Multiplcando (9) em (5), segue que:

$$e^{\frac{R}{L}t} \frac{di}{dt} + e^{\frac{R}{L}t} \frac{R}{L} i = e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L} \quad (10)$$

A multiplicação do fator integrante em (10), tornou o lado esquerdo na regra de produto entre o fator integrante e a corrente. Portanto, a expressão (10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left( e^{\frac{R}{L}t} i(t) \right)' = e^{\frac{R}{L}t} \frac{E}{L} \quad (11)$$

Nesta etapa, procede-se com a integração de ambos os lados da expressão (11). No lado esquerdo a integração é direta (propriedade das integrais). NO lado direito, aplica-se integração por substituição. Tem-se a expressão para a corrente elétrica que circula no circuito:

$$e^{\frac{R}{L}t} i(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + k \quad (12)$$

onde  $k$  é a constante de integração.

O objetivo de resolver (5) é obter a corrente que circula pelo circuito. Deste modo, isolando a corrente em (12), tem-se:

$$i(t) = \frac{\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + k}{e^{\frac{R}{L}t}} \quad (13)$$

A expressão (13) pode ser reescrita:

$$i(t) = \frac{E}{R} + k e^{-\frac{R}{L}t} \quad (14)$$

A constante integração de (14) pode ser determinada considerando que no tempo  $t = 0$  não existe corrente circulando no sistema. Logo,  $i(0) = 0$  e  $k = -\frac{E}{R}$ .

Portanto, a expressão (14) fica:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (15)$$

Por definição, da taxa de variação da carga  $q$  em relação ao tempo  $t$  é igual a corrente, conforme apresentado em (3). Segue que:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (16)$$

A expressão (16) é uma EDO separável e pode ser reescrita:

$$dq = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) dt \quad (17)$$

A expressão (17) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Aplicando a integração indefinida em ambos os lados, tem-se:

$$\int dq = \int \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) dt \quad (18)$$

Portanto, a expressão para a carga elétrica no circuito RL é dada por:

$$q(t) = \int \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) dt \quad (19)$$

## MATERIAIS E MÉTODOS

Para a construção do circuito elétrico RL, utilizou-se uma fonte de computador como fonte de energia, conforme Figura 2.



Figura 2: Fonte utilizada no experimento.

Fonte: Dos autores (2023).

Com relação ao resistor, optou-se por utilizar um cooler/ventoinha de computador, conforme Figura 3, por ser um objeto facilmente encontrado em lixos de eletrônicos e também pela praticidade de manuseio. O resistor é um componente elétrico que tem a função primária de limitar o fluxo da corrente elétrica em um circuito.





Figura 3: Cooler/ventoinha utilizada como resistor.

Fonte: Dos autores (2023).

O indutor foi construído a partir de um fio de cobre com 0,5 milímetros de espessura, enrolando este fio em uma haste de aproximadamente um centímetro de espessura. Tem-se, assim, uma bobina, conforme pode ser observada na Figura 4. O indutor, além da bobina, um núcleo, que pode ter sua composição em um material como o metal ou um material isolante. Optou-se por utilizar o ar como isolante.

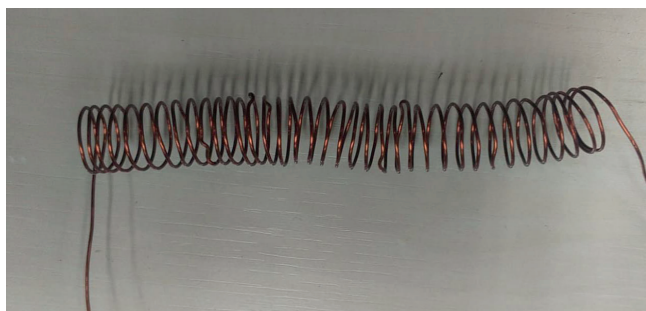


Figura 4: Indutor construído.

Fonte: Dos autores (2023).

Com todos os componentes em mãos, mais alguns outros componentes como fios e fita isolante, utiliza-se o esquema do circuito elétrico apresentado na Figura 1 para a construção do circuito utilizado neste trabalho. Desta forma, tem-se o circuito apresentado na Figura 5.

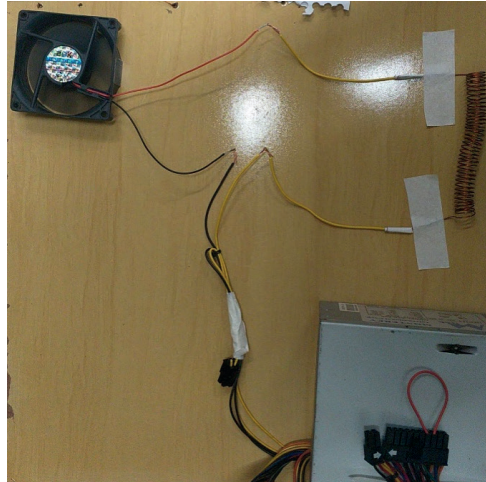


Figura 5: Circuito RL construído e em funcionamento  
Fonte: Dos autores (2023).

As medições da corrente e da carga elétrica foram feitas utilizando um multímetro. O multímetro utilizado é apresentado na Figura 6.



Figura 6: Multímetro utilizado.  
Fonte: Dos autores (2023).

Com esse aparelho pode-se medir a corrente, a voltagem/carga e a resistência. Para isto basta selecionar a opção correta no botão girador do centro. Para a medição da corrente e da voltagem utilizou-se a lei de Kirchoff. Portanto, para a medição da voltagem é necessário que o multímetro esteja na configuração adequada, em paralelo com a parte que se deseja medir. Para a medição da corrente, com o multímetro na configuração correta, é necessário deixá-lo em serie com o circuito, conforme Figuras 7 e 8.

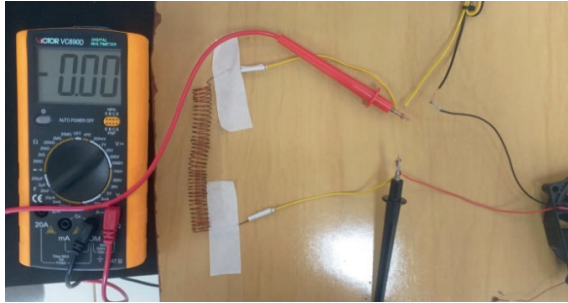


Figura 7: Voltagem no indutor

Fonte: Dos autores (2023).

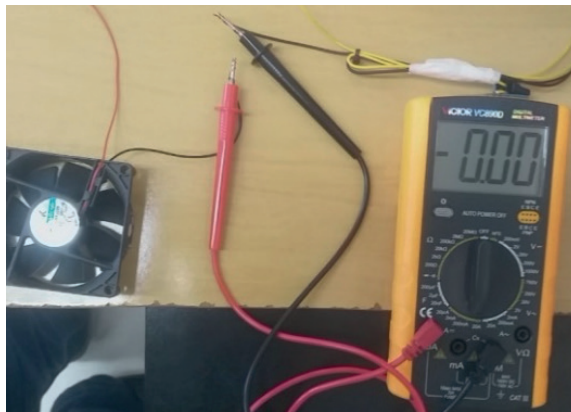


Figura 8: Corrente no circuito

Fonte: Dos autores (2023).

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para o problema proposto os dados dos componentes do circuito RL construído medidos com o multímetro são: A fonte de computador possui carga de 12 V (volts) e a ventoinha indica um consumo de 0,16 A. Substituindo estes valores na formula (1), tem-se:

$$R = \frac{12}{0,16} = 75 \Omega \quad (20)$$

Com a construção do indutor, foi necessário calcular a indutância. Para isto substituiu-se os valores correspondentes ao nosso indutor na expressão (2), obtendo:

$$L = \frac{4\pi 10^{-7} 39^2 \frac{9\pi}{250000}}{\frac{29}{250}} = \frac{13689\pi^2}{72500000000} H \quad (21)$$

O cálculo da corrente no circuito RL em certo instante  $t$  segundo a lei de Kirchhoff das tensões é fornecido pela expressão (5). Substituindo os dados de (20) e (21) em (5), tem-se que:

$$\frac{13689\pi^2}{72500000000} \frac{di}{dt} + 75i = 12 \quad (22)$$

A expressão (22) é reescrita para aplicarmos o método do fator integrante, obtendo:

$$\frac{di}{dt} + \frac{5437500000000}{13689\pi^2} i = \frac{870000000000}{13689\pi^2} \quad (23)$$

A forma da solução para (23) foi apresentada na equação (15). Deste modo, obtém-se o valor para a corrente, de forma analítica:

$$i(t) = \frac{4}{25} \left( 1 - e^{-\frac{5437500000000t}{13689\pi^2}} \right) \approx \frac{4}{25} = 0,16 \text{ A} \quad (24)$$

Finalizada a parte analítica do problema proposto, procede-se com a medição da corrente elétrica no circuito utilizando o multímetro. Essas medições podem ser observadas nas Figuras 9 e 10.

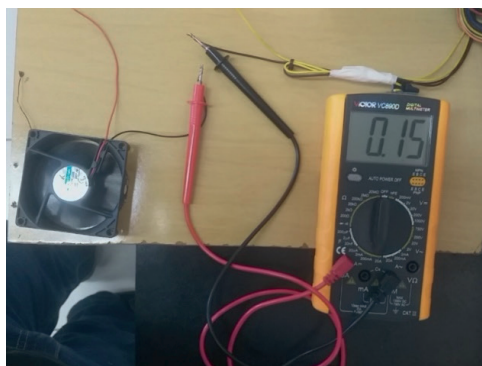


Figura 9: Medição da corrente assim que o circuito foi ligado

Fonte: Dos autores (2023).

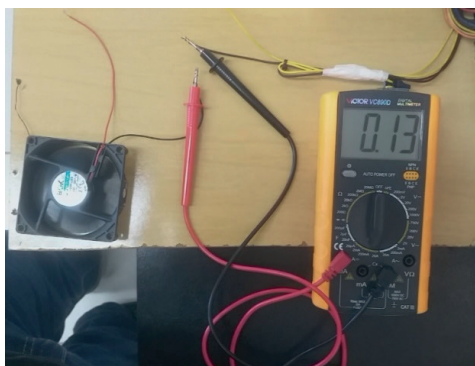


Figura 10: Medição da corrente 1 minuto após ligar

Fonte: Dos autores (2023).

O erro relativo é dado pela divisão entre o erro absoluto e o valor analítico. Observe, nas medições, que logo que o circuito foi ligado a corrente é de  $0,15 \text{ A}$ . Um minuto depois a corrente oscila entre  $0,13 \text{ A}$  e  $0,14 \text{ A}$ . Os erros relativos para as medições, logo que o circuito foi ligado e um minuto após são apresentados a seguir:

$$E_{rel} = \frac{0,16 - 0,15}{0,16} = 0,0625$$

$$E_{rel} = \frac{0,16 - 0,135}{0,16} = 0,15625$$

## CONCLUSÃO

Observa-se que o erro relativo calculado imediatamente após ligar o circuito é menor do que o erro relativo um minuto depois. Essa diferença pode ser devido a vários fatores, como por exemplo, o multímetro consome um pouco de energia do circuito, tem também o desgaste do fio de cobre, que foi desconsiderado no momento dos cálculos. Além disso, podem ocorrer pequenos erros no momento da medição devido a precisão do aparelho e também pelo fato de que tudo foi feito de maneira manual.

Os objetivos foram atingidos, pois a solução analítica, que foi obtida por meio da resolução da EDO linear de primeira ordem, e os dados experimentais estão próximos, conforme mostrado pelo erro relativo, mostrando que a teoria pode ser observada em eventos ao nosso redor. Além disso, o aprendizado foi grande. Observar, na prática, os conceitos e propriedades matemáticas, tornou o processo de aprendizagem mais eficiente, despertando o interesse e proporcionando motivação nos alunos. A interdisciplinaridade no desenvolvimento deste trabalho também é item relevante.

## REFERÊNCIAS

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3 ed. São Paulo, Contexto, 2011.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. 5 ed. São Paulo, Contexto, 2014.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno** 8. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2006.
- CARGNELUTTI, J.; GALINA, V. Aplicação do Método de Diferenças Finitas em Equações Diferencias Ordinárias. **Seminário de Extensão e Inovação da UTFPR**, Campo Mourão, 2015.
- DULLIUS, M. M. et al. **Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais com uma Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica**: Uma experiência em cursos de Engenharia. **Bolema**, v. 24, n. 38, 2011.
- IRWIN, J. D.; NELMS, R.M. **Análise Básica de Circuitos para Engenharia**. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- KONZEN, P. **Equações Diferenciais Ordinárias, Atribuição-Compartilha Igual 4.0 Internacional** Creative Commons, 2023.

MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones de los Profesores sobre La Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a Estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. **Revista Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 15, n. 1, 1997.

MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. **Revista Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 21, n. 2, 2003.

NETO, R. **Uma Construção Histórica das Técnicas da Transformada Integral Clássica e Generalizada**, 2021, 144. Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos. Unesp, Rio Claro, 2021.

OLIVEIRA, E. A. De; IGLIORI, S. B. C. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais: Um levantamento preliminar da produção científica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Pernambuco. v. 4, n. 2, 2013.

SCHMIDT, L. M.; RIBAS, M. H.; CARVALHO, M. A. de. (1998). A prática pedagógica como fonte de conhecimento. **Olhar de Professor**, v. 1, n. 1, p. 9-23.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. Ed. Cengage Learning, São Paulo, 2006.