

# CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO E MODELAGEM: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA COM O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PARA UMA MATEMÁTICA CRÍTICA

*Data de aceite: 01/12/2023*

### **Natália Pedroza de Souza**

Docente do Instituto de Aplicação  
Fernando Rodrigues da Silveira,  
Departamento de Matemática e Desenho  
da Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro

### **Moises Ceni de Almeida**

Docente do Instituto de Ciências Exatas,  
Departamento de Matemática da  
Universidade Federal Rural do Rio de  
Janeiro

### **Leonardo Maricato Musmanno**

Docente do Instituto de Aplicação  
Fernando Rodrigues da Silveira,  
Departamento de Matemática e Desenho  
da Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro

### **Renata Cardoso Barbosa**

Doutoranda do Programa de Pós-  
Graduação em Ensino de Matemática da  
Universidade Federal do Rio de Janeiro.  
Docente da Secretaria Municipal de  
Teresópolis

**RESUMO:** Este trabalho apresenta uma proposta pedagógica envolvendo cenários para investigação e Modelagem Matemática, tendo por objeto de estudo a

população prisional do Brasil. Na visão da Educação Matemática Crítica, atividades investigativas propiciam um ambiente convidativo no qual o aluno explora questões abertas, opondo-se às atividades tradicionais, baseadas em exercícios mecânicos e repetitivos. A Modelagem Matemática, por sua vez, proporciona ao aluno situações inseridas em seu cotidiano, podendo ser um caminho, mediado por recursos tecnológicos, para despertar nos alunos o interesse por tópicos matemáticos. Assim, este trabalho objetiva apresentar uma proposta que, alinhada às ideias da Educação Matemática Crítica, permita que o aluno desenvolva sua capacidade crítica e reflexiva, tornando-se mais apto a interpretar e compreender situações relacionadas à Matemática em sua vida. Destaca-se o uso da ferramenta conhecida como “método dos mínimos quadrados”, técnica de otimização que pode ser aplicada em diversas áreas do conhecimento, abrindo possibilidades para trabalhos interdisciplinares.

**PALAVRAS-CHAVE:** Cenários para investigação. Matemática Crítica. Modelagem Matemática. Método dos Mínimos Quadrados.

# LANDSCAPES OF INVESTIGATION AND MODELING: A PEDAGOGICAL PROPOSAL WITH THE METHOD OF LEAST SQUARES FOR A CRITICAL MATHEMATICS

**ABSTRACT:** This work presents a pedagogical proposal involving landscapes of investigation and mathematical modeling, having as object of study the prison population in Brazil. In the view of Critical Mathematics Education, investigative activities provide an inviting environment in which the student explores open questions, as opposed to traditional activities, based on mechanical and repetitive exercises. Mathematical modeling, in turn, provides students with situations that are part of their daily lives, which can be a way to awaken students' interest in mathematical topics, especially when using the technological resources currently available. Thus, this work aims to present a proposal that, in line with the ideas of Critical Mathematics Education, allows students to develop their critical and reflective skills, becoming more able to interpret and understand situations related to mathematics in their lives. In the proposal, the use of the "least squares method" stands out, an optimization technique that can be applied in various areas of knowledge, opening up possibilities for interdisciplinary work.

**KEYWORDS:** Landscapes of investigation. Critical Mathematics. Mathematical Modeling. Least Squares Method.

## INTRODUÇÃO

De acordo com Skovsmose (2000), um cenário para investigação é um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação. Contrapondo-se ao paradigma do exercício, no qual os alunos permanecem condicionados a sua resolução, nos cenários para investigação, eles são convidados a se envolverem em um processo de exploração do problema em questão, fazendo com que assumam uma postura mais ativa em seu processo de aprendizagem.

Cenários de investigação estão estritamente relacionados à corrente educacional denominada Educação Matemática Crítica (SKOVSMOSE, 2000). Teres (2014) destaca que, dentre as características dessa corrente, está a preocupação com o desenvolvimento de competências que tornem o aluno capaz de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela Matemática.

A tendência da Educação Matemática Crítica, arraigada na Educação Crítica (VICENTINI E VERÁSTEGUI, 2015), visa transcender a mera transmissão de conhecimentos matemáticos, buscando incutir nos alunos uma compreensão mais profunda e consciente da Matemática como disciplina intrinsecamente conectada ao tecido de nossa sociedade. Skovsmose defende uma educação voltada para o desenvolvimento de três "conheceres": conhecimento matemático, o conhecimento reflexivo e o conhecimento tecnológico, no que diz respeito à construção e utilização de modelos matemáticos. A partir desta tendência, busca-se capacitar os estudantes a se tornarem cidadãos ativos, informados, reflexivos e capazes de lidar com os desafios do século XXI, e assim contribuir para a criação de uma sociedade mais justa e equitativa (PESSÔA E JÚNIOR, 2013).

Além dos cenários para investigação preconizados pela Educação Matemática Crítica, este trabalho também irá se alimentar de outra fonte teórica, a saber, a Modelagem Matemática, vista aqui não como uma técnica para gerar modelos matemáticos explicativos da realidade, mas como uma perspectiva de ensino.

A Modelagem Matemática, como estratégia de ensino, segundo Bassanezi (2002), tem se mostrado muito eficaz para uma matemática agradável e interessante. Nessa perspectiva, os estudantes são levados a conceber a Matemática não apenas como uma disciplina abstrata, mas como um instrumento poderoso e prático para analisar, interpretar e resolver problemas reais. Essa abordagem oferece aos estudantes a oportunidade de explorar relações complexas entre a Matemática, a sociedade e as questões sociais. Desta forma, a Modelagem Matemática surge como uma ferramenta para promover o pensamento crítico e a conscientização dos alunos, alinhando-se harmoniosamente com os princípios da Matemática Crítica.

Assim, este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta de cenário para investigação que tenha como aporte principal a Modelagem Matemática. Ao unir um ambiente investigativo com técnicas de modelagem, os autores esperam obter uma proposta pedagógica que seja agradável para o aluno e o faça refletir sobre aspectos sócio-culturais que o rodeiam.

Cabe ressaltar que a proposta aqui apresentada, se coaduna com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conforme podemos verificar no trecho a seguir:

[...] no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 528)

No contexto deste trabalho, vamos abordar encaminhamentos para um possível cenário. O assunto mobilizador para o cenário proposto é a situação da população prisional no Brasil. Caso o convite seja aceito pelos alunos, eles deverão passar por uma etapa de levantamento de dados. Este momento pode ser utilizado para, por exemplo, discutir questões sobre fontes confiáveis para se desenvolver uma pesquisa. Em seguida, os alunos devem pensar sobre a representação dos dados, a qual pode ser feita por meio das representações estatísticas. Para a Modelagem Matemática dos dados levantados, um caminho possível é o Método dos Mínimos Quadrados, técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados. A utilização desta técnica permite o desenvolvimento de um modelo que possibilite a previsão do crescimento da população prisional no país. Por fim, diversas reflexões amparadas pelas projeções são sugeridas. Contudo o ideal é que os estudantes desenvolvam suas próprias questões e busquem suas próprias respostas e ações. Nosso anseio é que, ao se unir o uso de cenários com as técnicas de modelagem, seja criado um contexto pedagógico favorável ao desenvolvimento da capacidade de interpretação e atuação sobre as questões sociais que

são ou que podem ser estruturadas pela matemática.

O texto a seguir está organizado nas seções: “Referencial Teórico”, onde apresentamos os cenários para investigação como uma intervenção que tem por objetivo desenvolver a criticidade dos alunos; “Um Convite Para Cenário para Investigação”, seção em que se desenvolve a proposta pedagógica; e “Conclusão”.

## REFERENCIAL TEÓRICO

Dentre os documentos norteadores da educação no Brasil, a BNCC (2018) assume um papel de destaque, estabelecendo as competências e habilidades que os discentes devem desenvolver ao longo de sua trajetória escolar, servindo como um guia para a elaboração dos currículos escolares de todo o país. As competências gerais da BNCC se referem a conhecimentos, habilidades e atitudes que precisam ser desenvolvidos pelos alunos, conectados com os desafios que o mundo oferece. As dez competências gerais previstas na Base são descritas na Figura 1.

Ao relacionar uma atividade de sala de aula com as competências gerais preconizadas pela BNCC, estabelece-se um arcabouço pedagógico mais abrangente e significativo, que visa a preparação dos alunos para a participação plena como cidadãos ativos.

Além das competências gerais, a BNCC também sugere competências específicas para as diferentes áreas do conhecimento. Dentre as competências específicas da Matemática apontadas neste documento, ressalta-se:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (BRASIL, p. 523).

## COMPETÊNCIAS GERAIS DA NOVA BNCC



Figura 1: Competências da BNCC

Fonte: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Disponível em: <http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novas-competencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79>

Pode-se observar que as competências gerais previstas pela BNCC articulam-se fortemente com a Educação Matemática Crítica, na medida que: “A educação tem que desempenhar um papel ativo na identificação e no combate de disparidades sociais” (Skovsmose, 2013, p. 32). A Educação Matemática Crítica compreende que discussões sociais, políticas, culturais e éticas devem fazer parte das preocupações da matemática e da Educação Matemática.

Skovsmose caracteriza a Educação Crítica como aquela em que os professores e os alunos se envolvem conjuntamente no processo educacional por meio do diálogo, de forma a desenvolver a democratização do saber. Para isso, os conteúdos de um currículo não devem ser selecionados previamente e sim discutidos criticamente por todos os envolvidos, de acordo com a relevância social do problema, sua aplicabilidade, os interesses e as necessidades reais dos alunos. [...] Para Skovsmose, o processo de ensino e aprendizagem precisa ser voltado à resolução de problemas. Tais problemas devem mostrar-se importantes aos estudantes, serem acessíveis aos seus conhecimentos prévios e relacionados com os problemas sociais existentes. (CARDOSO, 2017, p.61)

Skovsmose (2000) e Barbosa (2001) apresentam cenários para investigação e projetos em oposição à resolução de questões pré-formatadas e que possuem única possibilidade de resposta. Tais cenários são ambientes convidativos, que oferecem recursos e suporte à investigação. Na medida em que a sala de aula de matemática é usualmente balizada na exposição de determinado conteúdo aos alunos e resolução de exercícios, denominado paradigma do exercício, os cenários para investigação trazem como proposta questões abertas, que dependerão do engajamento dos sujeitos envolvidos.

O convite à investigação, nos cenários ou projetos, tem por objetivo promover a matérica, ou seja, competência para interpretação e atuação em situações políticas e sociais estruturadas - também - pela matemática (SKOVSMOSE, 2000, p. 2). A necessidade de se interpretar criticamente dados decorre do fato da sociedade organizar-se matematicamente e estatisticamente. A má ou não compreensão de questões matemáticas gera distorções da realidade. Numa perspectiva crítica da educação, não há interesse em promover a ideologia da matemática pura e perfeita, aplicável a todas as situações do mundo real, porém compreender que a matemática é um “corpo de conhecimentos” dentre muitos (BORBA e SKOVSMOSE, 2001, p. 133).

Utilizando estratégias, procedimentos e conceitos matemáticos na identificação de questões socioeconômicas, a Modelagem Matemática emerge como uma abordagem pedagógica. Em linhas gerais, a Modelagem Matemática é uma prática presente na Matemática Aplicada que consiste na construção de modelos matemáticos, isto é, representações por meio da linguagem matemática (equações, gráficos, tabelas etc.) de um fenômeno de outras áreas do conhecimento (Física, Química, Geografia, Biologia etc.). No contexto da sala de aula, a Modelagem configura uma abordagem pedagógica que constitui uma linha de pesquisa relevante, surgindo como tendência da Educação Matemática nacional e internacional (CANEDO e KISTEMANN, 2014).

Existem diversas definições para modelagem, bem como diversos objetivos. Barbosa (2001, p.1; 2004. p. 74) apontou que o cenário brasileiro de modelagem se distinguia do cenário internacional, uma vez que os educadores buscavam desenvolver projetos ou estudos dirigidos de modelagem a partir do viés sócio-cultural, interesses e motivações de seus alunos. A seguir exibimos algumas concepções clássicas presentes na literatura:

“Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. (...) Consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.” (BASSANEZI, 2002. p.24);

“Arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio (...) processo que envolve a obtenção de um modelo.” (BIEMBEGUT e HEIN, 2005. p.8);

“Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio de matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade.” (BARBOSA, 2004. p.6);

Em contraponto aos modeladores profissionais, que buscam construir modelos explicativos da realidade, a Modelagem Matemática em sala de aula possui objetivo pedagógico próprio. Amparando-se na perspectiva de Barbosa (2001, p. 5), a Modelagem Matemática no presente artigo

[...] trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e idéias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade. (BARBOSA, 2001. p.5);

#### Seguiremos a perspectiva de Burak:

[...] “O entendimento de Modelagem Matemática que aqui abordaremos é a visão assumida a partir de um entendimento de Educação Matemática que contempla as ciências Humanas, Sociais”. [...] “A visão de que tipo de “homem” que se pretende formar para enfrentar os desafios do século XXI é uma questão que tem a ver com a forma de se ensinar e com o que se quer com essa a forma de se ensinar. Esta questão provoca e invoca algumas respostas: desejamos um cidadão que desenvolva a autonomia, que seja: crítico, capaz de trabalhar em grupo, capaz de tomar decisões diante das situações do cotidiano, da sua vida familiar, da sua vida profissional, ou de sua condição de cidadão” (BURAK, 2010, p.17).

É possível notar, portanto, que, de forma semelhante aos cenários para investigação, o uso da Modelagem em sala de aula pode proporcionar aos alunos ambientes de aprendizagens que buscam superar as limitações do modelo didático tradicional, no qual o professor primeiro explica a respeito de um tópico matemático e depois prescreve uma lista de exercícios aos alunos, cabendo a esses últimos resolvê-los.

A Modelagem Matemática, enquanto abordagem apresenta os seguintes objetivos:

a) Construção de conhecimento matemático; b) Desenvolvimento de habilidades e competências para construção de Modelos Matemáticos em geral; e c) Estruturação de conhecimento de natureza reflexiva (tipologia, definição de critérios, aplicabilidade, avaliação de modelos etc).

As Etapas Básicas de uma atividade de Modelagem Matemática são: a) Elaboração da Situação-Problema – pode ser feita pelos alunos e pelo professor em conjunto. b) Inteiração/Simplificação – os alunos fazem a leitura da atividade, identificam a situação-problema, fazem o levantamento dos dados, exploram e levantam as hipóteses (transformaram a situação-problema de uma linguagem natural para uma linguagem matemática). c) Resolução – os alunos buscam uma solução que responde a atividade proposta com criação de um modelo apropriado, que pode ser uma fórmula, uma maquete etc. Na etapa de resolução podemos ter: construção de um modelo, diferentes respostas e perspectivas, estimativas futuras e generalizações. d) Interpretação/Validação – os alunos analisaram a solução dada ao problema inicial e estão aptos a responder: possui validade e é aplicável ao problema? (BARBOSA, 2004, BASSANEZI, 2002, BIEMBEGUT E HEIN, 2005).

Neste contexto de cenário para investigação+modelagem, o uso de recursos tecnológicos surge naturalmente como uma ferramenta importante na realização das etapas de uma modelagem, contribuindo em diversos aspectos para trabalhos deste tipo. Além de permitirem a manipulação de grandes volumes de dados, a utilização destes recursos facilita a realização de cálculos, bem como a construção de gráficos e tabelas. Assim, tais ferramentas permitem uma maior profundidade nas análises e na detecção de padrões ou tendências nos dados obtidos. Mais especificamente, na próxima seção, para a realização dos cálculos e gráficos relacionados ao tema do sistema prisional no Brasil, foi utilizado o *Excel*, software de criação de planilhas eletrônicas muito utilizado para a realização de cálculos matemáticos, criação de gráficos, tabelas e análise de dados.

Para que modelagem não seja vista como algo “pronto e perfeito”, na próxima seção são propostas perguntas que guiarão o aluno no sentido de questionar criticamente o processo desenvolvido. Por exemplo, o uso da tecnologia para a criação, manipulação e validação de modelos matemáticos pode ser usada para levantar discussões sobre a precisão e acurácia do método utilizado, ou sobre o horizonte de tempo em que é razoável utilizar a fórmula obtida por tal método. Para além do desenvolvimento de modelos, faz-se necessário o desenvolvimento de pensamento crítico.

Questões mais fundamentais devem ser levantadas. Se a matemática, em certo contexto de modelagem, exerce um poder formatador, então, devemos perguntar: “O que é feito por meio desta modelagem?”, “que ações sociais e tecnológicas são realizadas?”, “quais são as implicações sociais, políticas e ambientais destas ações?” (BORBA e SKOVSMOSE, 2001, p. 135).

Dentro deste modelo de educação matemática crítica, por meio da modelagem e com utilização de tecnologia, dá-se ênfase sobre questionamentos em detrimento de respostas preconizadas. Ocorrerá o predomínio do “o que?”, “por que?”, “como”, “o que representa?”, “Para que esses dados podem ser úteis?”, “O que acontece se...” (BARBOSA, 2004, p. 74, BORBA e SKOVSMOSE, 2001, p. 135).

## UM CONVITE PARA CENÁRIO PARA INVESTIGAÇÃO

Nesta seção, lançamos encaminhamentos para um possível cenário para investigação em sala de aula, que se iniciará através de um convite à investigação que busca compreender e investigar o desafio premente do aumento da população prisional no Brasil, utilizando a abordagem pedagógica da Modelagem Matemática, adotando as perspectivas presentes na BNCC. Na interseção da Educação Matemática Crítica, diálogo aberto e eficaz e mediação pela tecnologia, propomos uma rota que transcenda as abordagens convencionais e promova uma compreensão mais profunda das questões sociais envolvidas. Por meio de um roteiro, exploraremos o emprego da Modelagem Matemática, como abordagem, ao mesmo tempo em que estimulamos o pensamento crítico e a reflexão. Este cenário de investigação busca inspirar um compromisso renovado com



a resolução de problemas atuais e relevantes, equipando os educadores e pesquisadores com ferramentas para promover uma educação matemática transformadora e significativa. É oportuno dizer ainda que há propostas semelhantes à nossa, em outros contextos. Gostaríamos de destacar o trabalho de Dias e Pinto, que realizam uma proposta (roteiro) discutindo abordagens sobre a temática das *Fake News*.

Vamos explorar algumas possibilidades educacionais do uso de Modelagem Matemática no contexto do crescimento da população prisional brasileira. É apresentado a seguir um possível cenário, sendo dividido em cinco etapas, a saber: (i) Um convite para investigação; (ii) Levantamento de dados; (iii) Representações de Dados; (iv) O Método dos Mínimos Quadrados; e (v) Algumas reflexões propositivas.

Todas as etapas foram pensadas com o fim de promover o engajamento dos alunos e professores. Amalgamando a modelagem, a utilização de tecnologias, a linguagem matemática e situação de problema real, buscamos oposição ao paradigma do exercício, formulando questões matemáticas abertas e interpretativas.

#### *(i) Um convite para investigação*

A primeira etapa de uma atividade que faça uso das estratégias de ensino sob a ótica da Modelagem é a delimitação das situações-problema que serão estudadas. Nessa etapa é conveniente pedir aos alunos sugerirem questões dentro do grande tema que o professor quer trazer para a sala de aula. A pesquisa em Modelagem Matemática mostra que essa participação dos alunos pode ser muito útil na relação afetiva do aluno com a Matemática, com a atividade a ser desenvolvida e com a própria escola (Barbosa, 2001, Maltempi, Javaroni e Borba, 2011, Machado, 2020).

Há diversas possibilidades para a forma como o convite para o assunto mobilizador será tratado. Uma possibilidade de questionamento inicial é também um convite: “Quais questões podemos estudar sobre a população prisional?”. Analisando as competências dispostas na BNCC conforme a Figura 1, podemos perceber que o assunto mobilizador do sistema prisional brasileiro, por se tratar de uma temática dentro de um problema social relevante, nos permite explorar diversas competências como a Responsabilidade e Cidadania, Empatia e Cooperação, Pensamento Científico, Crítico e Criativo entre outros.

É interessante ainda observar que esse mesmo assunto mobilizador tem sido objeto de estudo de pesquisas atuais sob diferentes lentes teóricas e metodológicas, revelando a relevância da temática: De Oliveira Costa *et. al.* (2023) analisaram as condições de saúde da população LGBTQIAPN+ do sistema prisional brasileiro. Já Negrelli e Jacobi (2023) se debruçam sobre os tratamentos prisionais para pessoas com psicopatologias. Constantino, Assis e Pinto (2016) utilizam as técnicas de regressão linear e logística para estudar a saúde mental dos presos no estado do Rio de Janeiro. Pela atualidade e relevância da temática, acreditamos que este pode estar presente na agenda curricular escolar, mediada

pela Educação Matemática Crítica e organizada sob a ótica da BNCC. Embora um dos objetivos do cenário para investigação proposto seja conseguir um modelo que possa prever como a população prisional tem crescido e discutir as consequências e limitações do modelo, um cenário, por definição, é aberto e pode tomar vários caminhos, de modo a explorar e investigar aspectos que sejam de interesse do grupo. Algumas perguntas que podem aparecer são:

1. O que a população prisional tem a ver com a Matemática?
2. Qual é a cor dos presidiários brasileiros?
3. Qual é a escolaridade dos presidiários brasileiros?
4. Qual é a idade dos presidiários brasileiros?
5. Qual é o índice de reincidência de presidiários, ou seja, quantos ex-presidiários voltam a ser detentos?

Por fim, o professor, caso os alunos ainda não tenham levantado uma problemática equivalente, pode sugerir também a questão: a partir dos dados sobre a quantidade de presidiários brasileiros, como conseguir uma fórmula para modelar a quantidade de pessoas privadas de liberdade em função do tempo?

Nessa altura da investigação, todos são responsáveis pela escolha de quais questões serão estudadas, o que contribui para o enfraquecimento da idealização da Matemática como um conjunto de problemas fechados que apenas alguns poucos agraciados, comumente chamados de gênios, podem dominar.

#### *(ii) Levantamento de dados*

A segunda etapa da Modelagem é a busca por dados que serão necessários para o desenvolvimento da pesquisa. Nessa etapa, todos participam: professor e alunos. Em geral, essa pesquisa é realizada fora da sala de aula. O professor pode sugerir que a busca seja feita através de órgãos oficiais. No caso do estudo da população prisional do Brasil, podem ser utilizados os dados do Banco Nacional de Monitoramento de Prisões (BNMP), Levantamento Nacional de Informações Penitenciárias (Infopen), do Departamento Penitenciário Nacional (Depen) e da Secretaria Nacional de Políticas Penais (Senappen). Este último, faz um censo das unidades prisionais semestralmente<sup>1</sup>, essa coleta de informações é conduzida pelos responsáveis de cada unidade prisional. Porém, não encontramos em um mesmo site o número total de presos no Brasil de todos os anos considerados aqui. No próprio documento do BNMP de 2020 consta que, há “diferenças dos quantitativos expressos nos instrumentos, reforçando a fragilidade dos respectivos dados”<sup>2</sup>.

Os dados coletados pelos alunos são levados para o próximo encontro e precisam,

1 <https://www.gov.br/senappen/pt-br/servicos/sisdepen/bases-de-dados>

2 <https://www.cnj.jus.br/wp-content/uploads/2019/08/bnmp.pdf> (Página 17)

portanto, serem debatidos com o professor. Os alunos podem ser separados em grupos, para que haja divisão de trabalhos quanto às várias questões que apareceram na primeira etapa.

Na aula seguinte, os alunos já separados em grupos trarão os dados coletados e compararão com os dados coletados por colegas de grupo. Essa prática tem, pelo menos, dois ingredientes: i) Validar ou rejeitar os dados e como os dados foram obtidos e ii) Simplificar o problema, ou seja, verificar quais são as hipóteses necessárias e quais as teses serão levantadas a partir dessas hipóteses.

Como exemplo de análise de coleta de dados, ao pesquisar a população prisional de 2019, mesmo buscando em sites oficiais, é possível encontrar informações distintas, a depender de algumas características. As coletas oficiais, geralmente, são feitas duas vezes ao ano, gerando dois dados possíveis de serem considerados pelos alunos. Além disso, pode-se considerar a totalidade de regimes prisionais em alguns casos já em outros, pode-se, por exemplo, ser excluído o número de pessoas que cumprem penas domiciliares. Uma outra questão são as unidades prisionais e outras prisões como polícia judiciária, batalhões de polícia e bombeiros militares que podem ser considerados ou não. Mostramos como exemplo, nas Figuras 2, 3 e 4, três quantitativos distintos de presos referentes a 2019, todos coletados em fontes oficiais.

Services and Information of Brazil

### População prisional

O Levantamento Nacional de Informações Penitenciárias traz informações de todas as unidades prisionais brasileiras, incluindo dados de infraestrutura, recursos humanos, vagas, gestão, assistências, população prisional, perfil dos presos, entre outros.

Considerando presos em estabelecimentos penais e presos detidos em outras carceragens, o Infopen 2019 aponta que o Brasil possui uma população prisional de 773.151 pessoas privadas de liberdade em todos os regimes. Caso sejam analisados presos custodiados apenas em unidades prisionais, sem contar delegacias, o país detém 758.676 presos.

Figura 2: Número de presos em 2019 segundo Conselho Nacional de Justiça

Fonte: <https://www.gov.br/pt-br/noticias/justica-e-seguranca/2020/02/dados-sobre-populacao-carceraria-do-brasil-sao-atualizados>



## Unidades Prisionais e outras Prisões\*

Período de Julho a Dezembro de 2019

(\*) Polícias Judiciárias (Federal, Distrital e Estadual) e Batalhões de Polícias e Bombeiros Militares

AC AL AM AP BA CE DF DISPF ES GO MA MG MS MT PA PB PE PI PR RJ RN RO >

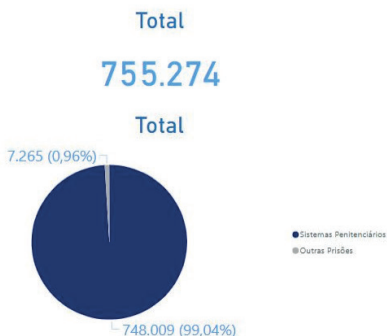


Figura 3: Número de presos em Unidades Prisionais e outras Prisões em 2019

Fonte: <https://www.gov.br/senappen/pt-br/servicos/sisdepen/paineis-anteriores>



## Presos em Unidades Prisionais no Brasil

Período de Julho a Dezembro de 2019

(\* Sem os dados das Polícias Jurisdicionais (Federal, Distrital e Estadual) e Batalhões de Polícias e Bombeiros Militares

Estadual Federal

AC AL AM AP BA CE DF ES GO MA MG MS MT PA PB PE PI PR RJ RN RO RR RS SC SE SP TO

Município  
Search

- Município
- (Em branco)
  - Abadiânia
  - Abaeté
  - Abaetetuba
  - Abre Campo
  - Abreu E Lima
  - Agatânia
  - Açoilândia
  - Acrelândia
  - Acrelândia
  - Açucena
  - Afogados da Ingazeira
  - Afonso
  - Agrestina
  - Água Boa
  - Água Formosa
  - Água Limpa de Goiás
  - Água Verde
  - Almorés
  - Alagoa Grande
- Nome do Estabelecimento
- APAC - ARCOS
  - APAC - CARIACÓPOLIS
  - APAC - CARATINGA
  - APAC - CONSELHEIRO LAFIETE
  - APAC - Conselheiro Lafaiete FEM
  - APAC - FRUTAL
  - APAC - GOVERNADOR VALADARES
  - APAC - INHÁFIM
  - APAC - ITAÚNA FEM
  - APAC - ITAÚNA MASC
  - APAC - ITUMBARA
  - APAC - JANUÁRIA
  - APAC - LAGOA DA PRATA
  - APAC - NOVA LIMA MASCULINO
  - APAC - PARAGUÁ
  - APAC - PASSOS
  - APAC - PATROCÍNIO
  - APAC - PEDRA AZUL
  - APAC - PEDRÕES



Figura 4: Número de presos em Unidades Prisionais em 2019

Fonte: <https://www.gov.br/senappen/pt-br/servicos/sisdepen/paineis-anteriores>

O processo de levantamento e validação de dados é crucial para o possível cenário proposto neste trabalho. Dado que toda a investigação é pensada com o objetivo de desenvolver a materacia (SKOVSMOSE, 2000), saber buscar fontes confiáveis de conhecimento é fundamental para interpretação e ação de uma situação estruturada pela matemática.

### *(iii) Representações de Dados*

Após o processo de validação é necessária uma classificação entre dados qualitativos e quantitativos. Não há hierarquia entre os tipos, pois enquanto os primeiros refletem explicações e compreensões, tais como as relações e condições sociais no presídio e relatos de experiência - sejam eles nominais ou ordinais -, o segundo imprime características mensuráveis por meio dos números. Em seguida, se for relevante para o cenário em questão, é necessário indagar sobre como armazenar e representar os dados da melhor maneira, caso haja.

Sobre os dados quantitativos, para os diversos tipos de problema teremos um conjunto de dados diferentes que permitem tratamentos diferentes. Nesse caso, a questão norteadora é: qual é a forma apropriada, caso ela exista, de representar os dados coletados de forma a alcançar os objetivos da situação-problema? Mais uma vez, a articulação entre a Modelagem Matemática para o ensino e os cenários para investigação aparecem de modo tácito aqui: dependendo da forma como escolhemos representar determinados dados teremos diferentes formas de interpretar o fenômeno estudado e o método da tentativa e erro permitirá aqui uma maior intuição sobre escolhas futuras. A BNCC ratifica essa visão no trecho:

“[...] é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio” (BRASIL, p. 519).

Para exemplificar, segue o caso: quando estamos estudando as idades da população prisional brasileira, os alunos perceberão que é conveniente representar as quantidades relativas (percentuais) no lugar das quantidades absolutas, pois assim poderemos interpretar os dados com melhor acurácia.

Ao observarmos os dados sobre as idades da população prisional de dezembro de 2020 dispostos na Tabela 1, temos uma forma de percepção. No entanto, esses mesmos dados também podem ser representados por meio de diferentes gráficos, que são representações que, por sua praticidade, facilitam a análise e interpretação dos dados; permitem visualizar, de forma simples, como o todo se divide em partes, ou as proporções em que os dados se dividiram. Para a educação básica, os principais tipos de gráficos são: os de colunas, barras ou setores (pizza). Para os dados da idade da população prisional, apresentamos abaixo essas três outras formas de representação: na Figura 5 utiliza-se um gráfico de colunas, na Figura 6 um gráfico de barras, e na Figura 7 é usado um gráfico de pizza.

Idade	Quantidade de presos
18 a 24 anos	174.198
25 a 29 anos	160.834
30 a 34 anos	129.529
35 a 45 anos	147.019
46 a 60 anos	53.696
Mais de 60 anos	10.273
Sem informação	72.400

Tabela 1: Idade da população prisional em dezembro de 2020

Fonte: Infopen

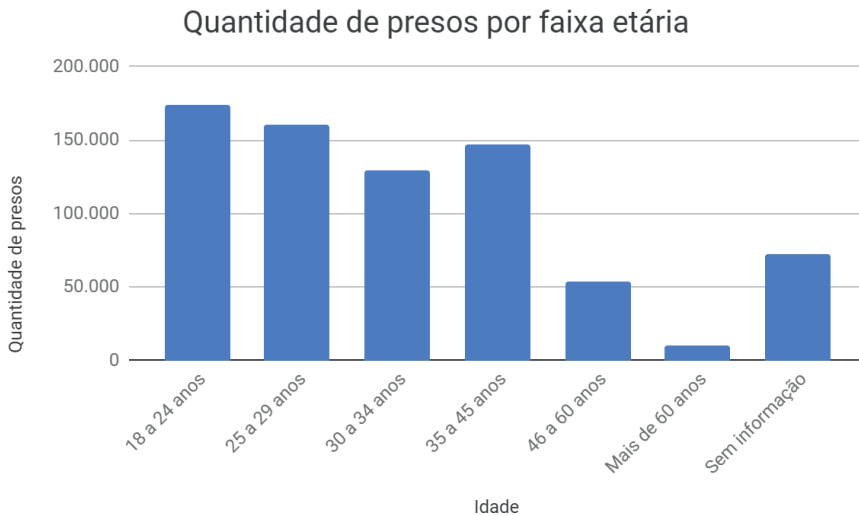


Figura 5: Idade da População Prisional Brasileira (Gráfico em Colunas)

Fonte: Acervo dos Autores

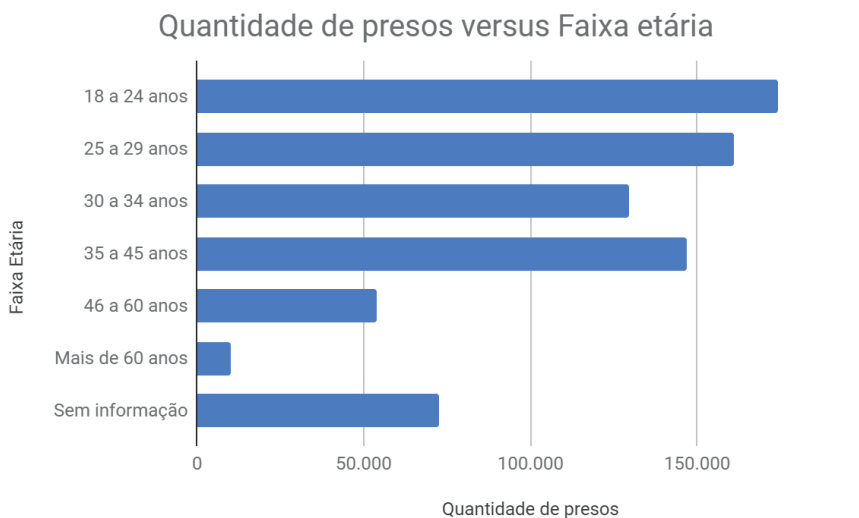


Figura 6: Idade da População Prisional Brasileira (Gráfico em Barras)

Fonte: Acervo dos Autores

### Idade da população prisional do Brasil de 2020

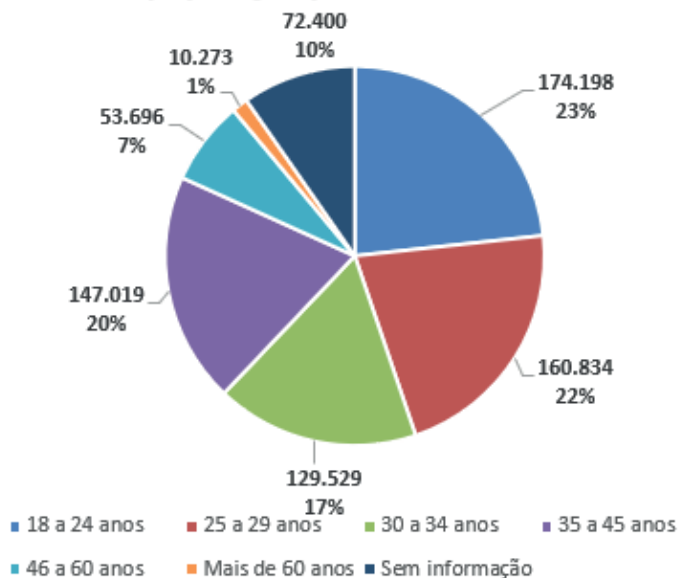


Figura 7: Idade da População Prisional Brasileira em 2020

Fonte: Acervo dos autores.

Em relação à Figura 7, destaquemos algumas características da construção desse tipo de representação: em gráficos de pizza, os dados são representados em um círculo dividido proporcionalmente de acordo com os dados da informação a ser representada. Essa proporção se relaciona com o ângulo do setor: 174.198 está para 748.009 (total da população prisional), assim como o ângulo  $83,83^\circ$  está para  $360^\circ$ ; desta forma, o uso de um gráfico deste tipo faz com que sejam retomados outros conceitos matemáticos para a sua composição. Recomendamos que os alunos possam experimentar a construção de, pelo menos, um gráfico de pizza com compasso e transferidor e os demais sejam feitos utilizando ferramentas digitais como LibreOffice<sup>3</sup>, já caminhando para uma apropriação dos aportes tecnológicos. Outras vantagens do gráfico de pizza são a eficiência visual e a condensação de informações.

Contudo, caso o interesse seja refletir sobre as quantidades absolutas, a representação poderia ser feita a partir de um gráfico de frequência em colunas (na qual a representação dos dados é feita na posição vertical) ou em barras (na qual a representação é feita em posição horizontal). Os gráficos de colunas ou de barras são ferramentas visuais que utilizam barras de diferentes alturas ou comprimentos para representar conjuntos de dados e fazer comparações entre eles; geralmente são usados para comparar medidas (como frequência, quantidade etc.) para categorias distintas de dados. Além disso, são usados quando os dados em questão são discretos (dados enumeráveis que podemos contar um a um, como, por exemplo, o número de televisões em uma casa ou o número de livros lidos durante o ano).

De modo geral, são construídos com dois eixos: um eixo mostra as categorias que estão sendo comparadas e o outro eixo apresenta o valor medido, como porcentagens ou números, por meio de barras de diferentes comprimentos. Dentre as vantagens deste tipo de representação estão a simplicidade de criação e seu fácil entendimento. Podemos notar que, em contraste com o gráfico de pizza, a construção desse tipo de gráfico (tanto de coluna como de barras) é mais simples, pois não é necessário que o estudante utilize recursos manuais ou tecnológicos para sua construção.

Nesta etapa do processo, o mais importante é que os alunos percebam que a escolha da forma de representação dos dados não deve ser feita de forma arbitrária; é fundamental que o estudante reflita sobre os dados em questão para daí tomar uma decisão sobre a representação mais adequada. Para tanto, é necessário a atuação ativa e reflexiva dos estudantes no processo de escolha e construção dos gráficos e tabelas. Dentro desse contexto, no processo do desenvolvimento da matéria, objetivamos que os alunos percebam que há uma intenção por trás da construção dos gráficos e o professor tem um papel fundamental nesse processo. Nossa defesa é que os alunos sejam agentes críticos sobre todo o processo de recepção e assimilação das informações às quais são expostos diariamente.

<sup>3</sup> Disponível em <https://pt-br.libreoffice.org/>



Após a definição e construção da representação dos dados, os gráficos ou tabelas obtidos podem ser usados para levantar discussões sobre o tema em questão. Por exemplo, os alunos podem observar e comparar dados da população brasileira para notar se a população prisional é apenas um recorte da população brasileira ou se há informações com dados conflitantes. Ou ainda, a partir das representações quantitativas, pode-se sugerir que se investigue se há correlação entre as variáveis “nível de escolaridade” e quantidade de presos. A mesma investigação pode ser realizada modificando-se a variável “nível de escolaridade” para outras, como “idade” ou “renda”.

Essas comparações podem gerar discussões interessantes em sala de aula, respaldadas pela Matemática, contribuindo assim para a formação humana, reflexiva e responsável, sempre levando em consideração a necessidade de validação das informações.

Na próxima etapa iniciaremos o estudo para a obtenção de um modelo temporal da população prisional, apresentando os elementos suficientes para a realização da modelagem com o método dos mínimos quadrados (MMQ).

#### (iv) O método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados, apesar de fora do escopo curricular tradicionalmente creditado ao Ensino Básico, permite, a partir de alguns dados tabelados, a construção de um modelo algébrico em funções conhecidas desde o início do Ensino Médio, como as funções afim e as funções exponenciais. O método de mínimos quadrados que utilizaremos é conhecido como método de regressão linear. No contexto da Educação Matemática, a utilização de métodos de regressão linear é recente: o livro *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, de 2002 de Bassanezi dedica uma seção ao estudo da técnica. Até outubro de 2023, foram produzidas 14 dissertações no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) cujo título contenha o termo “Mínimos Quadrados”, 7 dissertações cujo título contenha o termo “Regressão Linear” e outras 2 dissertações cujo título contenha o termo “Ajuste Linear”. A utilização do método de regressão linear permite que se lide com diversos temas pertinentes ao conteúdo trabalhado no Ensino Médio, como matrizes, funções polinomiais, logarítmicas e exponenciais. Além disso, ele é uma potencial solução para diversas situações problema e pode ser aplicado em diferentes áreas do conhecimento, proporcionando assim o trabalho interdisciplinar. No caso deste trabalho em específico, faremos uso da técnica para prever o crescimento da população prisional brasileira.

O MMQ é uma técnica de otimização matemática que busca encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados visando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados considerados.

Considere inicialmente um conjunto de pontos conhecidos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Nós desejamos encontrar uma reta  $\hat{y} = ax + b$  que “melhor” se ajusta aos pontos dados. Se  $\hat{y}_i - ax_i + b$  é o  $i$ -ésimo valor dado pela aproximação, para  $1 \leq i \leq n$ , então o problema consiste em encontrar as constantes  $a$  e  $b$  que minimizam

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Para que o mínimo dessa função exista, é necessário que as derivadas parciais com relação a  $a$  e  $b$  sejam nulas. Assim, apesar da demonstração das fórmulas envolvidas no método residirem fora do escopo escolar, o ganho potencial nas discussões e o ganho de autonomia quanto à pesquisa, fazem desse método uma ferramenta muito útil para o ensino básico. Neste caso, o ganho de autonomia não se refere necessariamente à competência em Matemática, mas há um ganho quanto ao sentido instrumental ou utilitário da disciplina.

Podemos encontrar os coeficientes da reta procurada pelo uso das fórmulas (para mais detalhes veja Bassanezi, 2002):

$$(1) \quad a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

$$(2) \quad b = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Com essas fórmulas já é possível determinar as aproximações de funções afim.

Na literatura encontramos também que uma forma de avaliar a qualidade do ajuste do modelo é através do coeficiente de determinação, representado por  $r^2$ . Este coeficiente indica quanto o modelo foi capaz de explicar os dados coletados, é uma medida da proporção da variação total que é explicada pelo Método de Regressão Linear. O coeficiente de determinação é dado pela expressão:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \hat{y}_i - \underline{y} \right)^2}{n \sum_{i=1}^n \left( y_i - \underline{y} \right)^2},$$

onde  $\underline{y}$  indica a média dos valores  $y_1, \dots, y_n$ .

Além de poder ser utilizado como medida da qualidade do ajustamento, este coeficiente também pode ser visto como medida da confiança na equação de regressão como instrumento de previsão. Temos que  $0 \leq r^2 \leq 1$ , e se:

- $r^2 \approx 0$ , então o modelo linear é muito pouco adequado;
- $r^2 \approx 1$ , então o modelo linear é bastante adequado.

O número de presidiários no Brasil, segundo a Infopen, tem crescido de maneira expressiva, como mostra a Tabela 2.

Ano	Nº aproximado de presos
2011	514.600
2013	581.500
2015	698.600
2017	726.300
2019	773.100

Tabela 2: Número de presos do Brasil

Fonte: Levantamento Nacional de Informações Penitenciárias (Infopen)/Ministério da Justiça (2011 a 2017) - <https://www.gov.br/senappen/pt-br/servicos/sisdepen/relatorios> (2019) - <https://www.gov.br/pt-br/noticias/justica-e-seguranca/2020/02/dados-sobre-populacao-carceraria-do-brasil-sao-atualizados>

Os valores dispostos em gráfico, são dados na Figura 8 a seguir.

Nosso objetivo agora é encontrar a reta que melhor se ajusta aos dados tabelados. Isso é, queremos determinar a equação da reta  $\hat{y} = ax + b$  que mais se aproxima dos pontos  $y_i$  da Tabela 2. Utilizando as fórmulas (1) e (2) e fazendo uso de uma planilha eletrônica<sup>4</sup>, associando os anos de 2011, 2013, 2015... a 1, 2, 3, ..., encontramos  $a = 66.180$  e  $b = 460.280$ . Logo, a equação da reta procurada é dada por:

$$\hat{y} = 66.180x + 460.280$$

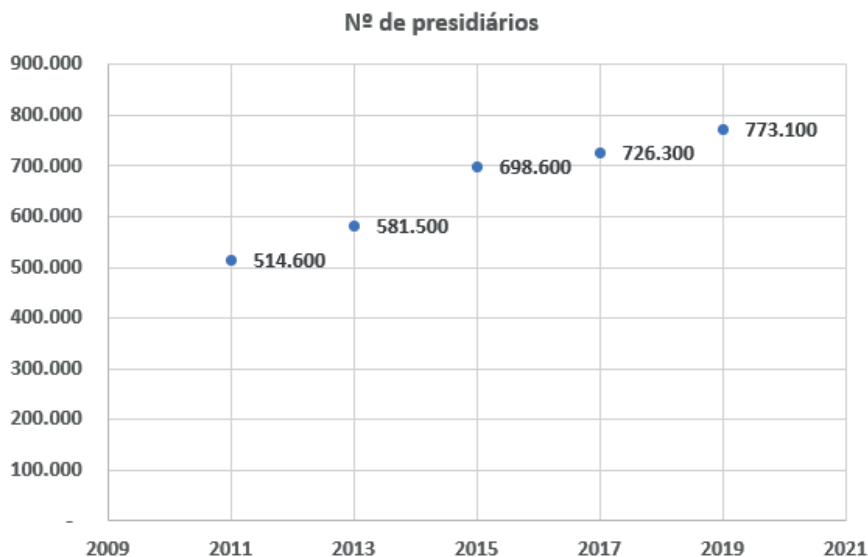


Figura 8: Disposição gráfica da População Prisional Brasileira ao Longo do Anos.

Fonte: Produzida pelos autores

<sup>4</sup> Tutorial disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Lgn8j8OAJis>

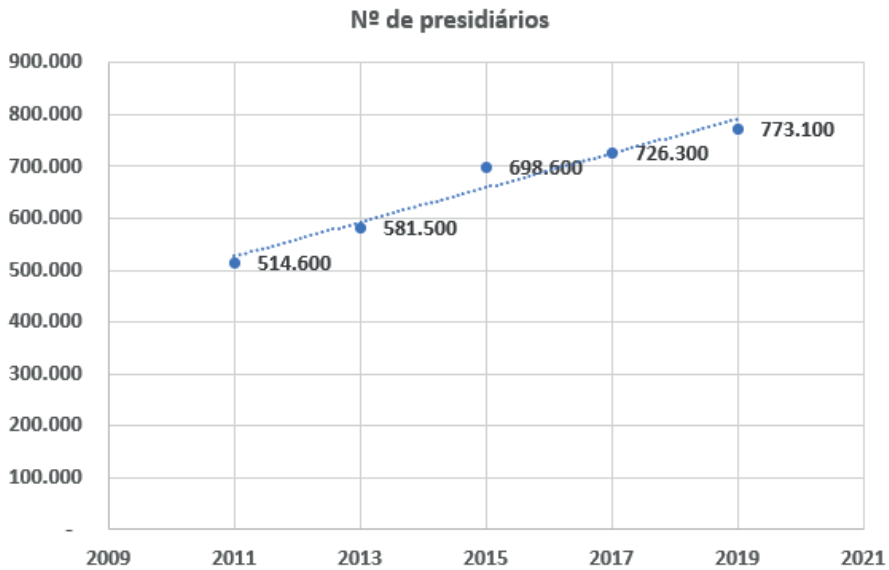


Figura 9: Reto obtida pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Fonte: Produzida pelos autores

Uma questão que pode aparecer naturalmente é se o tipo de função mais adequada não seria exponencial, pois tais funções são responsáveis por modelar grandezas que crescem rapidamente em relação a outras.

Vamos ver agora que é possível adaptar o método para procurar a função exponencial  $\hat{y} = Be^{Ax}$  que melhor se ajusta aos pontos tabelados utilizando o método dos mínimos quadrados. Queremos minimizar a função:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^5 (y_i - Be^{Ax})^2$$

Aplicando o logaritmo na igualdade  $\hat{y} = Be^{Ax}$ , obtemos:

$$\ln(\hat{y}) = \ln(B) + Ax \rightarrow z = ax + b,$$

com  $z = \ln(\hat{y})$ ,  $\alpha = A$  e  $b = \ln(B)$ .

Novamente, utilizando os mesmos dados da Tabela 2 e realizando os cálculos através de uma planilha eletrônica, encontramos  $B = 477.409$  e  $A = 0,1096$ . Logo, a equação da função exponencial procurada é dada por:

$$y = 477.409 e^{0,1096x}$$

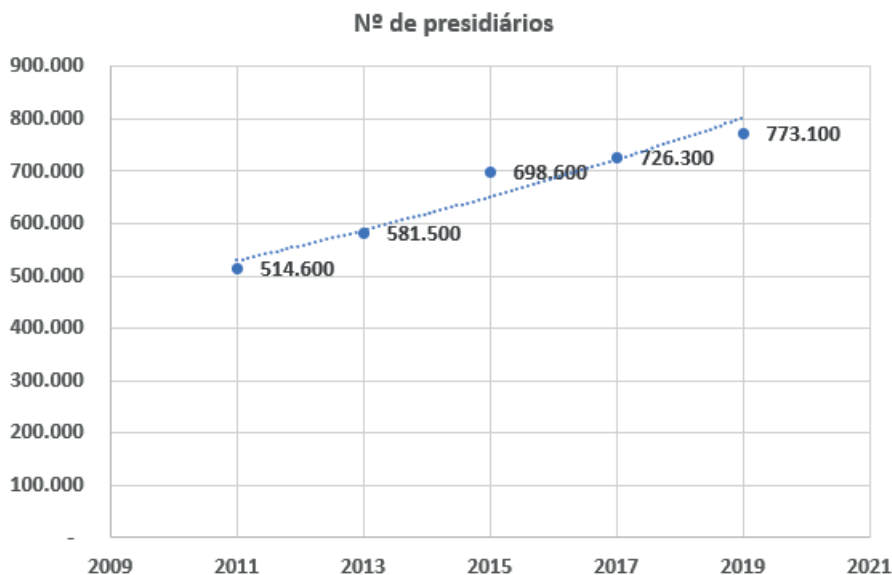


Figura 10: Crescimento da População Prisional Brasileira - Versão Exponencial

Fonte: Acervo dos autores.

No estudo feito aqui, temos que o caso linear tem coeficiente  $r^2 = 0,9526$  e no caso exponencial, o coeficiente é  $r^2 = 0,9377$ . De onde concluímos que a função linear parece ser uma melhor aproximação dos dados considerados.

O próximo e último passo é validar o modelo e, além disso, utilizá-lo como base para uma discussão que transcende a própria disciplina da Matemática. Vejamos, por exemplo, os ajustes linear e exponencial para os dados do intervalo temporal, ou seja, podemos verificar como ficaram os ajustes nos anos ímpares de 2011 a 2019.

Ano	Dados Observados	Ajuste Linear	Erro Relativo (Linear)	Ajuste Exponencial	Erro Relativo (Exponencial)
2011	514.600	526.460	2,3%	532.708	3,5%
2013	581.500	592.640	1,9%	594.412	2,2%
2015	698.600	658.820	5,6%	663.264	5,0%
2017	726.300	725.000	0,1%	740.091	1,8%
2019	773.100	791.180	2,3%	825.817	6,8%

Tabela 3: Dados observados versus ajustes da População Prisional

Fonte: Produzido pelos autores.

Considerando que os ajustes realizados se deram no intervalo de 2011 a 2019, e que, agora, possuímos alguns dados mais atuais, podemos investigar se as projeções obtidas a partir do modelo foram acuradas. Na Tabela 4 são apresentadas as projeções dos casos exponencial e linear, além dos dados reais para os anos de 2020, 2021 e 2022.

Ano	Caso Exponencial	Caso Linear	Dados
2020	872.335	824.270	811.707
2021	921.473	897.068	834.845
2022	984.106	907.880	832.950

Tabela 4: Projeções versus dados da População Prisional

Fonte: Produzido pelos autores.

Na Tabela 4, podemos observar que o ajuste dos dados no caso linear é mais próximo dos dados reais do que os valores projetados pela função exponencial. A diferença entre as projeções e os dados reais aumenta com o passar dos anos, ressaltando a necessidade de atualizar o modelo continuamente. Na etapa (v) a seguir, serão sugeridos questionamentos para investigar com mais profundidade tais situações.

Com as funções encontradas no presente artigo, podemos fazer novas projeções das populações prisionais para os próximos anos. Na Tabela 5 a seguir, são apresentadas algumas delas.

Ano	Presos (exponencial)	Presos (linear)
2028	1.352.315	1.088.840
2033	1.778.585	1.254.240
2038	2.610.178	1.485.800
2043	3.076.579	1.585.040

Tabela 5: Projeções para a População Prisional

Fonte: Produzida pelos autores.

Como podemos ver, o crescimento exponencial, a longo prazo, se distancia bastante do crescimento linear. Isso quer dizer que se o crescimento da população prisional brasileira for geométrico, o número de presidiários aumentará consideravelmente no futuro. No entanto, quanto mais distante for a previsão, provavelmente, menos preciso será o resultado, confirmando que o método precisa ser continuamente atualizado.

#### *(v) Algumas reflexões propositivas*

Após a realização das etapas anteriores, diversas questões podem ser levantadas sobre o tema trabalhado. O momento de reflexões é parte fundamental do cenário, de modo

a questionar o poder formatador da Matemática, além de ser socialmente responsável, convidando os alunos a levantarem perguntas e refletirem sobre as possíveis soluções para os problemas em questão.

Assim, o professor pode sugerir alguns questionamentos para serem discutidos com os alunos, como por exemplo:

- a. Por que há tanta divergência entre o caso exponencial e o caso linear com o passar dos anos? Em 2043, por exemplo, há uma diferença prevista de cerca de 1,5 milhões de presos.
- b. Será que haverá algum momento em que toda a população brasileira estará presa, de acordo com essas projeções? Como achar esse momento? Isso faz sentido no mundo real?
- c. Será que existem políticas socioeconômicas que poderiam conter o aumento da população prisional? Ao longo de toda a atividade, foi possível identificar fatores que contribuem para o aumento da população prisional?
- d. Quais foram as vantagens/limitações/desafios encontrados ao trabalhar uma questão social a partir da Matemática?

As reflexões propositivas são parte fundamental do cenário. É nela que ocorre a autoavaliação dos sujeitos envolvidos. É refletindo e ensinando a refletir que atuamos como educadores. Com a reserva de um momento para a reflexão sobre o trabalho executado, esperamos que o aluno perceba as vantagens, desafios e limitações do cenário e das estratégias e matemáticas utilizadas para resolução. Nesse sentido, acreditamos que há um ganho multifacetado na formação: a formação cidadã, incutida na reflexão de problemas sociais importantes, a instrumentalidade matemática como ferramenta para resolução de problemas, a reflexão quanto ao uso da própria matemática, como uma forma de compreender a realidade, entre outros. Uma atividade como essa não se restringe aos ganhos de conteúdos técnicos de matemática, uma vez que a própria matemática é o meio pelo qual a discussão se torna interpretável.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho são apresentados encaminhamentos para um possível cenário para investigação mediados pela abordagem pedagógica da Modelagem Matemática, sob as perspectivas teóricas da Educação Matemática Crítica e sob a égide da BNCC.

Como objeto de estudo, o possível cenário contemplou a questão do crescimento da população prisional brasileira, apontando questionamentos e investigando como a Matemática pode contribuir para a compreensão dessa situação. Na organização da atividade são sugeridas as etapas que servem de suporte ao trabalho docente, às quais podem ser adaptadas pelo professor de acordo com sua realidade, não sendo, portanto,

uma estrutura rígida a ser seguida. Nesta proposta, em contraste com o paradigma do exercício, os estudantes são convidados a levantarem suas próprias questões e reflexões, buscando estimular a adoção de uma postura mais ativa e engajada nos discentes.

Pela natureza do cenário proposto, diversos conteúdos matemáticos podem ser revisitados ou introduzidos durante a discussão: diferentes formas de representação de dados, diferentes tipos de gráficos, geometria plana, regra de três, porcentagens, estudo das funções afim e exponencial etc. Além disso, para a etapa de obtenção de um modelo matemático para os dados, é sugerido o uso do método dos mínimos quadrados, sendo apresentados os fundamentos teóricos dessa importante ferramenta.

Ao considerar o potencial transformador de uma proposta que utiliza a Modelagem Matemática, aliada a uma perspectiva crítica de ensino, nossa proposta visa uma abordagem que transcende a mera aplicação de modelos matemáticos para alcançar uma compreensão da realidade. Acreditamos que, ao explorar/ investigar temas e contextos significativos para os alunos e encorajá-los a se envolverem ativamente com a construção do conhecimento, podemos promover uma educação matemática que não apenas desenvolve habilidades técnicas, mas também busca contribuir para a formação de cidadãos conscientes e atuantes em uma sociedade em constante evolução.

## REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*, Editora Contexto, São Paulo, 2002.

BARBOSA, J. C. *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais[...]. Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C. *Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como?* **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 850 Paulo—SP: Contexto. 2005.

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. A ideologia da certeza em educação matemática. In: SKOVSMOSE, O. Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: **Papirus**, 2001. cap. 5. p.127-148.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BURAK, D. *Modelagem matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula*. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**. Vol. 1, n. 1, p. 10-27 2010.

CANEDO, Neil da Rocha; KISTEMANN, Marco Aurélio. *Modelagem na Educação Básica: uma possibilidade para a sala de aula de matemática*. Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática. UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, 2014.



CARDOSO, Virgínia Cardia. SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, v. 2, n. 1, p. 60-64, 2017.

CONSTANTINO, Patricia; ASSIS, Simone Gonçalves de; PINTO, Liana Wernersbach. *O impacto da prisão na saúde mental dos presos do estado do Rio de Janeiro, Brasil*. **Ciência & Saúde Coletiva**, v. 21, p. 2089-2100, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.org/article/csc/2016.v21n7/2089-2100/pt> Acesso em out. 2023

DE OLIVEIRA COSTA, Muryllo et al. *Condições de saúde da população LGBTQIAPN+ no sistema prisional: revisão integrativa de literatura*. **Odeere**, v. 8, n. 2, p. 165-177, 2023. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/odeere/article/view/12350> Acesso em out. 2023

DIAS, Marcelo de Oliveira e PINTO, Gisela Maria da Fonseca. Proposta de um Caminho para Possíveis Abordagens das Fake News na Perspectiva da BNCC. **Cenas Educacionais**. Caetité - Bahia, v.5, n.e16720, p1-22. 2023.

MACHADO, Leandro da Silva; MUSMANNO, Leonardo Maricato; ALMEIDA, Moisés Ceni; SOUSA, Sérgio Gonçalves. *Relato de Experiência: Probabilidade no Ensino Médio*. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v.25, n. 66, p. 239 – 250, 2020.

MALTEMPI, Marcus Vinicius, JAVARONI, Sueli Liberatti e BORBA, Marcelo de Carvalho. “*Calculadoras, Computadores e Internet em Educação Matemática: dezoito anos de pesquisa*.” **Bolema-Boletim de Educação Matemática** 25.41, p. 43-72, 2011..

NEGRELLI, Ariely; JACOB, Alexandre. *TRATAMENTO PRISIONAL PARA DETENTOS COM PSICOPATOLOGIA*. **Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro**, v. 10, n. 1, 2023. Disponível em: <https://revista.unipacto.com.br/index.php/multidisciplinar/article/view/1566> Acesso em out. 2023

PESSÔA, Esther Bahr; JÚNIOR, Valdir Damázio. *Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de matricia nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um olhar através dos Parâmetros Curriculares Nacionais*. **Revista BOEM**, v. 1, n. 1, p. 76-98, 2013.

SKOVSMOSE, O. *Cenários para investigação*. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas - SP: Papirus, 2013.

VICENTINI, Dayanne; VERÁSTEGUI, Rosa de Lourdes Aguiar. *A pedagogia crítica no Brasil: a perspectiva de Paulo Freire*. **Semana da educação**, v. 16, 2015.

TERES, Silvana Leonora Lehmkuhl. *Em direção à educação matemática crítica: a análise de uma experiência de modelagem pautada na investigação e no uso da tecnologia*. Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade do Vale do Itajaí, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Itajaí, SC, 2014.