CAPÍTULO 7

COMPONENTE NORMAL DE LA ACELERACIÓN PARA DIFERENTES TIPOS DE RADIOS DE CURVATURA

Data de aceite: 01/12/2023

Carlos Figueroa Navarro
Universidad de Sonora

Lamberto Castro Ace
Universidad de Sonora

ABSTRACT: Para una buena comprensión de la mecánica vectorial, es indispensable obtener conocimientos en temas de aceleración, fuerza, trabajo, principio de conservación de la energía, momento lineal y angular. En este trabajo se hace una recopilación de los desarrollos matemáticos de las asignaturas de cálculo diferencial y de mecánica vectorial dinámica, en la temática relacionada a generar la fórmula del radio de la curvatura en un plano y su aplicación en la determinación de la componente normal de la aceleración. Se incluyen varios perfiles de curva tales como elíptica, logarítmica y trigonométrica, se incluye también un perfil de curva tipo ji cuadrada, El objetivo es mostrar los conocimientos de cálculo que intervienen en el estudio de mecánica newtoniana.

1 I ACELERACIÓN EN SU COMPONENTES NORMAL Y TANGENCIAL

Se inicia recordando la definición de la aceleración en su tratamiento vectorial. Primeramente, se establece la ecuación de la velocidad en un movimiento curvilíneo.

$$\vec{v} = v\hat{e}_t \tag{1}$$

Dado que va cambiando la trayectoria, se obtiene la aceleración derivando con la fórmula del producto.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt} \tag{2}$$

Asimismo, es posible demostrar que la derivada del vector unitario tangencial es la velocidad angular en dirección normal.

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_n \tag{3}$$

Por tanto, ahora el vector aceleración es.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_n \tag{4}$$

Ahora usando la ecuación de longitud de arco y la de velocidad tangencial.

$$\frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \frac{v}{\rho} = \frac{d\theta}{dt} \tag{5}$$

Se tiene el vector aceleración en sus componentes tangencial y normal.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n \tag{6}$$

$$\vec{a} = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n \tag{7}$$

2 I OBTENCIÓN DE LA RADIO DE LA CURVATURA

A continuación, se tiene el desarrollo matemático [1] para generar la fórmula de radio de curvas.

Se tienen las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Se tiene el radio en la figura 1.

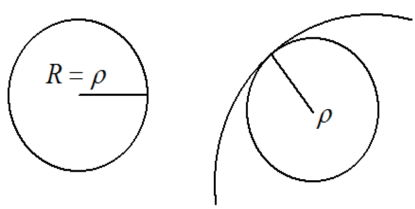

Figura 1. Radio de la curvatura

Recordando que la función tangente es.

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \tag{10}$$

Para ecuaciones paramétricas se aplica la regla de la cadena tal que.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dt}{dt}\right) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{11}$$

La figura 2 muestra la interpretación:

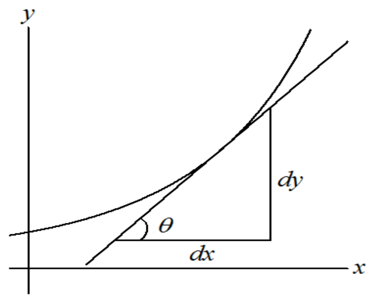

Figura 2. La pendiente de la tangente

Entonces ahora podemos escribir la función tangente como.

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{12}$$

De igual manera recordamos la derivada de la tangente.

$$\frac{d\tan\theta}{d\theta} = \sec^2\theta\dot{\theta} \tag{13}$$

Igualando las ecuaciones derivadas se tiene.

$$\sec^2\theta\dot{\theta} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \tag{14}$$

Usando la identidad trigonométrica.

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{15}$$

Al sustituir

$$\left[1 + \tan^2\theta\right]\dot{\theta} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \tag{16}$$

Usando la ecuación (12).

$$\left[1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right]\dot{\theta} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \tag{17}$$

Y se obtiene la relación entre velocidad angular y derivadas.

$$\left[\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right]\dot{\theta} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \tag{18}$$

$$\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2\right]\dot{\theta}=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y} \tag{19}$$

$$\dot{\theta}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{20}$$

La figura 3 nos ayuda a comprender la relación entre las variables de le ecuación (20).

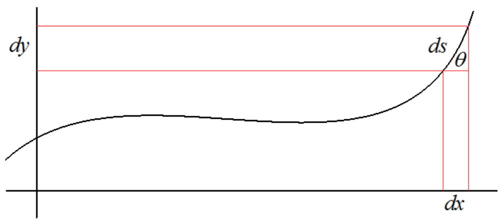

Figura 3. Derivadas y longitud de arco

De tal manera que.

$$ds^2=dx^2+dy^2 \tag{21}$$

$$\dot{s}^2=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{22}$$

La figura 4 describe la definición:

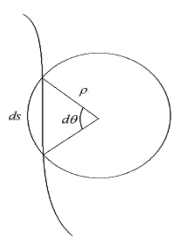

Figura 4. Diferencial de arco y radio de curvatura

En efecto, se tiene que.

$$ds=\rho d\theta \tag{23}$$

Con la regla de la cadena.

$$\rho=\frac{ds}{d\theta}\left(\frac{dt}{dt}\right) \tag{24}$$

Por tanto, se determina el radio de la curvatura con ecuaciones paramétricas.

$$\rho = \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} \tag{25}$$

Combinando las ecuaciones (20) y (22).

$$\rho = \frac{\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{\dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}} \tag{26}$$

Finalmente se tiene el radio de la curvatura para ecuaciones paramétricas.

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \tag{27}$$

Tal resultado se usa ahora para la derivación de la fórmula para una función $f(x)$.

Se inicia con la segunda derivada.

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \tag{28}$$

Se aplica regla de la cadena.

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\left(\frac{dt}{dt}\right) \tag{29}$$

Podemos escribir una de las derivadas del tiempo como se señala a continuación.

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\left(\frac{dt}{1}\right)\left(\frac{1}{\dot{x}}\right) \tag{30}$$

Y utilizando fórmula del cociente

$$= \left(\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\right)\left(\frac{1}{\dot{x}}\right) \tag{31}$$

Por tanto, se tiene ahora.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \tag{32}$$

Ahora se recurre a la fórmula para ecuación paramétrica (27).

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \tag{33}$$

L a cuál se reescribe como.

$$= \frac{\dfrac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left(\dot{x}\right)^3}}{\dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}\right)^3}} = \frac{\dfrac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\left(\dot{x}^2\right)^{3/2}}}{\dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}\right)^3}} \tag{34}$$

Se identifican el denominador tal que obtenemos el radio de la curvatura en un plano.

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{3/2}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)} \tag{35}$$

A continuación, se presentan un conjunto de cálculos para diferentes trayectorias.

3 I TRAYECTORIA EN PISTA ELÍPTICA

El primer cálculo es para un movimiento de una pista elíptica, [2] de la figura 5 se inicia con la ecuación de la elipse y se determina el radio de la curvatura en y=0.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{36}$$

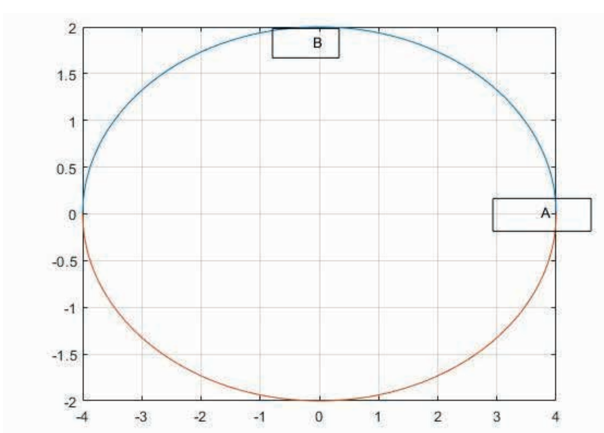

Figura 5. Pista elíptica

Al efectuar la derivada se tiene primero la función y se evalúa.

$$x(y) = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2} \tag{37}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{b^2}\frac{y}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\Bigg|_{y=0} = 0 \tag{38}$$

Se procede a efectuar la segunda derivada.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(-\frac{a}{b^2}y\right)\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{39}$$

Aplicando fórmula del producto de derivadas.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{a}{b^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\Bigg|_{y=0} + \frac{a}{2b^2}\left[1-\left(\frac{y}{b^2}\right)\right]^{-3/2}\frac{2y}{b^2}\bigg|_{y=0} = -\frac{a}{b^2} \tag{40}$$

Se desea determinar radio de la curvatura con los siguientes datos:
$a = 4, \ b = 2$.

$$\rho = \frac{\left[1-x'(y)\right]^{3/2}}{\left|x''(y)\right|} = \frac{b^2}{a} = \frac{2000^2}{4000} = 1000 \tag{41}$$

Ahora se procede a calcular la aceleración normal para una velocidad de 66.66 m/s.

$$a_A = \frac{v^2}{\rho} = \frac{66.66^2}{1000} = 4.44 \ m/s^2 \tag{42}$$

Para calcular la aceleración en x=0 es conveniente trabajar con la función y(x).

$$y(x) = b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \tag{43}$$

Aplicamos mismo procedimiento.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\Bigg|_{x=0} = 0 \tag{44}$$

Se continua con segunda derivada.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{b}{a^2}x\right)\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{45}$$

Aplicando fórmula del producto.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\Bigg|_{x=0} + \frac{b}{2a^2}\left[1-\left(\frac{x}{a^2}\right)\right]^{-3/2}\frac{2x}{a^2}\Bigg|_{x=0} = -\frac{b}{a^2} \tag{46}$$

Por tanto, se tiene el radio de la curvatura.

$$\rho = \frac{\left[1-y'(x)^2\right]^{3/2}}{\left|y''(x)\right|} = \frac{a^2}{b} = \frac{4000^2}{2000} = 8000m \tag{47}$$

Se calcula la aceleración normal.

$$a_B = \frac{v^2}{\rho} = \frac{66.66^2}{8000} = 0.55\ m/s^2 \tag{48}$$

4 I AVIÓN CON TRAYECTORIA LOGARÍTMICA Y UNA V=110 M/S

Se tiene la trayectoria dada por la ecuación siguiente [2] y de figura 6.

$$y = 15\ln\left(\frac{x}{80}\right) \tag{49}$$

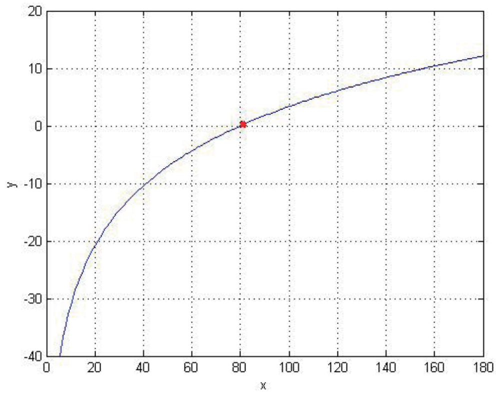

Figura 6. Trayectoria logarítmica

Se procede a efectuar la primera derivada y evaluarla en la coordenada x=80.

$$y' = 15\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x}{80}\right) = 15\frac{80}{x}\frac{1}{80} = \left.\frac{15}{x}\right|_{x=80} = 0.1875 \tag{50}$$

Segunda derivada.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{15}{x}\right) = -\left.\frac{15}{x^2}\right|_{x=80} = -0.0023 \tag{51}$$

Se calcula el radio de la curvatura.

$$\rho = \frac{\left[1 - y'(x)^2\right]^{3/2}}{\left|y''(x)\right|} = \frac{\left[1 + 0.1875^2\right]^{3/2}}{\left|-0.0023\right|} = 449.4m \tag{52}$$

Se determina la aceleración normal.

$$a = \frac{v^2}{\rho} = \frac{110^2}{449.4} = 26.9\ m/s^2 \tag{53}$$

5 I TRAYECTORIA DE CICLISTA

Se tiene ahora un movimiento en una curva cuyo perfil está dado por. [2].

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2} \tag{54}$$

La figura 7 indica los puntos de interés.

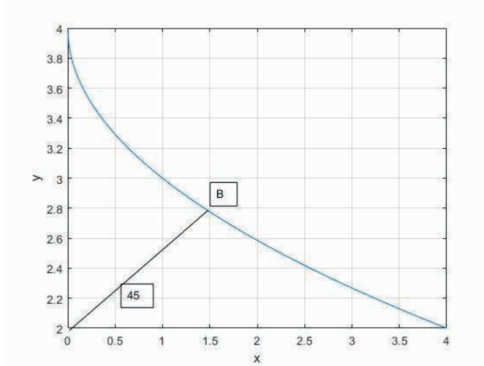

Figura 7 ciclista

Con el principio de conservación de energía se puede calcular la velocidad en el punto B para una velocidad dada.

$$\frac{1}{2}Mv_A^2 = \frac{1}{2}Mv_B^2 + Mgy \tag{55}$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gy} = 6.66\,m/s \tag{56}$$

Se continua con la obtención de la derivada de la ecuación (54).

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gy} = 6.66\,m/s \tag{57}$$

Asimismo, se puede escribir como:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{58}$$

Efectuando el despeje.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \tag{59}$$

Recordamos la fórmula para derivar cocientes.

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vu' - uv'}{v^2} \tag{60}$$

Se tiene entonces que la segunda derivada es.

$$d\left(\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\right) = -\frac{x^{1/2}\frac{1}{2}y^{-1/2}dy - y^{1/2}\frac{1}{2}x^{-1/2}dx}{\left(x^{1/2}\right)^2} \tag{61}$$

Que e puede reescribir como.

$$y'' = \frac{\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}}{2x} \tag{62}$$

De igual manera se sigue que.

$$y'' = \frac{\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dx}{dy}\right)x}{2xx} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y} - \frac{x^{3/2}}{\sqrt{y}}\frac{dx}{dy}}{2x^2} \tag{63}$$

Factorizando el radical.

$$y'' = \frac{y - x\frac{dx}{dy}}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{y}} \tag{64}$$

Las coordenadas del punto B y considerando la ecuación (59).

$$y = x, \quad y' = -1 \tag{65}$$

Al sustituir en la ecuación 64 se tiene.

$$y'' = \frac{y - yy''}{2y^2} = \frac{y - y(-1)}{2y^2} = \frac{1}{y} \tag{66}$$

Ahora se puede determinar el radio de la curvatura.

$$\rho = \frac{\left[1 - y'\right]^{3/2}}{|y''|} = \sqrt{8}y = 2.828m \tag{67}$$

6 I TRAYECTORIA CURVA TIPO JI CUADRADA

Ahora nos enfocamos en una trayectoria dada por la ecuación y su gráfica de la figura 8.

$$y = xe^{-x} \tag{68}$$

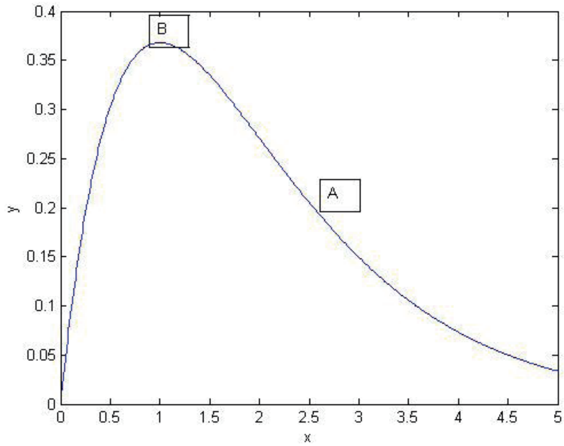

Figura 8. Trayectoria tipo Ji cuadrada

Se procede a efectuar las derivadas y evaluar en A.

$$y' = (1-x)e^{-x}\Big|_{x=2.5} = -0.123 \tag{69}$$

$$y'' = xe^{-x} - 2e^{-x}\Big|_{x=2.5} = 0.0410 \tag{70}$$

Se determina el radio de la curvatura.

$$\rho = \frac{\left[1+(-0.123)^2\right]^{3/2}}{|0.0410|} = 29.02 \text{ m} \tag{71}$$

La aceleración normal para una velocidad dada es.

$$a_A = \frac{v^2}{\rho} = \frac{66.66^2}{29.02} = 153.12\ m/s^2 \tag{72}$$

Para el punto A se efectúa el mismo procedimiento.

$$y' = (1-x)e^{-x}\Big|_{x=1} = 0 \tag{73}$$

$$y'' = xe^{-x} - 2e^{-x}\Big|_{x=1} = -0.3678 \tag{74}$$

Por tanto, el radio de la curvatura es.

$$\rho = \frac{\left[1+0^2\right]^{3/2}}{|-0.3678|} = 2.7188 \text{ m} \tag{75}$$

Y por último, la aceleración en A es.

$$\rho = \frac{\left[1+0^2\right]^{3/2}}{|-0.3678|} = 2.7188 \text{ m} \quad (76)$$

7 | TRAYECTORIA TIPO FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Se considera por último una trayectoria de la figura 9, con a =20 y b=40. [2].

$$y = b\cos\left(\frac{\pi x}{3a}\right) \quad (77)$$

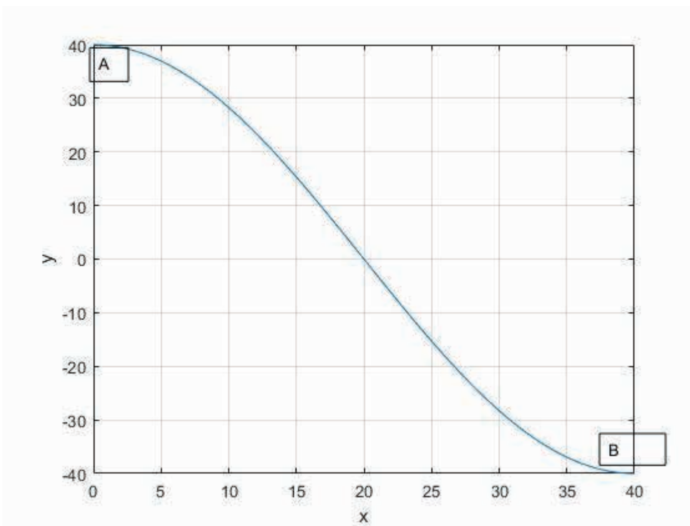

Figura 9. Función coseno

Se procede a derivar y evaluar.

$$y' = \frac{-b\pi}{3a} sen\left(\frac{\pi x}{3a}\right) \quad (78)$$

$$y'\big|_{x=a} = \frac{-50\pi}{3*25} sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.81 \quad (79)$$

La segunda derivada.

$$y'' = \frac{-b\pi}{9a^2}\cos\left(\frac{\pi x}{3a}\right) \quad (80)$$

Al sustituir se tiene.

$$y''\big|_{x=a} = \frac{-50\pi}{9*25^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.01 \quad (81)$$

Entonces el radio de la curvatura es.

$$\rho = \frac{\left[1+1.81^2\right]^{3/2}}{0.01} = 884.19 \ ft \tag{82}$$

Y se desea conocer el ángulo en esa posición es:

$$\tan\theta = y' = 1.81 \qquad \theta = 61^0 .$$

8 I CONCLUSIONES

Se han presentado un conjunto de ejercicios de cálculo diferencial con un enfoque para ser aplicado en la dinámica mecánica de cursos de ingeniería. En el primer tema de la definición de aceleración en sus componentes normal y tangencial, debe presentarse el desarrollo matemático que demuestra la relación entre el vector unitario tangencial y normal, Ec. (3) que es un cálculo fácil de elaborar. Para la determinación de la fórmula del radio de la curvatura, es necesario discutir y analizar más detenidamente las derivadas que se presentan, principalmente la Ec. (30). En la pista elíptica, se debe comentar que es mayor la aceleración en el punto A, que en el punto B, debido precisamente a los radios respectivos. También sucede lo mismo en la trayectoria tipo ji cuadrada La trayectoria del ciclista tiene un cálculo muy interesante para poder incluir en los cursos. Por último, se debe señalar que los cálculos aquí presentados tienen un valor estético y pedagógico, que debe ser considerado por los maestros y alumnos que estudien la mecánica newtoniana y el cálculo diferencial. Hibbeler y Bedford [2] y [3] son textos excelentes en ese sentido. Fuentes muy recomendadas son también [4] y [5], que consideramos tienen mayor demanda de destreza algebraica para su estudio.

REFERENCIAS

[1] L. Leithold. El Cálculo con Geometría Analítica. Edit. Oxford University Press. (2009).

[2]. R.C. Hibbeler. Ingeniería Mecánica Dinámica. Edit. Prentice Hall (2010).

[3]. A. Bedford, W. Fowler. Mecánica Para Ingenieros: Dinámica. Edit. Pearson education. (2008).

[4]. F. Beer & E. Russell Johnston. Mecánica Vectorial para Ingenieros: Edit. McGraw Hill. (1997).

[5]. B. H.Tongue , S. D. Sheppard. Dinámica. México: Edit. Limusa Wiley. (2009).