

# NOVA DISTRIBUIÇÃO WEIBULL INVERTIDA COSSENO TIPO I: METODOLOGIA E ESTIMAÇÃO

*Data de submissão: 31/11/2023*

*Data de aceite: 01/12/2023*

### **Cleber Bisognin**

Departamento de Estatística – UFSM  
Santa Maria – RS  
<https://orcid.org/0000-0002-0714-3739>

### **Augusto Maciel da Silva**

Departamento de Estatística – UFSM  
Santa Maria – RS  
<https://orcid.org/0000-0002-3230-3343>

**RESUMO:** O desenvolvimento e aprimoramento de metodologias estatísticas aliadas ao uso eficiente de bancos de dados, possibilitam a extração de informações valiosas para embasar decisões e descobrir padrões e comportamentos ocultos, impulsionando o progresso e a inovação em diversas áreas de atuação. A criação de novas distribuições e o aperfeiçoamento das já existentes desempenham um papel crucial na otimização das análises e na contínua melhoria da precisão nos processos de inferência estatística. Nesse sentido, uma alternativa na modelagem estatística é a utilização da distribuição Weibull Invertida, que tem grande utilização em estudos de confiabilidade e análise de sobrevivência. Um forma de aprimorar e estender essas distribuições é a utilização de geradores

de distribuição. O gerador Cosseno Tipo I (TIC) é um tipo de gerador que não introduz complexidade no espaço paramétrico resultante, por não acrescentar parâmetros na nova distribuição e ainda assim captar diferentes situações na modelagem. Assim, o objetivo desse trabalho é propor uma nova distribuição baseada na Weibull Invertida com a utilização do gerador TIC, chamada aqui de Cosseno Tipo I Weibull Invertida com parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  e denotada por TICIW. Um estudo sobre a estimação dos parâmetros dessa nova distribuição foi realizado através do método de estimação de máxima verossimilhança e foi avaliado através de Simulação de Monte Carlo com 10000 réplicas e tamanhos amostrais . Para avaliação do Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV), foram utilizadas como medidas de desempenho a média, o viés, o viés relativo (VR), o desvio padrão (DP), o erro quadrático médio (EQM), coeficiente de assimetria (CA) e curtose (K). O resultado desse estudo de simulação, amparado pelas medidas utilizadas comprovou a acurácia e precisão dos estimadores advindos da nova distribuição TICIW.

**PALAVRAS-CHAVE:** Gerador TIC, distribuição Weibull Invertida, estimação de

## NEW COSINE-TYPE I INVERTED WEIBULL DISTRIBUTION: METHODOLOGY AND ESTIMATION

**ABSTRACT:** The development and improvement of statistical methodologies, combined with the efficient use of databases, enable the extraction of valuable information to support decision-making and uncover hidden patterns and behaviors, driving progress and innovation in various fields. The creation of new distributions and the enhancement of existing ones play a crucial role in optimizing analyses and continually improving the accuracy of statistical inference processes. In this context, an alternative in statistical modeling is the use of the Inverted Weibull distribution, which is widely used in reliability studies and survival analysis. One way to enhance and extend these distributions is the use of distribution generators. The Cosine Type I Generator (TIC) is a type of generator that does not introduce complexity into the resulting parametric space, as it does not add parameters to the new distribution while still capturing different modeling situations. Therefore, the aim of this work is to propose a new distribution based on the Inverted Weibull with the use of the TIC generator, referred in this work as Cosine Type I Inverted Weibull with parameters  $\alpha$  and  $\lambda$  and denoted as TICIW. A study on the parameter estimation of this new distribution was conducted using the maximum likelihood estimation method and evaluated through Monte Carlo Simulation with 10000 replications and sample sizes  $n$ . To assess the Maximum Likelihood Estimator (MLE), performance measures such as mean, bias, relative bias (RB), standard deviation (SD), mean squared error (MSE), skewness coefficient (SC), and kurtosis (K) were used. The result of this simulation study, supported by the measures used, confirmed the accuracy and precision of the estimators derived from the new TICIW distribution.

**KEYWORDS:** TIC generator, Inverted Weibull distribution, maximum likelihood estimation, Monte Carlo simulation

## 1 | INTRODUÇÃO

A distribuição Weibull Invertida (IW), desenvolvida por Keller e Kamath(1982), é um modelo estatístico que tem sido amplamente utilizado em diversas pesquisas para analisar dados de confiabilidade, tempo de vida, falhas e sobrevivência. Ela é especialmente valiosa em casos em que a taxa de falhas inicialmente aumenta com o tempo, antes de estabilizar ou diminuir. A distribuição Weibull Invertida é caracterizada por sua flexibilidade na modelagem de diferentes comportamentos de degradação ao longo do tempo. Essa versatilidade faz com que a mesma seja uma escolha poderosa para pesquisadores e profissionais que lidam com a análise de eventos que evoluem ao longo do tempo, como em engenharia, medicina, economia e outros campos.

Diversos estudos têm explorado a aplicação da distribuição Weibull Invertida em diferentes áreas, destacando sua importância e relevância. Calabria e Pulcini (1989) propuseram a distribuição IW como um modelo apropriado para descrever fenômenos de degradação mecânica. Jones e Pewsey (2009) investigaram a utilização da distribuição

Weibull Invertida na modelagem de dados de sobrevivência. Kus (2008) abordou sua aplicação na análise de confiabilidade em engenharia, enquanto Smith e Jones (2006) exploraram seu uso em estudos médicos de sobrevida. Khan e King(2005), por sua vez, discutiram propriedades matemáticas e estatísticas da distribuição IW, contribuindo para um melhor entendimento e uso dessa distribuição versátil. Essas pesquisas são exemplos do impacto e da utilidade da distribuição IW em diferentes contextos acadêmicos e profissionais.

Visto sob perspectivas tanto teóricas quanto práticas, a proposição de novas distribuições de probabilidade desempenha um papel fundamental na descrição de fenômenos naturais. Existem várias maneiras de expandir distribuições já estabelecidas, e uma das abordagens mais comuns envolve o uso de geradores de distribuição. Alguns exemplos notáveis desses geradores incluem a distribuição Marshall-Olkin introduzida por Marshall e Olkin (1997), a distribuição Beta-Normal proposta por Eugene et al. (2002), a distribuição Gama-Exponencial por Zografos e Balakrishnan (2009), bem como aquelas apresentadas por Ristic e Balakrishnan (2011) e Nadarajah et al. (2015). Além disso, a distribuição Kumaraswamy de Cordeiro e de Castro (2011), a distribuição generalizada exponenciada desenvolvida por Cordeiro et al. (2013) e a distribuição logística meio exponenciada ímpar de Afify et al. (2017) estão entre as diversas classes de modelos propostas.

No entanto, ao realizar uma revisão abrangente da literatura, torna-se evidente que os geradores, incluindo os mencionados anteriormente, apresentam uma desvantagem. Eles tendem a introduzir complexidade no espaço paramétrico dos modelos resultantes, apesar de sua maior flexibilidade em comparação com os modelos tradicionais.

O gerador de distribuições Cosseno Tipo I, proposto por Ahmad et al. (2022), é uma família de distribuições probabilísticas que tem recebido atenção significativa na literatura estatística e de teoria de probabilidade, além de não acrescentar nenhum parâmetro na nova distribuição. Essa família é caracterizada por sua flexibilidade em modelar diferentes formas de curvas de densidade de probabilidade, incluindo distribuições simétricas e assimétricas. Os membros desta família são derivados usando funções trigonométricas, como o cosseno, o que lhes permite representar uma variedade de comportamentos e especificidades dos dados. Além disso, essa família tem sido aplicada em diversas áreas, incluindo engenharia, ciências da saúde e finanças, para modelar uma ampla gama de fenômenos e processos estocásticos. A versatilidade e as propriedades matemáticas notáveis da família de distribuição Cosseno Tipo I a tornam uma ferramenta valiosa para análise estatística e modelagem de dados em contextos diversos.

Diante do exposto, o objetivo deste trabalho é propor uma nova distribuição baseada na distribuição Weibull Invertida e no gerador de distribuições Cosseno Tipo I e também proceder a avaliação do estimador de máxima verossimilhança por meio de Simulação de Monte Carlo e medidas de performance.

Este trabalho este estruturado como segue: na Seção 2 apresentamos a nova distribuição Weibull Invertida Cosseno Tipo I, e algumas propriedades. Na Seção 3 é apresentado o estimador de máxima verossimilhança e suas propriedades. Simulações de Monte Carlo são apresentadas na Seção 4. Na Seção 5, apresentamos as conclusões.

## 2 | METODOLOGIA

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Weibull Invertida com parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ , denotada por  $IW(\alpha, \lambda)$ , proposta por Keller e Kamath(1982), cujas funções de distribuição acumulada (fda) e densidade de probabilidade (fdp) são dadas por

$$G_X(x, \alpha, \lambda) = \exp\{-\lambda x^{-\alpha}\} \quad (1)$$

e

$$g_X(x, \alpha, \lambda) = \alpha \lambda x^{-(\alpha-1)} \exp\{-\lambda x^{-\alpha}\}, \quad (2)$$

em que  $x$  assume valores nos reais positivos ( $x > 0$ ) e  $\alpha, \lambda > 0$  são parâmetros de forma e escala, respectivamente. Considere o gerador de distribuições Cosseno Tipo I (TIC), proposto por Ahmad et al. (2022). As funções fda e fdp do gerador TIC são dadas, respectivamente, por

$$F_Y(y) = \frac{\exp\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}[1 - G(y)]\right)\right\} - 1}{e - 1} \quad (3)$$

e

$$f_Y(y) = \frac{\pi g(y) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}[1 - G(y)]\right)}{2(e - 1)} \exp\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}[1 - G(y)]\right)\right\}, \quad (4)$$

em que  $y \in \mathbb{R}$  e  $g(y) = \frac{dG(y)}{dy}$ .

Substituindo as Equações (1) e (2) nas Equações (3) e (4), obtemos a as funções fda e fdp da distribuição Cosseno Tipo I Weibull Invertida com parâmetros  $(\alpha, \lambda)$ , denotada por TICIW  $(\alpha, \lambda)$ , ou seja,

$$F_Y(y) = \frac{\exp\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}[1 - \exp\{-\lambda y^{-\alpha}\}]\right)\right\} - 1}{e - 1} \quad (5)$$

e

$$f_Y(y) = \frac{\pi \alpha \lambda y^{-(\alpha-1)} \exp(-\lambda y^{-\alpha}) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}[1 - \exp(-\lambda y^{-\alpha})]\right)}{2(e - 1)} \times \exp\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}[1 - \exp(-\lambda y^{-\alpha})]\right)\right\}, \quad (6)$$

em que  $y > 0$  e  $\alpha, \lambda > 0$ .

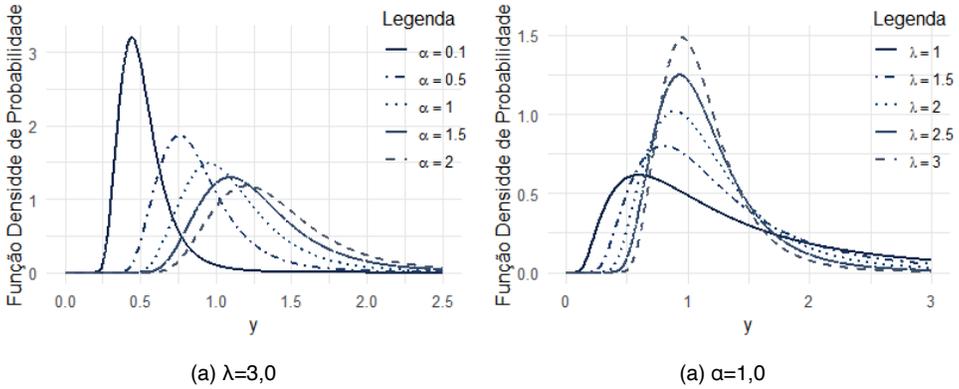


Figura 1 – Gráfico da Função Densidade de Probabilidade da distribuição TICIW( $\alpha, \lambda$ ), dada pela Eq. (6).  
 Fonte: Os Autores (2023).

A Figura 1, a seguir, exibe a função densidade de probabilidade para diferentes conjuntos de valores dos parâmetros ( $\alpha, \lambda$ ) da distribuição TICIW ( $\alpha, \lambda$ ). Em cada gráfico, um parâmetro é alterado enquanto o outro permanece constante, permitindo a análise do comportamento específico de cada parâmetro na distribuição.

A função quantílica da distribuição TICIW ( $\alpha, \lambda$ ), é dada por

$$Q_Y(u) = \left[ \frac{1}{\lambda} \log \left( \frac{1}{u} \right) \right]^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{7}$$

em que  $u = \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \{ \log [1 + p(e - 1)] \}$ , para  $p \in (0, 1)$

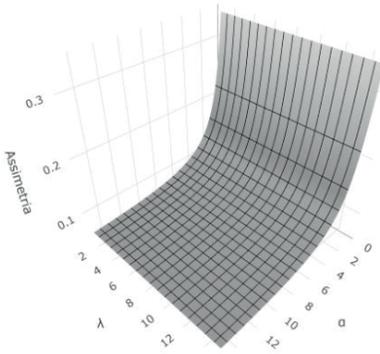
Outra maneira de ilustrar a versatilidade da nova distribuição é por meio das fórmulas de assimetria de Bowley e curtose de Moors, que são dadas por

$$B = \frac{Q_Y(3/4) - 2Q_Y(1/2) + Q_Y(1/4)}{Q_Y(3/4) - Q_Y(1/4)}$$

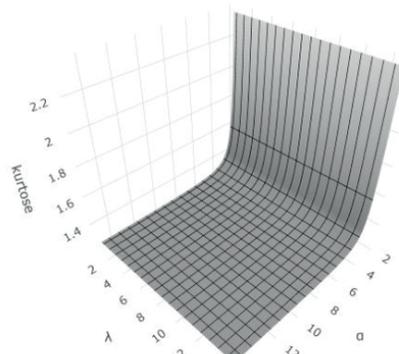
e

$$M = \frac{Q_Y(7/8) - Q_Y(5/8) + Q_Y(3/8) + Q_Y(1/8)}{Q_Y(3/4) - Q_Y(1/4)},$$

respectivamente, em que  $Q_Y(\cdot)$  é dada pela Eq. (7). Essas medidas oferecem uma maneira simples de determinar a assimetria e as formas da cauda da distribuição. A Figura 2 apresenta gráficos para ambas as medidas  $B$  e  $M$ , que demonstram que são sensíveis a variações dos parâmetros ( $\alpha, \lambda$ ) da distribuição.



(a) Assimetria de Bowley



(b) Curtose de Moors

Figura 2 – Gráficos da Assimetria de Bowley e Curtose de Moors para a distribuição TICIW  $(\alpha, \lambda)$ .

Fonte: Os Autores (2023).

### 3 I ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

Diversos métodos podem ser utilizados para estimar os parâmetros de uma distribuição. O método da máxima verossimilhança (ML) é o mais comumente empregado. Este será o método utilizado para estimar os parâmetros da distribuição TICIW  $(\alpha, \lambda)$ .

Seja  $\mathbf{Y}=(Y_1, \dots, Y_n)^T$  uma amostra aleatória da distribuição TICIW  $(\alpha, \lambda)$ , com vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}=(\alpha, \lambda)^T$ . O estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta}=(\alpha, \lambda)^T$  é definido por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta} \in \Omega}{\operatorname{argmax}} \ell(\boldsymbol{\theta})$$

em que  $\Omega \in \mathbb{R}_+^2$  é o espaço paramétrico e  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  é a função de log verossimilhança dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\boldsymbol{\theta})$$

com

$$\ell_t(\boldsymbol{\theta}) = \log(\pi\alpha) + \log(\lambda) - (\alpha - 1) \log(y_t) - \lambda y_t^{-\alpha} - \log(2(e - 1)) + \log \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{2} [1 - \exp(-\lambda y_t^{-\alpha})] \right) \right\} + \cos \left( \frac{\pi}{2} [1 - \exp(-\lambda y_t^{-\alpha})] \right) \quad (8)$$

para  $t=1, \dots, n$ .

Derivando a função de log verossimilhança em relação as coordenadas do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}=(\alpha, \lambda)^T$ , obtemos o vetor escore, denotado por  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})=[\mathbf{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{U}_\lambda(\boldsymbol{\theta})]^T$ , em que

$$\mathbf{U}_\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \ell_t(\boldsymbol{\theta})$$

e

$$\mathbf{U}_\lambda(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} \ell_t(\boldsymbol{\theta})$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ell_t(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\alpha} - \alpha \log(y_t) + \lambda \log(y_t) y_t^{-\alpha} \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \lambda y_t^{-\alpha} \log(y_t) \exp(-\lambda y_t^{-\alpha}) \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{2} [1 - \exp(-\lambda y_t^{-\alpha})]\right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} [1 - \exp(-\lambda y_t^{-\alpha})]\right) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \ell_t(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\lambda} - y_t^{-\alpha} + \frac{\pi}{2} y_t^{-\alpha} \exp(-\lambda y_t^{-\alpha}) \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{2} [1 - \exp(-\lambda y_t^{-\alpha})]\right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} [1 - \exp(-\lambda y_t^{-\alpha})]\right) \right\}. \end{aligned}$$

O estimador pelo método da máxima verossimilhança do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  é obtido resolvendo  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) \big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}$  em que  $\mathbf{0}$  denota o vetor nulo em  $\mathbb{R}^2$ .

Porém, é necessário empregar um método de otimização não linear para maximizar numericamente a função de log-verossimilhança dada na Eq. (8). Normalmente, na computação numérica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMVs), utiliza-se o algoritmo Quasi-Newton, como o algoritmo Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), entre outros.

### 3.1 Teoria Assintótica

Sob condições de regularidade usuais, segundo Pawitan (2001), os estimadores de máxima verossimilhança são assintoticamente não viesados, consistentes e com distribuição normal multivariada de ordem 2 dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim^a N_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})), \quad (9)$$

em que  $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$  é a inversa da matriz de informação de Fisher e  $\sim^a$  significa distribuição assintótica. A matriz de Informação de Fisher é dada por  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})]$ , onde  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$  é dada por

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}.$$

Como a distribuição TICIW( $\alpha, \lambda$ ) não possui fórmula fechada para os momentos, a obtenção da matriz de informação de Fisher ( $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ ) se torna inviável. De acordo com

Pawitan (2001), utilizar a matriz de informação observada é uma estratégia recorrente e fornece estimativas aproximadas para a matriz de Informação de Fisher. A matriz de informação observada é dada por

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}.$$

De acordo com Sen e Singer (1994),  $\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  é um estimador consistente para  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})$ , de tal forma que as versões dos testes considerando a informação observada são assintoticamente equivalentes.

Com base na distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança, pode-se construir intervalos de confiança, com coeficiente de confiança  $(1 - \tau) \times 100\%$ , para os parâmetros do modelo, os quais são dados por

$$\left[ \hat{\theta}_l - z_{\frac{\tau}{2}} \widehat{se}(\hat{\theta}_l); \hat{\theta}_l + z_{\frac{\tau}{2}} \widehat{se}(\hat{\theta}_l) \right], \text{ para } l = 1, 2.$$

Considere as hipóteses  $H_0: \theta_l = \theta_l^0$  versus  $H_1: \theta_l \neq \theta_l^0$ , em que  $\theta_l$  é a  $l$ -ésima coordenada do vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\theta_l^0$  é o valor específico de um parâmetro desconhecido  $\theta_l$ . Para testar tais hipóteses, utilizamos o teste de Wald, baseado na distribuição dada em na Eq. (9). Segundo Wald (1943), a estatística do teste é dada por

$$Z = \frac{\hat{\theta}_l - \theta_l^0}{\widehat{se}(\hat{\theta}_l)} \sim^a N(0,1),$$

em que  $\widehat{se}(\hat{\theta}_l) = \sqrt{K_{ll}}$  sendo  $K_{ll}$  é o  $l$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{K}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ . A estatística  $Z$  segue assintoticamente uma distribuição normal padrão sob  $H_0$ . O teste é realizado comparando a estatística  $Z$  calculada com os quantis usuais da distribuição normal padrão.

## 4 | SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO

Nesta seção, apresentamos um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar o desempenho do estimador de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição TICIW  $(\alpha, \lambda)$  utilizando amostras de tamanho finito. A implementação computacional foi desenvolvida no *software* R CORE TEAM (2023). Foram utilizadas 10.000 replicações para cada um dos tamanhos amostrais,  $n \in \{20, 30, 40, \dots, 300\}$ . A maximização da função de log-verossimilhança foi obtida considerando a função *optim*, do pacote *stats* (R CORE TEAM, 2023), usando o método BFGS.

As medidas de desempenho para avaliação do EMV utilizadas foram a média, o viés, o viés relativo (VR), o desvio padrão (DP), o erro quadrático médio (EQM), assimetria (CA), curtose (K).

Foram analisados quatro diferentes cenários com variações dos valores dos parâmetros: Cenário 1 -  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)^\top = (1,5; 2,5)$ ; Cenário 2 -  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)^\top = (2,5; 1,5)$ ; Cenário

3 -  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,0; 0,8)$ ; Cenário 4 -  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (0,8; 2,0)$ . Os resultados são apresentados nas Tabelas 1 – 4 abaixo.

n	Parâmetro	Média	Viés	DP	EQM	AC	K	TC (95%)	TC (99%)	TH (1%)	TH (5%)
20	$\alpha$	1,5908	0,0908	0,3498	0,1306	1,1472	5,5940	0,9490	0,9860	0,0140	0,0510
	$\lambda$	2,6615	0,1615	0,4706	0,2475	0,9105	4,5597	0,9495	0,9913	0,0087	0,0505
60	$\alpha$	1,5257	0,0257	0,1691	0,0292	0,4998	3,2854	0,9553	0,9929	0,0071	0,0447
	$\lambda$	2,5559	0,0559	0,2548	0,0680	0,4860	3,5156	0,9419	0,9875	0,0125	0,0581
100	$\alpha$	1,5166	0,0166	0,1281	0,0167	0,4596	3,3758	0,9568	0,9919	0,0081	0,0432
	$\lambda$	2,5290	0,0290	0,1846	0,0349	0,4318	3,4457	0,9551	0,9900	0,0100	0,0449
140	$\alpha$	1,5141	0,0141	0,1119	0,0127	0,3695	3,3335	0,9463	0,9883	0,0117	0,0537
	$\lambda$	2,5194	0,0194	0,1603	0,0261	0,2916	3,2360	0,9485	0,9873	0,0127	0,0515
180	$\alpha$	1,5104	0,0104	0,0968	0,0095	0,3179	3,1719	0,9508	0,9883	0,0117	0,0492
	$\lambda$	2,5181	0,0181	0,1407	0,0201	0,3494	3,2706	0,9485	0,9885	0,0115	0,0515
220	$\alpha$	1,5076	0,0076	0,0863	0,0075	0,1917	2,9197	0,9462	0,9926	0,0074	0,0538
	$\lambda$	2,5161	0,0161	0,1271	0,0164	0,2995	3,2136	0,9444	0,9868	0,0132	0,0556
260	$\alpha$	1,5055	0,0055	0,0792	0,0063	0,2499	3,1542	0,9463	0,9917	0,0083	0,0537
	$\lambda$	2,5119	0,0119	0,1148	0,0133	0,3163	3,3149	0,9519	0,9856	0,0144	0,0481
300	$\alpha$	1,5054	0,0054	0,0737	0,0055	0,2804	3,0987	0,9492	0,9904	0,0096	0,0508
	$\lambda$	2,5090	0,0090	0,1078	0,0117	0,2602	2,8647	0,9489	0,9903	0,0097	0,0511

Tabela 1 - Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição TICIW( $\alpha, \lambda$ ), com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (1,5; 2,5)^T$ .

Fonte: Os Autores (2023).

Analisando as Tabelas 1-4 nota-se a eficiência do Estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros da nova distribuição proposta, fornecendo estimativas precisas e confiáveis dos parâmetros populacionais de interesse. Em média, as simulações de Monte Carlo produziram estimativas que estão próximas do valor verdadeiro do parâmetro fixado na simulação em todos os casos apresentados. Essa é uma característica que comprova o bom desempenho do novo modelo proposto.

n	Parâmetro	Média	Viés	DP	EQM	AC	K	TC(95%)	TC(99%)	TH(1%)	TH(5%)
20	$\alpha$	2,7533	0,2533	0,7195	0,5818	1,1502	4,2107	0,9686	0,9905	0,0095	0,0314
	$\lambda$	1,5902	0,0902	0,2826	0,0880	0,7930	3,7738	0,9483	0,9935	0,0065	0,0517
60	$\alpha$	2,5763	0,0763	0,3605	0,1358	0,8063	4,0693	0,9488	0,9928	0,0072	0,0512
	$\lambda$	1,5315	0,0315	0,1489	0,0232	0,5581	3,7105	0,9439	0,9912	0,0088	0,0561
100	$\alpha$	2,5498	0,0498	0,2653	0,0729	0,6669	3,8743	0,9518	0,9882	0,0118	0,0482
	$\lambda$	1,5228	0,0228	0,1124	0,0132	0,3510	3,1639	0,9514	0,9915	0,0085	0,0486
140	$\alpha$	2,5349	0,0349	0,2153	0,0476	0,5032	3,8344	0,9563	0,9887	0,0113	0,0437
	$\lambda$	1,5105	0,0105	0,0947	0,0091	0,3630	3,3311	0,9482	0,9880	0,0120	0,0518
180	$\alpha$	2,5249	0,0249	0,1902	0,0368	0,4685	3,3357	0,9539	0,9901	0,0099	0,0461
	$\lambda$	1,5115	0,0115	0,0852	0,0074	0,3711	3,4377	0,9458	0,9855	0,0145	0,0542
220	$\alpha$	2,5271	0,0271	0,1712	0,0300	0,4676	3,6320	0,9559	0,9915	0,0085	0,0441
	$\lambda$	1,5120	0,0120	0,0756	0,0059	0,2497	3,1862	0,9490	0,9892	0,0108	0,0510
260	$\alpha$	2,5117	0,0117	0,1547	0,0241	0,2625	3,0316	0,9467	0,9920	0,0080	0,0533
	$\lambda$	1,5057	0,0057	0,0685	0,0047	0,1949	3,1000	0,9479	0,9899	0,0101	0,0521
300	$\alpha$	2,5171	0,0171	0,1420	0,0205	0,2967	3,0732	0,9526	0,9924	0,0076	0,0474
	$\lambda$	1,5062	0,0062	0,0639	0,0041	0,1788	3,0329	0,9467	0,9904	0,0096	0,0533

Tabela 2 - Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição TICIW( $\alpha, \lambda$ ), com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,5; 1,5)^T$ .

Fonte: Os Autores (2023).

n	Parâmetro	Média	Viés	DP	EQM	AC	K	TC (95%)	TC (99%)	TH (1%)	TH (5%)
20	$\alpha$	0,8105	0,0105	0,1717	0,0296	0,5584	3,9053	0,9344	0,9772	0,0228	0,0656
	$\lambda$	2,1319	0,1319	0,3708	0,1549	0,9021	4,3146	0,9583	0,9936	0,0064	0,0417
60	$\alpha$	0,8036	0,0036	0,0907	0,0082	0,3032	3,3839	0,9503	0,9871	0,0129	0,0497
	$\lambda$	2,0427	0,0427	0,2023	0,0428	0,5292	3,5283	0,9459	0,9868	0,0132	0,0541
100	$\alpha$	0,8022	0,0022	0,0707	0,0050	0,2285	3,2162	0,9473	0,9858	0,0142	0,0527
	$\lambda$	2,0287	0,0287	0,1488	0,0230	0,3082	3,1261	0,9552	0,9942	0,0058	0,0448
140	$\alpha$	0,8005	0,0005	0,0582	0,0034	0,0788	2,9220	0,9550	0,9902	0,0098	0,0450
	$\lambda$	2,0184	0,0184	0,1258	0,0162	0,3699	3,4298	0,9448	0,9884	0,0116	0,0552
180	$\alpha$	0,8005	0,0005	0,0515	0,0027	0,1467	3,0450	0,9484	0,9918	0,0082	0,0516
	$\lambda$	2,0146	0,0146	0,1115	0,0126	0,2801	3,0278	0,9486	0,9915	0,0085	0,0514
220	$\alpha$	0,8000	0,0000	0,0462	0,0021	0,1419	2,9672	0,9507	0,9898	0,0102	0,0493
	$\lambda$	2,0097	0,0097	0,0998	0,0101	0,2464	3,0690	0,9518	0,9904	0,0096	0,0482
260	$\alpha$	0,7997	-0,0003	0,0422	0,0018	0,1490	3,0975	0,9527	0,9894	0,0106	0,0473
	$\lambda$	2,0091	0,0091	0,0919	0,0085	0,2196	3,2579	0,9529	0,9900	0,0100	0,0471
300	$\alpha$	0,8011	0,0011	0,0399	0,0016	0,1561	2,9801	0,9522	0,9937	0,0063	0,0478
	$\lambda$	2,0090	0,0090	0,0852	0,0073	0,1290	2,9505	0,9494	0,9926	0,0074	0,0506

Tabela 3 - Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição TICIW( $\alpha, \lambda$ ), com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (0,8; 2,0)^T$ .

Fonte: Os Autores (2023).

n	Parâmetro	Média	Viés	DP	EQM	AC	K	TC (95%)	TC (99%)	TH (1%)	TH (5%)
20	$\alpha$	2,1796	0,1796	0,5312	0,3144	1,4363	6,5047	0,9651	0,9891	0,0109	0,0349
	$\lambda$	0,8536	0,0536	0,1506	0,0255	0,9245	4,6725	0,9553	0,9921	0,0079	0,0447
60	$\alpha$	2,0521	0,0521	0,2664	0,0737	0,8967	4,199	0,9432	0,9921	0,0079	0,0568
	$\lambda$	0,8195	0,0195	0,0804	0,0069	0,4328	3,0728	0,9504	0,9937	0,0063	0,0496
100	$\alpha$	2,0301	0,0301	0,191	0,0374	0,5724	3,5493	0,9554	0,9915	0,0085	0,0446
	$\lambda$	0,8095	0,0095	0,0605	0,0038	0,3351	3,1743	0,944	0,99	0,01	0,056
140	$\alpha$	2,0198	0,0198	0,1597	0,0259	0,5129	3,537	0,949	0,9915	0,0085	0,051
	$\lambda$	0,8085	0,0085	0,0506	0,0026	0,3105	3,3074	0,9537	0,9888	0,0112	0,0463
180	$\alpha$	2,0137	0,0137	0,1339	0,0181	0,3067	3,1668	0,9549	0,9911	0,0089	0,0451
	$\lambda$	0,8051	0,0051	0,0437	0,0019	0,3366	3,1887	0,9546	0,9915	0,0085	0,0454
220	$\alpha$	2,0135	0,0135	0,1238	0,0155	0,2836	3,1209	0,9493	0,9903	0,0097	0,0507
	$\lambda$	0,8045	0,0045	0,0402	0,0016	0,2243	3,1594	0,9402	0,9922	0,0078	0,0598
260	$\alpha$	2,0117	0,0117	0,1152	0,0134	0,3428	3,2307	0,946	0,9883	0,0117	0,054
	$\lambda$	0,8036	0,0036	0,0373	0,0014	0,2394	3,0233	0,9446	0,9893	0,0107	0,0554
300	$\alpha$	2,0092	0,0092	0,1089	0,0119	0,3252	3,2115	0,9431	0,9864	0,0136	0,0569
	$\lambda$	0,8025	0,0025	0,0347	0,0012	0,2247	3,1045	0,9459	0,9893	0,0107	0,0541

Tabela 4 - Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição  $TICIW(\alpha, \lambda)$ , com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,0;0,8)^T$ .

Fonte: Os Autores (2023).

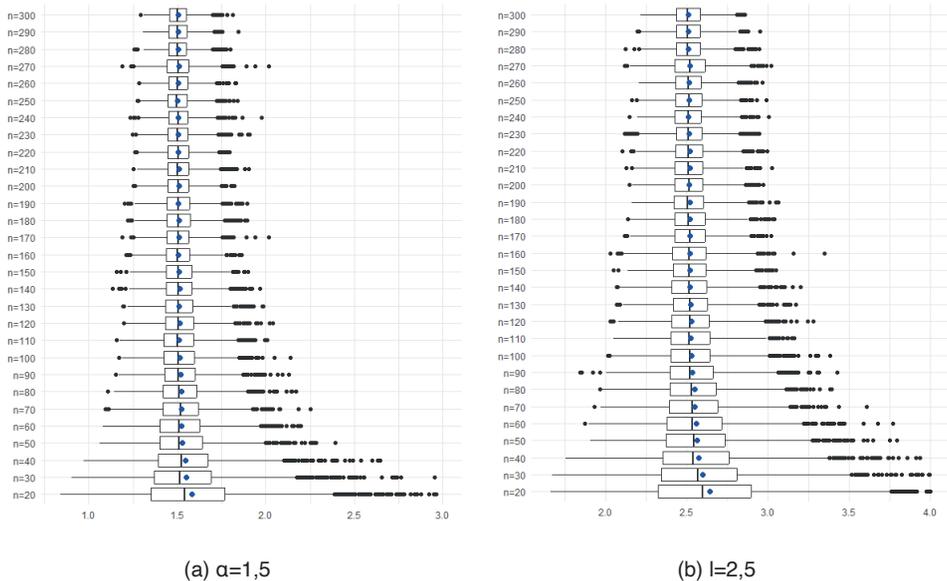
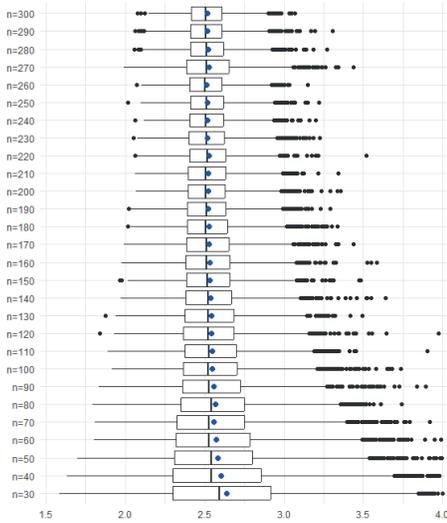
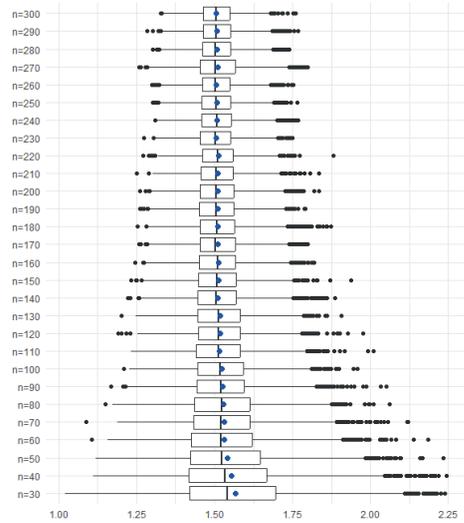


Figura 3: Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição  $TICIW(\alpha, \lambda)$ : box-plot com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (1,5; 2,5)$  para  $n \in \{20,30,40, \dots, 300\}$ .

Fonte: Os Autores (2023).



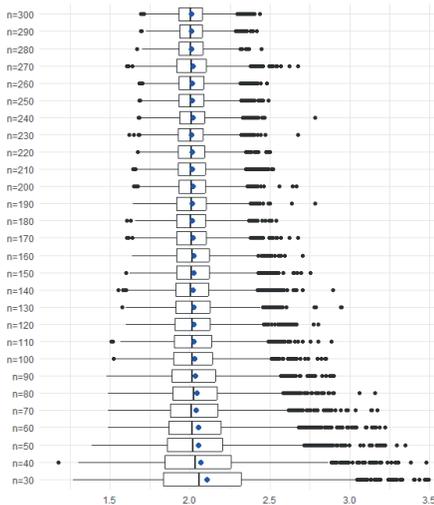
(a)  $\alpha=2,5$



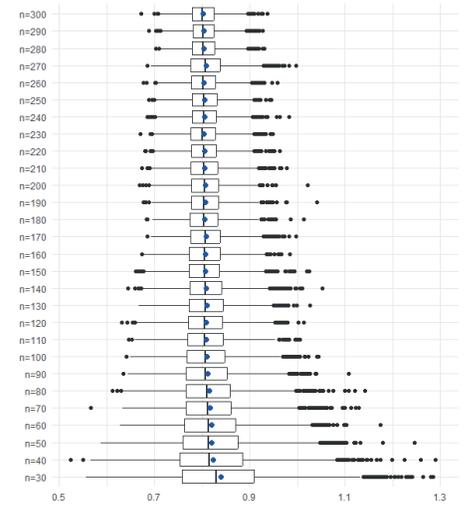
(b)  $\lambda=1,5$

Figura 4: Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição  $TICIW(\alpha, \lambda)$ : box-plot com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,5; 1,5)^T$ , para  $n \in \{30,40, \dots, 300\}$ .

Fonte: Os Autores (2023).



(a)  $\alpha=2,0$



(b)  $\lambda=0,8$

Figura 5: Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição  $TICIW(\alpha, \lambda)$ : box-plot, com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,0; 0,8)^T$ , para  $n \in \{30,40, \dots, 300\}$ .

Fonte: Os Autores (2023).

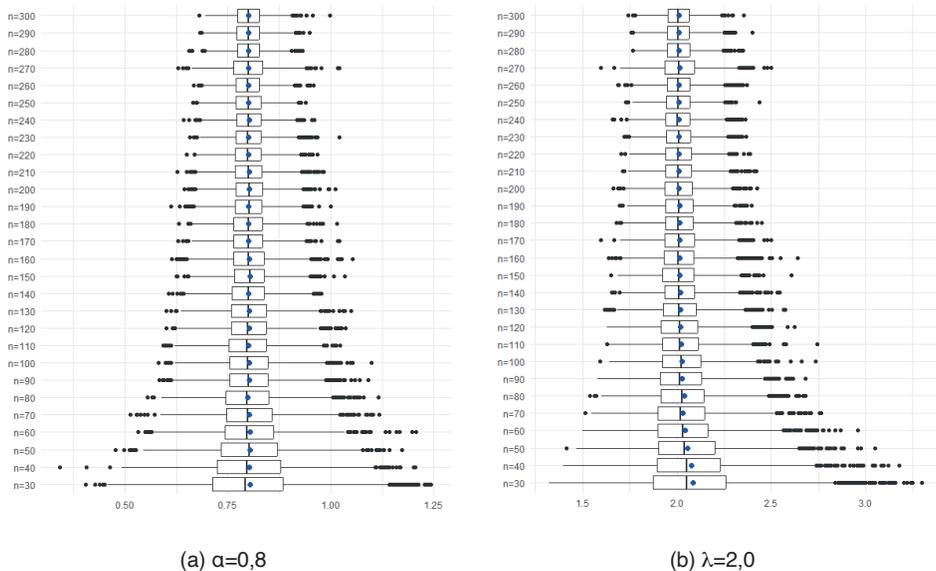


Figura 6: Resultado de Simulações de Monte Carlo para a estimação dos parâmetros da distribuição TICIW( $\alpha, \lambda$ ): box-plot com  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (0,8; 2,0)^T$ , para  $n \in \{30,40, \dots, 300\}$ . Fonte: Os Autores (2023).

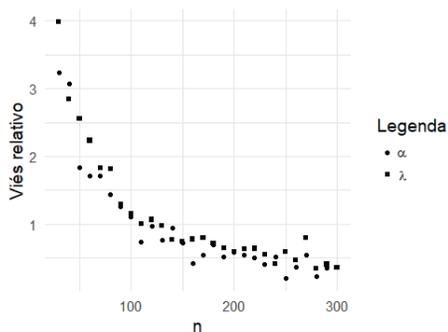
No que se refere a acurácia dos estimadores, verifica-se através do viés calculado, que o mesmo apresenta-se pequeno em todas as situações, tendendo a zero em ambos parâmetros e a medida em que se aumenta o tamanho da amostra. O mesmo comportamento pode ser visualizado com o DP e o EQM, comprovando assim o desempenho do estimador. As taxas de cobertura (TC) e teste de hipóteses (TH) também foram obtidas em todos os casos e fornecem resultados bem próximos aos níveis nominais especificados.

Complementando os resultados numéricos apresentados anteriormente, foram elaborados gráficos box-plot para os resultados das simulações, apresentados nas Figuras 3-6 abaixo. Também são representados na Figura 7 (a-d) o comportamento do viés relativo em relação ao aumento do tamanho da amostra.

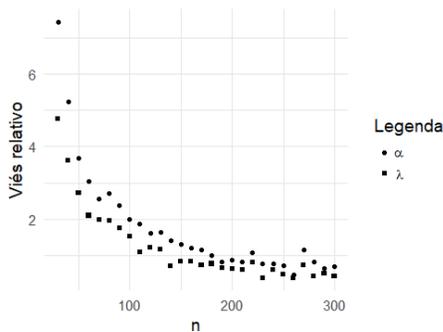
A eficiência de um estimador está relacionada à variabilidade das estimativas que ele produz. Embora os box-plots gerados nas Figuras 3 – 6 demonstrem observações distantes em tamanhos amostrais menores, é perceptível que a média se encontra próxima aos valores de referência e à medida em que se aumenta o tamanho amostral, a variabilidade das estimativas diminuem drasticamente de amplitude, aproximando-se da média que também se aproxima ainda mais do valor de referência do parâmetro. Esse fato já pode ser observado a partir do tamanho amostral  $n=100$  e demonstra um bom desempenho do estimador em todas as situações.

Quanto à Figura 7, verifica-se graficamente a diminuição do viés nas estimativas de ambos os parâmetros e a medida em que o tamanho amostral aumenta, corroborando com

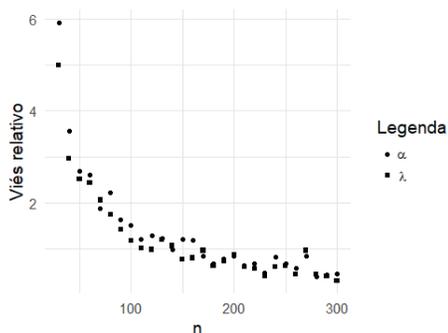
os resultados já mencionados anteriormente.



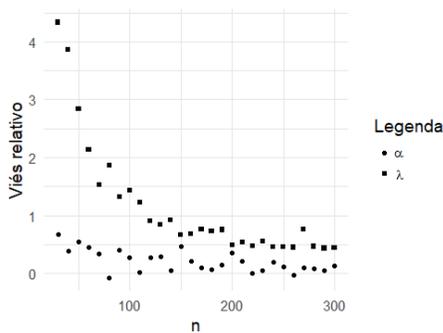
(a) Cenário 1:  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (1,5;2,5)$



(b) Cenário 2:  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,5;1,5)$



(c) Cenário 3:  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (0,8;2,0)$



(d) Cenário 4:  $\theta = (\alpha, \lambda)^T = (2,0;0,8)$

Figura 7: Resultado de Simulações de Monte Carlo: viés relativo da estimação dos parâmetros da distribuição  $TICIW(\alpha, \lambda)$ , para  $n \in \{30,40,\dots,300\}$ .

Fonte: Os Autores (2023).

A eficiência é uma propriedade desejável de um estimador, pois estimativas mais eficientes proporcionam maior poder estatístico para detectar diferenças ou relações significativas em um conjunto de dados. Pelos resultados apresentados é notável que a nova distribuição apresentada possui estimadores eficientes que podem ser aplicados em métodos inferenciais nos mais variados casos.

## 5 | CONCLUSÕES

O objetivo desse trabalho foi apresentar uma nova distribuição chamada distribuição Weibull Invertida Cosseno Tipo I (TICIW) que foi baseada na distribuição Weibull Invertida (IW) e no gerador de distribuições Cosseno Tipo I.

Os resultados das simulações de Monte Carlo sugerem que os estimadores de

máxima verossimilhança dos parâmetros da TICIW são consistentes e não viesados, com base em métricas de desempenho como viés e erro quadrático médio. Quanto maior o tamanho da amostra, mais a média das estimativas aproximam-se do valor de referência bem como os valores das estimativas tornam-se menos dispersos, garantindo assim boas propriedades aos estimadores.

Esse estudo contribui para a literatura estatística ao introduzir uma nova distribuição e fornecer comprovação sobre sua aplicabilidade em diferentes contextos.

## REFERÊNCIAS

Afify, A. Z., & Al-Mutairi, D. K. (2017). Odd Exponentiated Half-Logistic Distribution: A new generalized distribution for lifetime data. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(7), 5519-5543.

Ahmad, Z., Mahmoudi, E., Roozegarz, R., Hamedani, G., & Butt, N. S. (2022). Contributions Towards New Families of Distributions: An Investigation, Further Developments, Characterizations and Comparative Study. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 18(1), 99-120.

Calabria, R.; Pulcini, G. (1989) Confidence limits for reliability and tolerance limits in the inverse Weibull distribution. *Revista de Engenharia de Confiabilidade e Segurança do Sistema*, 24, 77-85.

Cordeiro, G. M., & de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 883-898.

Cordeiro, G. M., Alizadeh, M., & Ortega, E. M. M. (2013). The exponentiated generalized class of distributions. *Journal of Data Science*, 11(1), 1-27.

Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31(4), 497-512.

Jones, M. C., & Pewsey, A. (2009). Inverse Weibull distribution. In *The Mathematics of Surfaces IX* (pp. 157-175). Springer.

Keller, A. Z.; Kamath, K. Alternate reliability models for mechanical systems. In: *Anais do 3º Congresso Internacional de Confiabilidade e Manutenção*, Toulouse, França, 16 a 21 de outubro de 1982, p. 411-415.

Khan, S. S., & King, R. (2005). A simple bivariate generalization of the Weibull distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 34(8), 1663-1672.

Kus, C. (2008). A generalized inverse Weibull distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(1), 404-412.

Marshall, A. W., & Olkin, I. (1997). *Life distributions: structure of nonparametric, semiparametric, and parametric families*. Springer.

Nadarajah, S., Kotz, S., & Volodin, A. I. (2015). A simple extension of the Marshall–Olkin bivariate exponential distribution. *Statistics & Probability Letters*, 97, 97-102.

Pawitan, Y. (2001) *In All Likelihood: Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

R Development Core Team (2023). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria

Ristic, M. M., & Balakrishnan, N. (2011). The gamma-Weibull distribution. *Statistics & Probability Letters*, 81(10), 1487-1495.

Sen, P.K., Singer, J.M. (1994). *Large Sample Methods in Statistics: An Introduction with Applications* (1st ed.). CRC Press.

Smith, R. L., & Jones, M. C. (2006). The inverse Gaussian distribution as a model for reaction times. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 48(3), 269-281.

Wald, A. (1943). Tests of Statistical Hypotheses Concerning Several Parameters When the Number of Observations is Large. *Transactions of the American Mathematical Society*, 54(3), 426–482.

Zografos, K., & Balakrishnan, N. (2009). On the gamma-exponential distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(9), 2850-2863.