v. 3, n. 37, 2023

Journal of
Engineering
Research

SEMIGRUPO DE CONTRACCIÓN EN EL ESPACIO $L^2([-\pi, \pi])$

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas, Av. Venezuela S/N Lima 01
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

Resumen: En este trabajo iniciamos estudiando al operador diferencial H_o en el espacio $L^2([-\pi, \pi])$. Sabemos que este operador no es acotado, es densamente definida y simétrica y por lo tanto no admite una extensión lineal simétrica a todo el espacio. Introducimos una familia de operadores en el espacio $L^2([-\pi, \pi])$ y demostramos que esta forma un semigrupo de contracción de clase C_o, teniendo a $-H_o$ como su generador infinitesimal. Probamos también que si restringimos los dominios de esa familia de operadores estas aún conservan ser un semigrupo de contracción. Finalmente, damos resultados de existencia de solución del problema de Cauchy abstracto asociado y propiedades de dependencia continua de la solución en conexión a otras normas.
Palabras Clave: Espacio $L^2([-\pi, \pi])$, Teorema de Hellinger-Toeplitz, Identidad de Parseval, Semigrupo de contracción, existencia de solución, norma del gráfico.

INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos algunos operadores en el espacio $L^2([-\pi, \pi])$. Esto es, introduciremos al operador diferencial que no es acotada y probaremos que si es acotada con la norma del gráfico. Introduciremos una familia de operadores en $L^2([-\pi, \pi])$ y mostraremos que son acotadas y que forman un semigrupo de contracción de clase C_o, teniendo como generador infinitesimal al operador diferencial. Ahora, restringiendo el dominio de esta familia de operadores, probaremos que esta continua formando un semigrupo de contracción de clase C_o. Así, mejoraremos el resultado de existencia de solución para el problema de Cauchy abstracto asociado. Podemos citar algunas referencias para el tratamiento de existencia de solución vía semigrupos, por ejemplo [1], [3], [4], [5] y [6].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en siete subsecciones. Así, en la subsección 3.1 estudiamos rápidamente al operador Diferencial en $L^2([-\pi, \pi])$. En la subsección 3.2, probamos que la familia de operadores introducida forma un semigrupo de contracción de clase C_o en $L^2([-\pi, \pi])$. En la subsección 3.3, calculamos el generador infinitesimal del C_o - semigrupo de contracción y obtenemos el primer resultado de existencia de solución para el problema de Cauchy abstracto asociado y además la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial. En la subsección 3.4, introducimos la norma del gráfico en el dominio de H_o que lo hace un espacio de Hilbert y probamos que H_o es acotado con esta norma. En la subsección 3.5, introducimos otras normas equivalentes a la norma del gráfico. En la subsección 3.6, probamos que la familia de operadores con dominio restringido continua siendo un semigrupo de contracción. En la subsección 3.7, obtenemos el resultado de existencia de solución en conexion con otras normas.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

Definición 2.1 *Sea P el espacio de las funciones $f: IR \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables y periódicas con periodo 2π. Este espacio también es denotado por $C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi])$.* Así, se prueba que P es un espacio métrico completo.

También,

$$
\begin{aligned}
P' \;&:=\; \Big\{ T : P \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineal tal que } \exists \psi_n \in P \text{ y} \\
&\qquad < T, \varphi > = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\,dx\,,\ \forall \varphi \in P \Big\} \\
&=\; (P)'.
\end{aligned}
$$

Esto es, P' es el dual topológico de P. Así, P' es llamado el espacio de las Distribuciones

Periódicas.

Definición 2.2 *Definimos el espacio*

$L^2([-\pi, \pi]) := \{f \in P', \exists(\varphi_n)$ *sucesión de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *y* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f\} \subset P'$

Se prueba que $L^2([-\pi, \pi])$ es un $\mathbb{C}$ - espacio de Hilbert.

Para ver propiedades de P, P' y $L^2([-\pi, \pi])$ citamos [1], [7] y [8]; y para la teoría de semigrupos, citamos [3] y [4].

Ahora, enunciaremos un importante resultado que será usado posteriormente.

Teorema 2.1 (Hellinger-Toeplitz) *Si T es un operador lineal no acotado, simétrico y densamente definido (i.e.* $\overline{Dom(T)} = H$*) en un espacio H de Hilbert, entonces no admite extensión lineal simétrica a H.*

Prueba.- Citamos Kreyszig [2].

PRINCIPALES RESULTADOS

EL OPERADOR DIFERENCIAL H_O EN $L^2([-\pi, \pi])$

Introduciremos la siguiente aplicación

Definición 3.1 (Operador Diferencial H_o) *Definamos la aplicación*

$H_o : Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \longrightarrow L^2([-\pi, \pi])$

$f \longrightarrow H_o f := -f''$ *derivada distribucional*

donde $Dom(H_o) := \{f \in L^2([-\pi, \pi])$ *tal que* $-f'' \in L^2([-\pi, \pi])\}$.

H_o *es conocido como Operador Diferencial. Recordaremos sus propiedades con la siguiente proposición.*

Previamente, observemos que

Observación 3.1 *Debido a la Transformada de Fourier, se tiene que* $H_o f = (k^2 \hat{f}(k))^{\vee}$ *para todo* $f \in Dom(H_o) = \{f \in L^2([-\pi, \pi])$ *tal que* $(k^2 \hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})\}$.

Proposición 3.1 *El operador Diferencial* H_o *es* $\mathbb{C}$ *- lineal, densamente definido, simétrico y no acotado. Además,* H_o *no admite extensión lineal simétrica a* $L^2([-\pi, \pi])$.

Prueba.- La prueba puede ser vista en [9], donde se usa el Teorema 2.1 de Hellinger-Toeplitz.

SEMIGRUPO DE CLASE C_O EN $L^2([-\pi, \pi])$

Proposición 3.2 (Semigrupo de Clase C_o) *Sea* $t \geq 0$, *definimos las aplicaciones*

$e^{-tH}o\ f = (e^{-tk^2} \hat{f}(k))^{\vee}, \ \forall f \in L^2([-\pi, \pi])$ *entonces* $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0} \subset B(L^2([-\pi, \pi]))$ *y además forma un semigrupo de contracción de clase* C_o *en* $L^2([-\pi, \pi])$.

Prueba.- En $t = 0$, sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$ tenemos $e^{-0Ho} f = (e^{-tk^2} \hat{f}(k))^{\vee} = (\hat{f}(k))^{\vee} = f$, luego

$$e^{-0Ho} = I, \tag{3.1}$$

donde I es el operador identidad en $L^2([-\pi, \pi])$.

Ahora probaremos que $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores lineales acotados y de contracción, i.e. $\|e^{-tHo}\| \leq 1, \forall t \geq 0$.

En efecto, sea $t > 0$ y $f \in L^2([-\pi, \pi])$,

$$\begin{aligned} \||e^{-tH_o} f\||_2^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^2} \widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^2}|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-2tk^2}}_{\leq 1} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \||f\||_2^2 < \infty . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Luego, de (3.2) tenemos que $e^{-tHo} f \in L^2([-\pi, \pi])$, esto es, e^{-tHo} está bien definida para $t \geq 0$. Por otro lado, es evidente que e^{-tHo} es $\mathbb{C}$- lineal:

$$\begin{aligned} e^{-tH_o}(f + cg) &= \left(e^{-tk^2} \widehat{f + cg}(k)\right)^{\vee} \\ &= \left(e^{-tk^2} \{\widehat{f}(k) + c\widehat{g}(k)\}\right)^{\vee} \\ &= \left(e^{-tk^2} \widehat{f}(k) + ce^{-tk^2} \widehat{g}(k)\right)^{\vee} \\ &= \left(e^{-tk^2} \widehat{f}(k)\right)^{\vee} + c\left(e^{-tk^2} \widehat{g}(k)\right)^{\vee} \\ &= e^{-tH_o} f + c\, e^{-tH_o} g , \end{aligned}$$

para todo $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ y $c \in \mathbb{C}$.

Así, de (3.2) también obtenemos que $\||e^-$

$^{tHo} f\,|||_2 \leq |||f\,|||_2$, $\forall f \in L^2([-\pi, \pi])$. Esto es, el operador e^{-tHo} es acotado y

$\| e^{-tH_o} \| \leq 1$, $\forall t \geq 0$. (3.3)

Sea $t > 0$, $r > 0$ y $f \in L^2([-\pi, \pi])$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{-(t+r)H_o} f &= \left(e^{-(t+r)k^2} \widehat{f}(k)\right)^\vee \\ &= \left(e^{-tk^2} e^{-rk^2} \widehat{f}(k)\right)^\vee \\ &= \left(e^{-tk^2} \{e^{-rH_o} f\}^\wedge(k)\right)^\vee \\ &= e^{-tH_o}\{e^{-rH_o} f\} \\ &= e^{-tH_o} \circ e^{-rH_o} f \end{aligned}$$

esto es, $e^{-(t+r)Ho} = e^{-tHo} \circ e^{-rHo}$ para $t > 0$ y $r > 0$. El caso $t = 0$ o $r = 0$ es evidente; luego

$e^{-(t+r)Ho} = e^{-tHo} \circ e^{-rHo}$, $\forall t, r \geq 0$. (3.4)

Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, probaremos que $|||e^{-tHo} f - f\,|||_2 \dashrightarrow 0$ cuando $t \to 0^+$. En efecto,

$$\begin{aligned} |||e^{-tH_o} f - f|||_2^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^2} \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |(e^{-tk^2} - 1)\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{-tk^2} - 1|^2}_{M(k,t):=} |\widehat{f}(k)|^2 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

donde $\lim_{t\to 0^+} M(k, t) = 0$.

Además, el k-ésimo término de la serie (3.5) está mayorado:

$M(k, t)|\hat{f}(k)|^2 \leq 4|\hat{f}(k)|^2$

y como la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2$ es convergente, entonces usando el M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge absoluta y uniformemente. Luego,

$$\lim_{t\to 0^+} |||e^{-tH_o} f - f|||_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t\to 0^+} |e^{-tk^2} - 1|^2}_{=0} |\widehat{f}(k)|^2 = 0\,.$$

Así, hemos probado que

$$\lim_{t\to 0^+} |||e^{-tH_o} f - f|||_2 = 0\,,\ \forall f \in L^2([-\pi, \pi])\,. \qquad (3.6)$$

De (3.1), (3.4), (3.3) y (3.6) concluimos que $\{e^{-tH_o}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción de clase C_o en $L^2([-\pi, \pi])$.

Proposición 3.3 *$\forall f \in L^2([-\pi, \pi])$, la aplicación: $t \to e^{-tHo} f$ es continua de $[0, \infty)$ a $L^2([-\pi, \pi])$.*

Prueba.- De (3.6) tenemos la continuidad en 0 a la derecha. Así, nos enfocamos en probar la continuidad en $t > 0$.

Sea $h > 0$, usando la propiedad de semigrupo, la desigualdad (3.3) y el límite (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned} |||e^{-(t+h)H_o} f - e^{-tH_o} f|||_2 &= |||e^{-tH_o} e^{-hH_o} f - e^{-tH_o} f|||_2 \\ &= |||e^{-tH_o}\{e^{-hH_o} f - f\}|||_2 \\ &\leq |||e^{-hH_o} f - f|||_2 \to 0 \end{aligned} \qquad (3.7)$$

cuando $h \to 0^+$.

Ahora, considerando $h > 0$ tal que $t - h > 0$ y procediendo análogamente como en (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned} |||e^{-(t-h)H_o} f - e^{-tH_o} f|||_2 &= |||e^{-(t-h)H_o} f - e^{-(t-h)H_o} e^{-hH_o} f|||_2 \\ &= |||e^{-(t-h)H_o}\{f - e^{-hH_o} f\}|||_2 \\ &\leq |||e^{-hH_o} f - f|||_2 \to 0 \end{aligned} \qquad (3.8)$$

cuando $h \to 0^+$.

De (3.7) y (3.8) tenemos que la aplicación es continua en $t \in IR^+$.

Proposición 3.4 *Si $f_n \overset{|||\cdot|||_2}{\longrightarrow} f$ entonces $|||e^{-tHo} f - e^{-tHo} f\,|||_2 \to 0$ cuando $n \to +\infty$.*

Prueba.- Es inmediato desde que de (3.2) se tiene

$$|||e^{-tH_o} f_n - e^{-tH_o} f|||_2 = |||e^{-tH_o}(f_n - f)|||_2 \leq |||f_n - f|||_2\,.$$

CÁLCULO DEL G.I. DE $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0}$ EN $L^2([-\pi, \pi])$

Proposición 3.5 *El operador $-H_o$ es el Generador infinitesimal (G.I.) del semi-grupo de contracción $\{e^{-tH_o}\}_{t\geq 0}$ en $L^2([-\pi, \pi])$.*

Prueba.- Si A es el G.I. del semigrupo de contracción $\{e^{-tH_o}\}_{t\geq 0}$ en $L^2([-\pi, \pi])$ entonces todo se reduce a probar que $Dom(A) = Dom(H_o)$ y $A = -H_o$.

1. $Dom(H_o) \subset Dom(A)$.- En efecto, sea $f \in Dom(H_o)$ entonces $H_o f := (k^2\hat{f}(k))^\vee$, donde $f \in L^2([-\pi, \pi])$ y $(k^2\hat{f}(k)) \in l^2(Z)$, i.e.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k^2 \widehat{f}(k)|^2 < \infty \qquad (3.9)$$

Sea $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\frac{e^{-tH_o}f - f}{t} + H_o f\right|\right|\right|_2^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{e^{-tk^2}\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k)}{t} + k^2\widehat{f}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\left\{\underbrace{\frac{e^{-tk^2}-1}{t} + k^2}_{H(k,t):=}\right\}\widehat{f}(k)\right|^2\end{aligned}$$

donde $\lim_{t\to 0} H(k, t) = 0$. También, tenemos

$$|H(k, t)|^2|\hat{f}\ (k)|^2 \le 4k^4|\hat{f}(k)|^2$$

y como vale (3.9), usando el M -test de Weierstrass tenemos que la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|H(k,t)|^2|\widehat{f}(k)|^2$ converge absoluta y uniformemente, luego

$$\lim_{t\to0^+}\left|\left|\left|\frac{e^{-tH_o}f - f}{t} + H_o f\right|\right|\right|_2^2 = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underbrace{\lim_{t\to0^+}H(k,t)}_{=0}|^2|\widehat{f}(k)|^2 = 0\,.$$

Así, $\lim_{t\to0^+}\left|\left|\left|\frac{e^{-tH_o}f-f}{t}+H_of\right|\right|\right|_2 = 0.$ Esto es, existe $\lim_{t\to0^+}\left\{\frac{e^{-tH_o}f-f}{t}\right\} = -H_of$. Luego, $f \in D(A)$ y $Af = -H_of$.

2. $Dom(A) \subset Dom(H_o)$.- En efecto, sea $f \in Dom(A)$ entonces $f \in L^2([-\pi, \pi])$ y $\lim_{t\to0^+}\left\{\frac{e^{-tH_o}f-f}{t}\right\} = Af$ en $L^2([-\pi,\pi])$. Esto es,

$$\lim_{t\to0^+}\left|\left|\left|\frac{e^{-tH_o}f - f}{t} - Af\right|\right|\right|_2 = 0\,.$$

Así, dado $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\epsilon > \frac{1}{2\pi}\left|\left|\left|\frac{e^{-tH_o}f-f}{t} - Af\right|\right|\right|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{-tk^2}\widehat{f}(k)-\widehat{f}(k)}{t} - \{Af\}^\wedge(k)\right|^2 \\ &> \left|\frac{e^{-tk^2}\widehat{f}(k)-\widehat{f}(k)}{t} - \{Af\}^\wedge(k)\right|^2,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$\frac{e^{-tk^2}\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k)}{t}\to\{Af\}^\wedge(k)$ cuando $t \to 0^+$,

pero sabemos que

$\frac{e^{-tk^2}\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k)}{t} \to -k^2\widehat{f}(k)$ cuando $t \to 0^+$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\{Af\}^\wedge(k) = -k^2\hat{f}(k)$. Entonces

$$l^2(\mathbb{Z}) \ni \{Af\}^\wedge = (-k^2\hat{f}(k))\,. \qquad (3.10)$$

De (3.10) tenemos que $(-k^2\hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$, esto es $f \in Dom(H_o)$ y $Af = -H_of$.

De los dos items se concluye que $Dom(A) = Dom(H_o)$ y $A = -H_o$.

Proposición 3.6 *Sea $t \ge 0$, si $f \in Dom(H_o)$ entonces $e^{-tHo}f \in Dom(H_o)$. Además, se cumple: $H_o\, e^{-tHo} f = e^{-tHo} H_of$, $\forall f \in Dom(H_o)$.*

Prueba.- En efecto, sea $f \in Dom(H_o)$, $t > 0$, $r > 0$ y $-H_o$ el G. I. de $\{e^{-tH_o}\}_{t\ge0}$ en $L^2([-\pi, \pi])$, luego

$$\begin{aligned}\lim_{r\to0^+}\left\{\frac{e^{-rH_o}(e^{-tH_o}f)-e^{-tH_o}f}{r}\right\} &= \lim_{r\to0^+}\left\{\frac{e^{-tH_o}(e^{-rH_o}f)-e^{-tH_o}f}{r}\right\}\\ &= \lim_{r\to0^+}e^{-tH_o}\left\{\frac{e^{-rH_o}f-f}{r}\right\}\\ &= e^{-tH_o}\left[\lim_{r\to0^+}\{\frac{e^{-rH_o}f-f}{r}\}\right]\\ &= e^{-tH_o}[-H_of]\ \in\ L^2([-\pi,\pi]).\end{aligned}$$

Así, existe el límite en $L^2([-\pi, \pi])$. Esto es $e^{-tHo}f \in Dom(H_o)$ y

$$-H_o(e^{-tH_o}f) = e^{-tH_o}[-H_of] = -e^{-tH_o}[H_of],$$

i.e.

$$H_o\circ e^{-tH_o}f = e^{-tH_o}\circ H_of\,,\ \forall f\in Dom(H_o)\,. \qquad (3.11)$$

Proposición 3.7 *Si $f \in Dom(H_o)$ entonces la aplicación $t \to e^{-tHo} f$, de $(0, \infty)$ a $L^2([-\pi, \pi])$, es diferenciable en $(0, \infty)$ y su derivada es $-e^{-tHo} H_of$. Además, $\frac{\partial}{\partial\tau}\{e^{-tHo} f\} = -H_oe^{-tHo} f$.*

Prueba.- Sea $t > 0$, $h > 0$ tal que $0 < t - h$, tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{e^{-tH_o}f - e^{-(t-h)H_o}f}{h} + e^{-tH_o}H_of\\ &= e^{-(t-h)H_o}\left\{\frac{e^{-hH_o}f-f}{h}\right\} + e^{-tH_o}H_of\\ &= e^{-(t-h)H_o}\left\{\frac{e^{-hH_o}f-f}{h}\right\} \pm e^{-(t-h)H_o}H_of + e^{-tH_o}H_of\\ &= e^{-(t-h)H_o}\left\{\frac{e^{-hH_o}f-f}{h}+H_of\right\} - e^{-(t-h)H_o}H_of + e^{-tH_o}H_of\,. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Como $\left\|e^{-(t-h)Ho}\right\| \le 1$, $\frac{e^{-hH_o}f-f}{h} \dashrightarrow -Hf$ cuando $h \to 0^+$ y $e^{-(t-h)Ho} H_of \dashrightarrow e^{-tHo} H_of$ cuando $h \to 0^+$, tomando límite a (3.12) cuando $h \to 0^+$ tenemos

$$\lim_{h\to0^+}\left\{\frac{e^{-tH_o}f-e^{-(t-h)H_o}f}{h}+e^{-tH_o}H_of\right\} = 0\,,$$

esto es

$$\lim_{h\to0^+}\left\{\frac{e^{-tH_o}f-e^{-(t-h)H_o}f}{h}\right\} = -e^{-tH_o}H_of\,. \qquad (3.13)$$

Análogamente procedemos cuando $h > 0$,

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI 10.22533/at.ed.3173372325104

$$\frac{e^{-(t+h)H_o}f - e^{-tH_o}f}{h} = e^{-tH_o}\left\{\frac{e^{-hH_o}f - f}{h}\right\}. \quad (3.14)$$

Como $e^{-tHo} \in B(L^2([-\pi, \pi])$ y $f \in Dom(-H_o)$, tomando límite a (3.14) cuando $h \to 0^+$, tenemos

$$\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{e^{-(t+h)H_o}f - e^{-tH_o}f}{h}\right\}$$
$$= e^{-tH_o}\left\{\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{e^{-hH_o}f - f}{h}\right\}\right\}$$
$$= e^{-tH_o}\{-H_o f\}$$
$$= -e^{-tH_o}H_o f. \quad (3.15)$$

De (3.13 y (3.15) tenemos que

$$\exists \underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{e^{-(t+h)H_o}f - e^{-tH_o}f}{h}\right\}}_{=\frac{\partial}{\partial t}\{e^{-tH_o}f\}} = -e^{-tH_o}H_o f.$$

Usando la Proposición 3.6 tenemos que $-e^{-tHo} H_o f = -H_o e^{-tHo} f$, con lo que se concluye.

Proposición 3.8 *Si $f \in Dom(H_o)$ entonces la aplicación $t \to \frac{\partial}{\partial t}\{e^{-tHo} f\} = -e^{-tHo} H_o f$, de $(0, \infty)$ a $L^2([-\pi, \pi])$, es continua.*

Prueba.- Como $f \in Dom(H_o)$ entonces $H_o f \in L^2([-\pi, \pi])$; luego usando la Proposición 3.3, la aplicación es continua.

Proposición 3.9 *Si $f \in Dom(H_o)$ entonces $e^{-(\cdot)Ho} f \in C^1((0, \infty), L^2([-\pi, \pi])$.*

Prueba.- Es consecuencia de las dos Proposiciones previas.

Otra consecuencia es el siguiente resultado.

Proposición 3.10 *El operador $H_o : Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \longrightarrow L^2([-\pi, \pi])$ es cerrado.*

Prueba.- Desde que $-H_o$ es el G.I. del semigrupo de contracción $\{e^{-tH_o}\}_{t\geq 0}$ en $L^2([-\pi, \pi])$ tenemos que $-H_o$ es cerrado. En efecto, sea $f_k \in Dom(-H_o)$ tal que

$f_k \to f$ en $L^2([-\pi, \pi])$ cuando $k \to +\infty$ (3.16)

$-H_o f_k \to g$ en $L^2([-\pi, \pi])$ cuando $k \to +\infty$. (3.17)

Probaremos que $f \in Dom(-H_o)$ y que $-H_o f = g$.

De las Proposiciones 3.7 y 3.8 tenemos que

$$e^{-tH_o}f_k - f_k = \int_0^t e^{-rH_o}(-H_o)f_k\, dr. \quad (3.18)$$

Usando la continuidad de e^{-tHo} y las convergencias (3.16) y (3.17) tenemos

$$e^{-tH_o}f - f = \int_0^t e^{-rH_o}g\, dr.$$

Así,

$$\frac{e^{-tH_o}f - f}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t e^{-rH_o}g\, dr \to e^{-0H_o}g = g,$$

cuando $t \to 0^+$.

Luego, $f \in Dom(-H_o)$ y $-H_o f = g$.

Finalmente, obtenemos un importante resultado de existencia de solución de un problema de valor inicial.

Proposición 3.11 *El Problema de Cauchy Abstracto*

$$(Q)\left|\begin{array}{l} u_t = -H_o u \\ u(0) = f \in Dom(H_o) \subset L^2([-\pi,\pi]) \end{array}\right.$$

posee una única solución: $u(t) = e^{-tHo} f$, $\forall t \geq 0$, donde $u \in C([0, \infty), L^2([-\pi, \pi])) \cap C^1((0, \infty), L^2([-\pi, \pi]))$.

Observación 3.2 *De la Proposición 3.4 tenemos que la solución del problema (Q)* depende continuamente del dato inicial.

NORMA DEL GRÁFICO EN $DOM(H_O) \subset L^2([-\pi, \pi])$

Con la finalidad de resaltar y evitar confusión con otras normas que se introducirán, usaremos la notación: $||\cdot||_{L2} := |||\cdot|||_2$.

Definición 3.2 *En $Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi])$ definimos la aplicación*

$< \cdot, \cdot >_\Delta : Dom(H_o) \times Dom(H_o) \longrightarrow \mathbb{C}$

$(f, g) \longrightarrow < f, g >\Delta$

donde

$< f, g >_\Delta := < f, g >_L 2 + < H_o f, H_o g >_L 2$, $\forall f, g \in Dom(H_o)$.

Se observa que $< \cdot, \cdot >_\Delta$ está bien definida.

Proposición 3.12 *La aplicación $< \cdot, \cdot >_\Delta$ es un producto interno en $Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]$.*

Prueba.- Es inmediato desde que $< \cdot, \cdot >_L 2$ es un producto interno.

Así, el producto interno $< \cdot, \cdot >_\Delta$ induce una

Journal of Engineering Research ISSN 2764-1317 DOI 10.22533/at.ed.3173372325104

norma $\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta}$ en $Dom(H_o)$:

$$\|f\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta} = \sqrt{\|f\|^2_{L^2} + \|H_o f\|^2_{L^2}}\,, \ \forall f \in Dom(H_o)\,. \quad (3.19)$$

Denotaremos a $\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta}$ por $\|\cdot\|_\Delta$.

Así,

Proposición 3.13 *El espacio normado* $(Dom(H_o), \|\cdot\|_\Delta)$ *satisface*

$$\|f\|_\Delta \ \geq \ \|f\|_{L^2}\,, \ \forall f \in Dom(H_o)\,, \quad (3.20)$$

$$\|f\|_\Delta \ \geq \ \|H_o f\|_{L^2}\,, \ \forall f \in Dom(H_o)\,. \quad (3.21)$$

Prueba.- Es inmediato de (3.19).

Proposición 3.14 *El espacio* $(Dom(H_o), \|\cdot\|_\Delta)$ *es completo.*

Prueba.- Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $Dom(H_o)$ con $\|\cdot\|_\Delta$. Probaremos que $\exists f \in Dom(H_o)$ tal que $\| f_n - f \|_\Delta \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Dado $\in > 0$, $\exists N_o \in IN$ tal que

$\in > \|f_n - f_m\|_\Delta$ siempre que $n, m > N_o$. (3.22)

De (3.20) tenemos

$\in > \|f_n - f_m\|_\Delta \geq \|f_n - f_m\|_{L2}$ siempre que $n, m > N_o$. (3.23)

De (3.21) tenemos

$\in > \| f_n - f_m \|_\Delta \geq \|H_o(f_n - f_m)\|_{L2} = \| H_o f_n - H_o f_m \|_{L2}$ siempre que $n, m > N_o$. (3.24)

De (3.23) tenemos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^2([-\pi, \pi])$, y como $L^2([-\pi, \pi])$ es completo, entonces $\exists f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que

$$f_n \overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow} f\,. \quad (3.25)$$

De (3.24) tenemos que $(H_o f_n)$ es una sucesión de Cauchy en $L^2([-\pi, \pi])$, y como $L^2([-\pi, \pi])$ es completo, entonces $\exists g \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que

$$H_o f_n \overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow} g\,. \quad (3.26)$$

De (3.25), (3.26) y como H_o es un operador cerrado, entonces

$f \in Dom(H_o)$ y $H_o f = g$. (3.27)

De (3.25), (3.26) y (3.27) tenemos

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|^2_\Delta &= \|f_n - f\|^2_{L^2} + \|H_o(f_n - f)\|^2_{L^2} \\ &= \|f_n - f\|^2_{L^2} + \|H_o f_n - H_o f\|^2_{L^2} \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Entonces $\|f_n - f\|_\Delta \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Esto es, $\exists f \in Dom(H_o)$ tal que $f_n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\longrightarrow} f$.

Observación 3.3 *El espacio* $(Dom(H_o), \|\cdot\|_\Delta)$ *es un espacio de Banach o también* $(Dom(H_o), <\cdot,\cdot>_\Delta)$ *es un espacio de Hilbert.*

Proposición 3.15 *Sea*

$H_o : (Dom(H_o), \|\cdot\|_\Delta) \longrightarrow L^2([-\pi, \pi])$

$f \longrightarrow H_o f = (k^2\hat{f}(k))^\vee$

entonces H_o *es un operador acotado y* $\|H_o\| \leq 1$.

Prueba.- Es inmediato de (3.21).

Tenemos la siguiente propiedad que conecta $\|\cdot\|_\Delta$ con el semigrupo $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0}$.

Proposición 3.16 *Sea* $t \geq 0$, *si* $f^n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\longrightarrow} f$ *entonces* $\| e^{-tHo} f_n - e^{-tHo} f \|_{L2} \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$.

Prueba.- Es inmediato desde que usando (3.20) tenemos que $f_n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\longrightarrow} f$ implica $f_n \overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow} f$, luego usando la Identidad de Parseval tenemos que $\widehat{f_n} \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\longrightarrow} \widehat{f}$ y como

$$\|e^{-tH_o} f_n - e^{-tH_o} f\|_{L^2} = \|e^{-tH_o}(f_n - f)\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi}\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{l^2}\,,$$

concluimos.

OTRAS NORMAS EN $DOM(H_O)$

Ahora, introduciremos otras normas en $Dom(H_o)$.

Observación 3.4 (p-normas en $Dom(H_o)$) *En el subespacio* $Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi])$ *podemos definir otras normas, por ejemplo:* $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\begin{aligned} 1 \leq p < \infty\,, \ \|f\|_p &:= (\|f\|^p_{L^2} + \|H_o f\|^p_{L^2})^{\frac{1}{p}} \\ \|f\|_\infty &:= \text{máx}\{\|f\|_{L^2}, \|H_o f\|_{L^2}\} \end{aligned}$$

para $f \in Dom(H_o)$. *Y se observa que todas estas normas son equivalentes. Note:* $\|f\|_2 = \|f\|_\Delta$.

Además, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|f\|_p \ \geq \ \|f\|_{L^2}\,, \ \forall f \in Dom(H_o)\,, \quad (3.28)$$

$$\|f\|_p \ \geq \ \|H_o f\|_{L^2}\,, \ \forall f \in Dom(H_o) \quad (3.29)$$

para $p \in [1, \infty]$.

Proposición 3.17 *El espacio* $(Dom(H_o), \|\cdot\|_p)$ *es completo, para* $p \in [1, \infty]$.

Prueba.- Esto sigue desde que $\|\cdot\|_p$ es equivalente a $\|\cdot\|_\Delta$ y $(Dom(H_o), \|\cdot\|_\Delta)$ es completo.

Proposición 3.18 *Sea*

$H_o : (Dom(H_o), \|\cdot\|_p) \longrightarrow L^2([-\pi, \pi])$

$f \longrightarrow H_o f = (k^2 \hat{f}(k))^\vee$

entonces H_o *es acotado y* $\|H_o\| \leq 1$.

Prueba.- Es inmediato de (3.29).

También, tenemos la siguiente propiedad que conecta $\|\cdot\|_p$ con el semigrupo $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0}$.

Proposición 3.19 *Sea* $t \geq 0$, $p \in [1, \infty]$, *si* $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ *entonces* $\|e^{-tHo} f_n - e^{-tHo} f\|_{L2} \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$.

Prueba.- De (3.28) tenemos que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ implica $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2}} f$. Luego, usando la Identidad de Parseval tenemos que $\widehat{f_n} \xrightarrow{\|\cdot\|_{l^2}} \widehat{f}$. Así,

$$\|e^{-tH_o} f_n - e^{-tH_o} f\|_{L^2} = \|e^{-tH_o}(f_n - f)\|_{L^2} \leq \sqrt{2\pi}\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\|_{l^2} \to 0$$

cuando $n \to +\infty$.

SEMIGRUPO DE CLASE C_O EN $DOM(H_O) \subset L^2([-\pi, \pi])$ CON $\|\cdot\|_\Delta$

Proposición 3.20 (Semigrupo de Clase C_o en $Dom(H_o)$**)** *Sea* $t \geq 0$, *definimos las aplicaciones* $e^{-tHo} f := (e^{-tk^2} \hat{f}(k))^\vee$, $\forall f \in Dom(H) \subset L^2([-\pi, \pi])$ *entonces* $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0} \subset B(Dom(H_o))$ *y además forma un semigrupo de contracción de clase* C_o *en el espacio* $(Dom(H_o), \|\cdot\|_\Delta)$ *de Hilbert.*

Prueba.- Sea $t > 0$ y $f \in Dom(H_o)$, usando (3.11) y que $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0}$ es un semi-grupo de contracción en $L^2([-\pi, \pi])$, tenemos

$$\begin{aligned} \|e^{-tH_o} f\|_\Delta^2 &= \|e^{-tH_o} f\|_{L^2}^2 + \|H_o(e^{-tH_o} f)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|f\|_{L^2}^2 + \|e^{-tH_o} H_o f\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|f\|_{L^2}^2 + \|H_o f\|_{L^2}^2 \\ &= \|f\|_\Delta^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Esto es,

$$\|e^{-tH_o} f\|_\Delta \leq \|f\|_\Delta , \ \forall f \in Dom(H_o) , \tag{3.31}$$

de donde se deduce que $e^{-tHo} \in B(Dom(H_o))$ y $\|e^{-tHo}\| \leq 1$.

Sea $f \in Dom(H_o)$ y $t > 0$, usando (3.11) y (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \|e^{-tH_o} f - f\|_\Delta^2 &= \|e^{-tH_o} f - f\|_{L^2}^2 + \|H_o(e^{-tH_o} f - f)\|_{L^2}^2 \\ &= \|e^{-tH_o} f - f\|_{L^2}^2 + \|e^{-tH_o} H_o f - H_o f\|_{L^2}^2 \to 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

cuando $t \to 0^+$.

Como también se satisface (3.1) y (3.4), entonces concluimos que $\{e^{-tHo}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción de clase C_o en $Dom(H_o)$.

Proposición 3.21 *Para todo* $f \in Dom(H_o)$, *la aplicación* $t \to e^{-tHo} f$ *es continua de* $[0, \infty)$ *a* $Dom(H_o)$.

Prueba.- Sea $f \in Dom(H_o)$ y $t > 0$, usando (3.11) y la proposición 3.3, tenemos

$$\begin{aligned} &\|e^{-(t+h)H_o} f - e^{-tH_o} f\|_\Delta^2 \\ &= \|e^{-(t+h)H_o} f - e^{-tH_o} f\|_{L^2}^2 + \|H_o(e^{-(t+h)H_o} f - e^{-tH_o} f)\|_{L^2}^2 \\ &= \|e^{-(t+h)H_o} f - e^{-tH_o} f\|_{L^2}^2 + \|e^{-(t+h)H_o} H_o f - e^{-tH_o} H_o f\|_{L^2}^2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$.

Proposición 3.22 *Sea* $t \geq 0$, *si* $f \xrightarrow{\|\cdot\|_\Delta} f$ *entonces* $e^{-tHo} f \xrightarrow{\|\cdot\|_\Delta} e^{-tHo} f$.

Prueba.- Usando (3.31) con $f_n - f \in Dom(H_o)$, tenemos

$\|e^{-tHo} f_n - e^{-tHo} f\|_\Delta = \|e^{-tHo} (f_n - f)\|_\Delta \leq \|f_n - f\|_\Delta \to 0$

cuando $n \to +\infty$.

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

Así, de las Proposiciones 3.11 y 3.21, obtenemos el siguiente resultado de existencia de solución.

Proposición 3.23 *Sea* $t \geq 0$, $e^{-tHo} f = (e^{-tk2} \hat{f}(k))^\vee$, $\forall f \in L^2([-\pi, \pi])$. *Entonces el Problema de Cauchy Abstracto*

$$(Q) \left| \begin{array}{l} u_t = -H_o u \\ u(0) = f \in Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \end{array} \right.$$

posee una única solución: $u(t) = e^{-tHo} f$, $\forall t \geq 0$, *con* $u \in C([0, \infty), Dom(H_o)) \cap C^1((0, \infty),$

$L^2([-\pi, \pi]))$, *donde consideramos a* $Dom(H_o)$ *con la norma del gráfico* $||\cdot||_\Delta$.

Observación 3.5 *En la proposición 3.23, podemos considerar* $||\cdot||_p$ *en vez de la norma del gráfico, desde que son equivalentes.*

Observación 3.6 *Se obtiene la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial, en las versiones: Proposiciones 3.4, 3.16, 3.19 y 3.22.*

CONCLUSIONES

En nuestro estudio hemos realizado lo siguiente:

1. Recordamos al operador diferencial H_o en $L^2([-\pi, \pi])$, que es densamente definido, no acotado, simétrico y que no admite extensión lineal simétrica a $L^2([-\pi, \pi])$.

2. Introducimos una familia de operadores y probamos que esta forma un semigrupo de contracción de clase C_o sobre $L^2([-\pi, \pi])$.

3. Demostramos que $-H_o$ es el generador infinitesimal de dicho semigrupo de contracción sobre $L^2([-\pi, \pi])$. Y además se obtiene que el Problema de Cauchy Abstracto (PCA) asociado está bien colocado.

4. Introducimos una norma en el dominio de H_o: $Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi])$, que hace que H_o sea acotado, e introducimos otras normas equivalentes a esta.

5. Probamos que las restricciones al $Dom(H_o)$ de los operadores del semigrupo C_o sobre el espacio $L^2([-\pi, \pi])$, forman también un semigrupo C_o sobre el espacio $Dom(H_o)$ de Hilbert.

6. Obtenemos un mejor resultado de existencia de solución del PCA asociado.

7. Las propiedades obtenidas se pueden generalizar para los espacios de Sobolev periódico y por lo tanto aplicarlo en el estudio de la existencia de solución de ecuaciones de evolución.

REFERENCIAS

[1] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.

[2] Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. 1978.

[3] Muñoz Rivera, J.E. Semigrupos e equações Diferenciais Parciais. Petropolis- LNCC. 2007.

[4] Pazy A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berlín. 1983.

[5] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

[6] Santiago Ayala, Y. Semigroup of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger equation. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 1061-1076.

[7] Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.

[8] Santiago Ayala, Y. El espacio Distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$ como completamiento del espacio P. Construção e difusão do conhecimento matemático. 2023; 34-60.

[9] Santiago Ayala, Y. Resolvente del Operador Diferencial en el espacio $L^2([-\pi, \pi])$. Construção e difusão do conhecimento matemático 2. 2023; 1-13.