SEMIGRUPO DE CONTRACCIÓN EN EL ESPACIO $l^2(Z)$

Data de aceite: 24/11/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas, Av. Venezuela S/N Lima 01
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este trabajo iniciamos estudiando al operador multiplicación M en el espacio $l^2(Z)$. Probamos que este operador no es acotado, es densamente definida y simétrica y por lo tanto no admite una extensión lineal simétrica a todo el espacio. Introducimos una familia de operadores en el espacio $l^2(Z)$ y demostramos que esta forma un semigrupo de contracción de clase C_o, teniendo a -M como su generador infinitesimal. Probamos también que si restringimos los dominios de esa familia de operadores estas aún conservan ser un semigrupo de contracción. Finalmente, damos resultados de existencia de solución del problema de Cauchy abstracto asociado y propiedades de dependencia continua de la solución en conexión a otras normas.
PALABRAS CLAVE: Espacio $l^2(Z)$, Teorema de Hellinger-Toeplitz, Semigrupo de contracción, existencia de solución, norma del gráfico.

SEMIGROUP OF CONTRACTION ON $L^2(Z)$ SPACE

ABSTRACT: In this work we begin by studying the multiplication operator M on the $l^2(Z)$ space. We prove that this operator is not bounded, is densely defined and symmetric and therefore does not admit a symmetric linear extension to the entire space. We introduce a family of operators on the $l^2(Z)$ space and demonstrate that it forms a contraction semigroup of class C_o, having $-M$ as its infinitesimal generator. We also prove that if we restrict the domains of that family of operators, they still remain a contraction semigroup. Finally, we give results of existence of solution of the associated abstract Cauchy problem and properties of continuous dependence of the solution in connection to other norms.
KEYWORDS: $l^2(Z)$ space, Hellinger-Toeplitz theorem, Semigroup of contraction, existence of solution, graph norm.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos algunos operadores en el espacio $l^2(Z)$. Esto es, introduciremos al operador multiplicación y probaremos que esta no es acotada, pero acotada con la norma del gráfico. Introduciremos una familia de operadores en l^2(Z) y mostraremos que son acotadas y que forman un semigrupo de contracción de clase C_o, teniendo como generador infinitesimal al operador multiplicación. Ahora, restringiendo el dominio de esta familia de operadores, probaremos que esta continua formando un semigrupo de contracción de clase C_o. Así, mejoraremos el resultado de existencia de solución para el problema de Cauchy abstracto asociado.

Podemos citar algunas referencias para el tratamiento de existencia de solución vía semigrupos, por ejemplo [1], [3], [4], [5] y [6].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en siete subsecciones. Así, en la subsección 3.1 estudiamos al operador Multiplicacion en l^2(Z). En la subsección 3.2, probamos que la familia de operadores introducida forma un semigrupo de contracción de clase C_o en l^2(Z). En la subsección 3.3, calculamos el generador infinitesimal del C_o semigrupo de contracción y obtenemos el primer resultado de existencia de solución para el problema de Cauchy abstracto asociado y también la dependencia continua de la solución. En la subsección 3.4, introducimos la norma del gráfico en el dominio de *M* que lo hace un espacio de Hilbert y probamos que *M* es acotado con esta norma. En la subsección 3.5, introducimos otras normas equivalentes a la norma del gráfico. En la subsección 3.6, probamos que la familia de operadores con dominio restringido continua siendo un semigrupo de contracción. En la subsección 3.7, obtenemos el resultado de existencia de solución en conexion con otras normas.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2 | METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

Definición 2.1 *Denotamos por S*(Z) *al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por*

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \, , \, \alpha_k \in \mathbb{C} \, / \, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \ y \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty \, , \ \forall n \geq 1 \right\}.$$

Definición 2.2 *Definimos el espacio l^2*(Z) *sobre los complejos*

$$l^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \, , \, \alpha_k \in \mathbb{C} \, / \, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < \infty \right\}.$$

Para ver propiedades de *S*(Z) y l^2(Z) citamos [1], [7] y [8].

Para la teoría de semigrupos, citamos [3] y [4].

Ahora, enunciaremos un importante resultado que será usado posteriormente.

Teorema 2.1 (Hellinger-Toeplitz) *Si T es un operador lineal no acotado, simétrico y densamente definido (i.e.* $\overline{Dom(T)} = H$*) en un espacio H de Hilbert, entonces no admite extensión lineal simétrica a H.*

Prueba. Citamos Kreyszig [2].

3 | PRINCIPALES RESULTADOS

3.1 El operador Multiplicación M en $l^2(\mathbb{Z})$

Introduciremos la siguiente aplicación

Definición 3.1 (Operador Multiplicación M **)** *Definamos la aplicación*

$$\begin{aligned} M : Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ \alpha = (\alpha_k) &\longrightarrow M\alpha := (k^2\alpha_k) \end{aligned}$$

donde $Dom(M) := \{\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ *tal que* $(k^2\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})\} \subset l^2(\mathbb{Z})$*.*

Proposición 3.1 *El operador Multiplicación M es* $\mathbb{C}$ *lineal, densamente definido, simétrico y no acotado. Además, M no admite extensión lineal simétrica a* $l^2(\mathbb{Z})$*.*

Prueba. Primero, se observa que $Dom(M)$ es un subespacio de $l^2(\mathbb{Z})$, pues si $\alpha, \beta \in Dom(M)$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha, \beta \in l^2(\mathbb{Z})$, $\alpha + c\beta \in l^2(\mathbb{Z})$ y $(k^2(\alpha + c\beta)_k) = (k^2\alpha_k + ck^2\beta_k) = (k^2\alpha_k) + c(k^2\beta_k) \in l^2(\mathbb{Z})$; y por consiguiente se tiene que $M\{\alpha + c\beta\} = M\alpha + cM\beta$, lo que prueba la linealidad de M.

Ahora, queremos probar que $S(\mathbb{Z}) \subset Dom(M)$. Sea $\alpha = (\alpha_k) \in S(\mathbb{Z})$, y como $S(\mathbb{Z}) \subset l^2(\mathbb{Z})$ entonces $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. También, se tiene

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^n |\alpha_k| < \infty\,, \ \forall n \geq 1\,.$$

Luego, $|\alpha_k| \to 0$ y $|\alpha_{-k}| \to 0$ cuando $k \to +\infty$. Así, $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ está acotada, i.e. $\exists C > 0$ tal que $|\alpha_k| \leq C$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^4 |\alpha_k|^2 \leq C^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^4 |\alpha_k| < \infty\,,$$

con esto se ha probado que $(k^2\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})$; luego $\alpha \in Dom(M)$.

Se cumple $S(\mathbb{Z}) \subset Dom(M)$, luego

$$l^2(\mathbb{Z}) = \overline{S(\mathbb{Z})}^{\|\cdot\|_{l^2}} \subset \overline{Dom(M)}^{\|\cdot\|_{l^2}} \subset l^2(\mathbb{Z})$$

de donde obtenemos $\overline{Dom(M)}^{\|\cdot\|_{l^2}} = l^2(\mathbb{Z})$.

Ahora, probaremos que M no es acotada. En efecto, para esto introducimos una familia (α^k) de elementos de $S(\mathbb{Z})$, donde

$$\alpha^k = (..,0,0, \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\text{k-ésima}}, 0,0...)$$

con $k \in Z - \{0\}$.

Se observa $\|\alpha^k\|_{l^2} = \frac{1}{k^2}$. Además, $M\alpha = e_k$ y $\|M\alpha\|_{l2} = \|e_k\|_{l2} = 1$, donde

$$e_k = (..,0,0, \underbrace{1}_{\text{k-ésima}}, 0,0...) \, .$$

Podemos observar que $\frac{\|M\alpha^k\|_{l2}}{\|\alpha^k\|_{l2}} = k^2, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ no es acotada. Luego el Operador M no es acotada.

Finalmente, probaremos que M es simétrico. En efecto, sean $\alpha, \beta \in Dom(M) \subset l^2(Z)$ tenemos

$$\begin{aligned}
< M\alpha, \beta > &= < (k^2\alpha_k), (\beta_k) > \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2\alpha_k\overline{\beta_k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k\overline{k^2\beta_k} \\
&= < (\alpha_k), (k^2\beta_k) > \\
&= < \alpha, M\beta > \ .
\end{aligned}$$

El además sale de usar el Teorema 2.1 de Hellinger-Toeplitz.

Observacion 3.1 *El operador M puede ser visto como una matriz diagonal infinita. Esto es,*

$$\begin{pmatrix}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k+1)^2 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \alpha_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{-1} \\ 0 \\ \alpha_1 \\ 2^2\alpha_2 \\ 3^2\alpha_3 \\ \vdots \\ k^2\alpha_k \\ (k+1)^2\alpha_{k+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

3.2 Semigrupo de Clase C_o en $l^2(Z)$

Proposición 3.2 (Semigrupo de Clase C_o en $l^2(Z)$) *Sea $t \geq 0$, definimos las aplicaciones $M_{Ft}\,\alpha := (e^{-tk2}\,\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(Z)$ entonces $\{M_F\}_{t\geq 0} \subset B(l^2(Z))$ y además forma un semigrupo de contracción de clase C_o en $l^2(Z)$.*

Prueba. En $t = 0$, sea $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, tenemos $M_{F0}\,\alpha = (e^{-0k2}\,\alpha_k) = (\alpha_k) = \alpha$, luego

$$M_{F_0} = I\,, \tag{3.1}$$

donde I es el operador identidad en $l^2(\mathbb{Z})$.

Ahora, probaremos que $\{M_{Ft}\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores lineales acotados y de contracción, i.e. $\|M_{Ft}\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

En efecto, sea $t > 0$ y $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}
\|M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^2}\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^2}|^2|\alpha_k|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-2tk^2}}_{\leq 1}|\alpha_k|^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^2}^2 \ < \ \infty\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De (3.2) tenemos que $M_{Ft}\,\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$; esto es, M_{Ft} está bien definida para $t \geq 0$. Por otro lado, es evidente que M_{Ft} es $\mathbb{C}$ lineal:

$$\begin{aligned}
M_{F_t}(\alpha + c\beta) &= (e^{-tk^2}\{\alpha + c\beta\}_k) \\
&= (e^{-tk^2}\{\alpha_k + c\beta_k\}) \\
&= (e^{-tk^2}\alpha_k + ce^{-tk^2}\beta_k) \\
&= (e^{-tk^2}\alpha_k) + c(e^{-tk^2}\beta_k) \\
&= M_{F_t}\alpha + cM_{F_t}\beta\,,
\end{aligned}$$

para todo α, $\beta \in l^2(\mathbb{Z})$ y $c \in \mathbb{C}$.

Así, de (3.2) también obtenemos que $\|M_{Ft}\,\alpha\|_{l2} \leq \|\alpha\|_{l2}$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. Esto es, el operador M_{Ft} es acotado y

$$\|M_{F_t}\| \leq 1\,,\ \forall t \geq 0\,. \tag{3.3}$$

Sea $t > 0$, $r > 0$ y $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, tenemos

$$\begin{aligned}
M_{F_{(t+r)}}\alpha &= \left(e^{-(t+r)k^2}\alpha_k\right) \\
&= \left(e^{-tk^2}e^{-rk^2}\alpha_k\right) \\
&= \left(e^{-tk^2}\{M_{F_r}\alpha\}_k\right) \\
&= M_{F_t}\{M_{F_r}\alpha\}
\end{aligned}$$

$$= \quad M_{F_t} \circ M_{F_r} \alpha \,,$$

esto es, $M_{F(t+r)} = M_{Ft} \circ M_{Fr}$ para $t > 0$ y $r > 0$. El caso $t = 0$ o $r = 0$ es evidente; luego

$$M_{F_{(t+r)}} = M_{F_t} \circ M_{F_r} \,, \ \forall t, r \geq 0. \tag{3.4}$$

Sea $\alpha \in l^2(Z)$, probaremos que $\|M_{Ft}\,\alpha - \alpha\|_{l2} \longrightarrow 0$ cuando $t \to 0^+$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |e^{-tk^2}\alpha_k - \alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |(e^{-tk^2} - 1)\alpha_k|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{-tk^2} - 1|^2}_{\widetilde{M}(k,t):=} |\alpha_k|^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $\lim_{t\to 0^+} \tilde{M}(k, t) = 0$.

Además, el k-ésimo término de la serie (3.5) está mayorado:

$$\widetilde{M}(k,t)|\alpha_k|^2 \leq 4|\alpha_k|^2$$

y como la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2$ es convergente, entonces usando el M-Test de Weierstrass tenemos que la serie converge absoluta y uniformemente. Luego,

$$\lim_{t\to 0^+} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{t\to 0^+} |e^{-tk^2} - 1|^2}_{=0} |\alpha_k|^2 = 0\,.$$

Así, hemos probado que

$$\lim_{t\to 0^+} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2} = 0\,, \ \forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})\,. \tag{3.6}$$

De (3.1), (3.4), (3.3) y (3.6) concluimos que $\{M_{Ft}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción de clase C_o en $l^2(Z)$.

Proposición 3.3 $\forall \alpha \in l^2(Z)$, *la aplicación:* $t \to M_{Ft}\,\alpha$ *es continua de* $[0, \infty)$ *a* $l^2(Z)$.

Prueba. Sea $t > 0$, $h > 0$, usando la propiedad de semigrupo, la desigualdad (3.3) y el límite (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} &= \|M_{F_t}M_{F_h}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \\ &= \|M_{F_t}\{M_{F_h}\alpha - \alpha\}\|_{l^2} \\ &\leq \|M_{F_h}\alpha - \alpha\|_{l^2} \ \to \ 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

cuando $h \to 0^+$.

Ahora, considerando $h > 0$ tal que $t - h > 0$ y procediendo análogamente como en (3.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\|M_{F_{t-h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} &= \|M_{F_{t-h}}\alpha - M_{F_{t-h}}M_{F_h}\alpha\|_{l^2} \\ &= \|M_{F_{t-h}}\{\alpha - M_{F_h}\alpha\}\|_{l^2} \\ &\leq \|M_{F_h}\alpha - \alpha\|_{l^2} \;\to\; 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

cuando $h \to 0^+$.

De (3.7) y (3.8) tenemos que la aplicación es continua en $t \in IR^+$.

Proposición 3.4 *Si* $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\longrightarrow} \alpha$ *entonces* $\|M_{F_t}\alpha^n - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$.

Prueba. Es inmediato desde que de (3.2) se tiene

$$\|M_{F_t}\alpha^n - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} = \|M_{F_t}(\alpha^n - \alpha)\|_{l^2} \leq \|\alpha^n - \alpha\|_{l^2}\,.$$

3.3 Cálculo del G.I. de $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ en $l^2(Z)$

Proposición 3.5 *$-M$ es el Generador infinitesimal (G.I.) del semigrupo de contracción $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ en $l^2(Z)$.*

Prueba. Si A es el G.I. del semigrupo de contracción $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ en $l^2(Z)$ entonces todo se reduce a probar que $Dom(A) = Dom(M)$ y $A = -M$.

1. $Dom(M) \subset Dom(A)$.Sea $\alpha \in Dom(M)$ entonces $\alpha \in l^2(Z)$ y $M\alpha := (k^2\alpha_k) \in l^2(Z)$, i.e.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k^2\alpha_k|^2 < \infty \tag{3.9}$$

Sea $t > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} + M\alpha\right\|_{l^2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{-tk^2}\alpha_k - \alpha_k}{t} + k^2\alpha_k\right|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\left\{\underbrace{\frac{e^{-tk^2}-1}{t} + k^2}_{H(k,t):=}\right\}\alpha_k\right|^2\end{aligned}$$

donde $\lim\limits_{t\to 0} H(k, t) = 0$. También tenemos

$$|H(k,t)|^2|\alpha_k|^2 \leq 2k^4|\alpha_k|^2$$

y como vale (3.9), usando el M -test de Weierstrass tenemos que la serie $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|H(k,t)|^2|\alpha_k|^2$ converge absoluta y uniformemente, luego

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha - \alpha}{t} + M\alpha\right\|_{l^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underbrace{\lim_{t\to 0^+} H(k,t)}_{=0}|^2|\alpha_k|^2 = 0\,.$$

Así, $\lim\limits_{t\to 0^+}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t} + M\alpha\right\|_{l^2} = 0$. Esto es, existe $\lim\limits_{t\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t}\right\} = -M\alpha$. Luego, $\alpha \in D(A)$ y $A\alpha = -M\alpha$.

2. $Dom(A) \subset Dom(M)$.- Sea $\alpha \in Dom(A)$ entonces $\alpha \in l^2(\mathbb{Z})$ y $\lim_{t\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t}\right\} =$ $A\alpha$ en $l^2(\mathbb{Z})$. Esto es,

lím ¨ $MFt\alpha - \alpha - A\alpha$¨

$$\lim_{t\to 0^+}\left\|\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t} - A\alpha\right\|_{l^2} = 0\,.$$

Así, dado $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}\epsilon > \left\|\frac{M_{F_t}\alpha-\alpha}{t} - A\alpha\right\|_{l^2}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{-tk^2}\alpha_k-\alpha_k}{t} - \{A\alpha\}_k\right|^2\\ &> \left|\frac{e^{-tk^2}\alpha_k-\alpha_k}{t} - \{A\alpha\}_k\right|^2, \ \forall k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{e^{-tk^2}\alpha_k-\alpha_k}{t} \to \{A\alpha\}_k \quad \text{cuando } t \to 0\,,$$

pero sabemos que

$$\frac{e^{-tk^2}\alpha_k-\alpha_k}{t} \to -k^2\alpha_k \quad \text{cuando } t \to 0$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $\{A\alpha\}_k = -k^2{}_{\alpha k}$. Entonces

$$l^2(\mathbb{Z}) \ni A\alpha = (-k^2\alpha_k)\,. \tag{3.10}$$

De (3.10) tenemos que $(-k^2\alpha_k) \in l^2(\mathbb{Z})$, esto es $\alpha \in Dom(M)$ y $A\alpha = -M\alpha$.

De los dos items se concluye que $Dom(A) = Dom(M)$ y $A = -M$.

Proposición 3.6 *Sea $t \geq 0$, si $\alpha \in Dom(M)$ entonces $M_Ft\alpha \in Dom(M)$. Además, se cumple: $MM_{Ft}\alpha = M_{Ft}M\alpha$, $\forall\alpha \in Dom(M)$.*

Prueba. En efecto, sea $\alpha \in Dom(M)$, $t > 0$ y $r > 0$ y $-M$ es el G. I. de $\{M_Ft\}_{t\geq 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$, luego

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_r}(M_{F_t}\alpha)-M_{F_t}\alpha}{r}\right\} &= \lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_t}(M_{F_r}\alpha)-M_{F_t}\alpha}{r}\right\}\\ &= \lim_{r\to 0^+} M_{F_t}\left\{\frac{M_{F_r}\alpha-\alpha}{r}\right\}\\ &= M_{F_t}\left[\lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{M_{F_r}\alpha-\alpha}{r}\right\}\right]\\ &= M_{F_t}[-M\alpha] \in l^2(\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Así, existe el límite en $l^2(\mathbb{Z})$. Esto es $M_F\alpha \in Dom(M)$ y

$$-M(M_{F_t}\alpha) = M_{F_t}[-M\alpha] = -M_{F_t}[M\alpha],$$

i.e.

$$M \circ M_{F_t}\alpha = M_{F_t} \circ M\alpha\,, \ \forall \alpha \in Dom(M)\,. \tag{3.11}$$

Una consecuencia inmediata es el siguiente resultado.

Proposición 3.7 *El operador $M : Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ es cerrado.*

Prueba. Desde que $-M$ es el G.I. del semigrupo de contraccion $\{M_{F_t}\}_{t\geq 0}$ en $l^2(\mathbb{Z})$ tenemos que $-M$ es cerrado, luego M también lo es.

Así, obtenemos el siguiente resultado de existencia de solución.

Proposición 3.8 *El Problema de Cauchy Abstracto*

$$(Q) \left| \begin{array}{l} u_t = -Mu \\ u(0) = \alpha \in Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

posee una única solución: $u(t) = M_{F_t}\alpha$, $\forall t \geq 0$, donde $u \in C([0,\infty), l^2(\mathbb{Z})) \cap C^1([0,\infty), l^2(\mathbb{Z}))$.

Observación 3.2 *De la Proposición 3.4 tenemos que la solución del problema (Q) depende continuamente del dato inicial.*

3.4 Norma del Gráfico en *Dom*(*M*) ⊂ $l^2(\mathbb{Z})$

Definición 3.2 *En Dom(M) ⊂ $l^2(\mathbb{Z})$ definimos la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} <\cdot,\cdot>_\Delta : Dom(M) \times Dom(M) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\alpha,\beta) & \longrightarrow & <\alpha,\beta>_\Delta \end{array}$$

donde

$$<\alpha,\beta>_\Delta := <\alpha,\beta>_{l^2} + <M\alpha, M\beta>_{l^2}\,, \ \forall \alpha,\beta \in Dom(M)\,.$$

Se observa que $<\cdot,\cdot>_\Delta$ está bien definida.

Proposición 3.9 *La aplicación $<\cdot,\cdot>_\Delta$ es un producto interno en Dom(M) ⊂ $l^2(\mathbb{Z})$.*

Prueba. Es inmediato desde que $<\cdot,\cdot>_{l^2}$ es un producto interno.

Así, el producto interno $<\cdot,\cdot>_\Delta$ induce una norma $\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta}$ en *Dom*(*M*):

$$\|\alpha\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta} = \sqrt{\|\alpha\|_{l^2}^2 + \|M\alpha\|_{l^2}^2}\,, \ \forall \alpha \in Dom(M)\,. \tag{3.12}$$

Denotaremos a $\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>_\Delta}$ por $\|\cdot\|_\Delta$.

Así,

Proposición 3.10 *El espacio normado $(Dom(M), \|\cdot\|_\Delta)$ satisface*

$$\|\alpha\|_\Delta \geq \|\alpha\|_{l^2}\,, \ \forall \alpha \in Dom(M)\,, \tag{3.13}$$

$$\|\alpha\|_\Delta \geq \|M\alpha\|_{l^2}\,, \ \forall \alpha \in Dom(M)\,. \tag{3.14}$$

Prueba. Es inmediato de (3.12).

Proposición 3.11 *El espacio* $(Dom(M), \|\cdot\|_\Delta)$ *es completo.*

Prueba. Sea (α^n) una sucesión de Cauchy en $Dom(M)$ con $\|\cdot\|_\Delta$. Probaremos que $\exists \alpha \in Dom(M)$ tal que $\|\alpha^n - \alpha\|_\Delta \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Dado $\epsilon > 0$, $\exists N_o \in IN$ tal que

$$\epsilon > \|\alpha^n - \alpha^m\|_\Delta \text{ siempre que } n, m > N_o . \quad (3.15)$$

De (3.13) tenemos

$$\epsilon > \|\alpha^n - \alpha^m\|_\Delta \geq \|\alpha^n - \alpha^m\|_{l2} \text{ siempre que } n, m > N_o . \quad (3.16)$$

De (3.14) tenemos

$$\epsilon > \|\alpha^n - \alpha^m\|_\Delta \geq \|M(\alpha^n - \alpha^m)\|_{l^2} = \|M\alpha^n - M\alpha^m\|_{l^2} \text{ siempre que } n, m > N_o . \quad (3.17)$$

De (3.16) tenemos que (α^n) es una sucesión de Cauchy en $l^2(Z)$, y como $l^2(Z)$ es completo, entonces $\exists \alpha \in l^2(Z)$ tal que

$$\alpha^n \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\longrightarrow} \alpha . \quad (3.18)$$

De (3.17) tenemos que $(M\alpha^n)$ es una sucesión de Cauchy en $l^2(Z)$, y como $l^2(Z)$ es completo, entonces $\exists \beta \in l^2(Z)$ tal que

$$M\alpha^n \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\longrightarrow} \beta . \quad (3.19)$$

De (3.18), (3.19) y como M es un operador cerrado, entonces

$$\alpha \in Dom(M) \text{ y } M\alpha = \beta . \quad (3.20)$$

De (3.18), (3.19) y (3.20) tenemos

$$\begin{aligned} \|\alpha^n - \alpha\|_\Delta^2 &= \|\alpha^n - \alpha\|_{l^2}^2 + \|M(\alpha^n - \alpha)\|_{l^2}^2 \\ &= \|\alpha^n - \alpha\|_{l^2}^2 + \|M\alpha^n - M\alpha\|_{l^2}^2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Entonces $\|\alpha^n - \alpha\|_\Delta$ H $\to 0$ cuando $n \to +\infty$. Esto es, $\exists \alpha \in Dom(M)$ tal que $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\longrightarrow} \alpha$.

Observacion 3.3 *El espacio* $(Dom(M), \|\cdot\|_\Delta)$ *es un espacio de Banach o también* $(Dom(M), <\cdot,\cdot>_\Delta)$ *es un espacio de Hilbert.*

Proposición 3.12 *Sea*

$$\begin{aligned} M : (Dom(M), \|\cdot\|_\Delta) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ \alpha &\longrightarrow M\alpha = (k^2\alpha_k) \end{aligned}$$

entonces M *es un operador acotado y* $\|M\| \leq 1$.

Prueba. Es inmediato de (3.14).

Tenemos la siguiente propiedad que conecta $\|\cdot\|_\Delta$ con el semigrupo $\{M_{Ft}\}_{t\geq 0}$.

Proposición 3.13 *Sea* $t \geq 0$, $M_{F_t}\alpha = (e^{-tk^2}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$, *si* $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\longrightarrow} \alpha$ *entonces* $\|M_{Ft}\alpha^n - M_{Ft}\alpha\|_{l2} \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$.

Prueba. Es inmediato desde que usando (3.13) tenemos que $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\longrightarrow} \alpha$ implica $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\longrightarrow}$

α y como

$$\|M_{F_t}\alpha^n - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} = \|M_{F_t}(\alpha^n - \alpha)\|_{l^2} \leq \|\alpha^n - \alpha\|_{l^2} \, ,$$

concluimos.

3.5 Otras normas en *Dom*(*M*)

Ahora, introduciremos otras normas en *Dom*(*M*).

Observación 3.4 (p-normas en *Dom*(*M*)**)** *En Dom*(*M*) ⊂ l^2(Z) *podemos definir otras normas, por ejemplo:* $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\begin{aligned} 1 \leq p < \infty \, , \; \|\alpha\|_p &:= (\|\alpha\|^p_{l^2} + \|M\alpha\|^p_{l^2})^{\frac{1}{p}} \\ \|\alpha\|_\infty &:= \max\{\|\alpha\|_{l^2}, \|M\alpha\|_{l^2}\} \end{aligned}$$

para α ∈ *Dom*(*M*)*. Y se observa que todas estas normas son equivalentes.*

Note: $\|\alpha\|_2 = \|\alpha\|_\Delta$.

Además, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|\alpha\|_p \geq \|\alpha\|_{l^2} \, , \; \forall \alpha \in Dom(M) \, , \tag{3.21}$$

$$\|\alpha\|_p \geq \|M\alpha\|_{l^2} \, , \; \forall \alpha \in Dom(M) \tag{3.22}$$

para p ∈ [1, ∞].

Proposición 3.14 *El espacio* (*Dom*(*M*), $\|\cdot\|_p$) *es completo, para p* ∈ [1, ∞].

Prueba. Esto sigue desde que $\|\cdot\|_p$ es equivalente a $\|\cdot\|_\Delta$ y (*Dom*(*M*), $\|\cdot\|_\Delta$) es completo.

Proposición 3.15 *Sea*

$$\begin{aligned} M : (Dom(M), \|\cdot\|_p) &\longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) \\ \alpha &\longrightarrow M\alpha = (k^2\alpha_k) \end{aligned}$$

entonces M es acotado y $\|M\| \leq 1$ *.*

Prueba. Es inmediato de (3.22).

También, tenemos la siguiente propiedad que conecta $\|\cdot\|_p$ con el semigrupo $\{M_{Ft}\}_{t\geq 0}$.

Proposición 3.16 *Sea* $t \geq 0, \; M_{F_t}\alpha = (e^{-tk^2}\alpha_k), \; \forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z}).$ *Sea* $p \in [1, \infty],$ *si* $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_p}{\rightarrow} \alpha$ *entonces* $\|M_{F_t}\alpha^n - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} \rightarrow 0$ *cuando n* ⟶ +∞.

Prueba. De (3.21) tenemos que $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_p}{\rightarrow} \alpha$ implica $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_{l^2}}{\rightarrow} \alpha$. Luego,

$$\|M_{F_t}\alpha^n - M_{F_t}\alpha\|_{l^2} = \|M_{F_t}(\alpha^n - \alpha)\|_{l^2} \leq \|\alpha^n - \alpha\|_{l^2} \rightarrow 0$$

cuando *n* ⟶ +∞.

3.6 Semigrupo de Clase C_o en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$ con $\|\cdot\|_\Delta$

Proposición 3.17 (Semigrupo de Clase C_o en $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$) *Sea $t \geq 0$, definimos las aplicaciones $M_{Ft}\alpha := (e^{-tk^2}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in Dom(M) \subset l(\mathbb{Z})$ entonces $\{M_{Ft}\}_{t\geq 0} \subset B(Dom(M))$ y además forma un semigrupo de contracción de clase C_o en el espacio $(Dom(M), \|\cdot\|_\Delta)$ de Hilbert.*

Prueba. Sea $t > 0$ y $\alpha \in Dom(M)$, usando (3.11) y que $\{M_{Ft}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción en $l^2(\mathbb{Z})$, tenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha\|_\Delta^2 &= \|M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 + \|MM_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 \\ &\leq \|\alpha\|_{l^2}^2 + \|M_{F_t}M\alpha\|_{l^2}^2 \\ &\leq \|\alpha\|_{l^2}^2 + \|M\alpha\|_{l^2}^2 \\ &= \|\alpha\|_\Delta^2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Esto es,

$$\|M_{F_t}\alpha\|_\Delta \leq \|\alpha\|_\Delta\,,\ \forall \alpha \in Dom(M)\,, \tag{3.24}$$

de donde se deduce que $M_{Ft} \in B(Dom(M))$ y $\|M_F t\| \leq 1$.

Sea $\alpha \in Dom(M)$ y $t > 0$, usando (3.11) y (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_\Delta^2 &= \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2}^2 + \|M(M_{F_t}\alpha - \alpha)\|_{l^2}^2 \\ &= \|M_{F_t}\alpha - \alpha\|_{l^2}^2 + \|M_{F_t}M\alpha - M\alpha\|_{l^2}^2 \to 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

cuando $t \to 0^+$.

Proposición 3.18 *Para todo $\alpha \in Dom(M)$, la aplicación $t \to M_F t\alpha$ es continua de $[0, \infty)$ a $Dom(M)$.*

Prueba. Sea $\alpha \in Dom(M)$ y $t > 0$, usando (3.11) y la proposición 3.3, tenemos

$$\begin{aligned} \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_\Delta^2 &= \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 + \|M(M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha)\|_{l^2}^2 \\ &= \|M_{F_{t+h}}\alpha - M_{F_t}\alpha\|_{l^2}^2 + \|M_{F_{t+h}}M\alpha - M_{F_t}M\alpha\|_{l^2}^2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$.

Proposición 3.19 *Sea $t \geq 0$, si $\alpha^n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\to} \alpha$ entonces $M\ \alpha^n \overset{\|\cdot\|_\Delta}{\to} M_{Ft}\alpha$.*

Prueba. Usando (3.24) con $\alpha^n - \alpha \in Dom(M)$, tenemos

$$\|M_{F_t}\alpha^n - M_{F_t}\alpha\|_\Delta = \|M_{F_t}(\alpha^n - \alpha)\|_\Delta \leq \|\alpha^n - \alpha\|_\Delta \to 0$$

cuando $n \to +\infty$.

3.7 Existencia de solución

Así, obtenemos el siguiente resultado de existencia de solución.

Proposición 3.20 *Sea $t \geq 0$, $M_{Ft}\alpha = (e^{-tk^2}\alpha_k)$, $\forall \alpha \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces el Problema de*

Cauchy Abstracto

$$(Q)\left|\begin{array}{l} u_t = -Mu \\ u(0) = \alpha \in Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

posee una única solución: $u(t) = M_{Ft}\alpha$, $\forall t \geq 0$, *con* $u \in C([0, \infty), Dom(M)) \cap C^1([0, \infty), l^2(\mathbb{Z}))$, *donde consideramos a* $Dom(M)$ *con la norma del gráfico* $\|\cdot\|_\Delta$.

Observación 3.5 *En la Proposición 3.20, podemos considerar* $\|\cdot\|_p$ *en vez de la norma del gráfico, desde que son equivalentes.*

4 I CONCLUSIONES

En nuestro estudio hemos realizado lo siguiente:

1. Presentamos al operador multiplicación M en $l^2(\mathbb{Z})$, probamos que es densamente definido, no acotado, simétrico y que no admite extensión lineal simétrica a $l^2(\mathbb{Z})$.

2. Introducimos una familia de operadores y probamos que esta forma un semigrupo de contracción de clase C_o sobre $l^2(\mathbb{Z})$.

3. Demostramos que $-M$ es el generador infinitesimal de dicho semigrupo de contracción sobre $l^2(\mathbb{Z})$. Y además se obtiene que el Problema de Cauchy Abstracto (PCA) asociado está bien colocado.

4. Introducimos una norma en el dominio de M: $Dom(M) \subset l^2(\mathbb{Z})$, que hace que M sea acotado, e introducimos otras normas equivalentes a esta.

5. Probamos que las restricciones al $Dom(M)$ de los operadores del semigrupo C_o sobre el espacio $l^2(\mathbb{Z})$, forman también un semigrupo C_o sobre el espacio $Dom(M)$ de Hilbert.

6. Obtenemos un mejor resultado de existencia de solución del PCA asociado.

7. Las propiedades obtenidas se pueden generalizar para los espacios $l^2(\mathbb{Z})$ con peso, espacios de Sobolev periódico H^s_{per} con $s \in IR$; y por lo tanto aplicarlo en el estudio de la existencia de solución de ecuaciones de evolución.

REFERENCIAS

[1] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.

[2] Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. 1978.

[3] Mun˜oz Rivera, J.E. Semigrupos e equa¸c˜oes Diferenciais Parciais. PetropolisLNCC. 2007.

[4] Pazy A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences. 44 Springer Verlag. Berlín. 1983.

[5] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

[6] Santiago Ayala, Y. Semigroup of weakly continuous operators associated to a generalized Schr¨odinger equation. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 1061-1076.

[7] Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.

[8] Santiago Ayala, Y. Los espacios $l^2(Z)$ con peso: propiedades y su conexion con los espacios de Sobolev. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 88-104.