

CUSTO MÍNIMO DE ENERGIA NO TRANSPORTE DE SENSORES EM UMA REDE BICOLOR VIA PROCESSOS DE POISSON DISTINTOS

Data de submissão: 19/09/2023

Data de aceite: 02/10/2023

Adolfo Manoel Dias da Silva

Department of Statistics, University of
Brasília, Brasília, Brazil
Department of Statistics, University of
Brasília, Brasília, Brazil

Cira E Guevara Otiniano

Department of Statistics, University of
Brasília, Brasília, Brazil

RESUMO: Neste trabalho, obtemos uma fórmula fechada para a distância esperada entre eventos de dois Processos de Poisson independentes com tempos de chegada X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots e, respectivamente, taxas de chegada λ_1 e λ_2 . Como consequência, encontramos um intervalo para o custo mínimo esperado de energia no transporte de sensores em uma rede bicolor. Ilustrações gráficas dos nossos resultados também foram adicionados.

PALAVRAS-CHAVE: Processo de Poisson · Sensor · custo ·

1 | INTRODUÇÃO

Os sensores móveis são usados em monitoramento e comunicação de dados para diversos fins, como pesquisa

oceanográfica, navegação aérea, segurança, redes sem fio e infraestruturas complexas, entre outros. Um dos assuntos de pesquisa nesta área é a determinação de uma alocação ótima dos sensores com o objetivo de gerar uma cobertura a um custo mínimo. Com o desenvolvimento de tecnologia de sensor móvel, uma boa cobertura pode ser obtida movimentando os sensores móveis para as posições desejadas. Porém, o sensor móvel é geralmente equipado com bateria e o gasto de energia é muito maior durante o movimento do sensor do que em sua função de detecção. Portanto, é importante minimizar os movimentos do sensor para prolongar sua vida útil e manter a confiabilidade da rede a qual pertence. Existem duas abordagens para estudar o Custo Mínimo Esperado de Transporte: a soma ou o máximo dos movimentos dos sensores de suas posições iniciais em direção aos destinos alvo. Ajtai et al.(1984) consideram $2n$ sensores, n azuis e n vermelhos, distribuídos independentemente e uniformemente

em um quadrado unitário e demonstraram que o Custo Mínimo Esperado de Transporte, denotado por T_n e definido por $T_n := \min_n \sum_{i=1}^n d(X_{\pi(i)}, Y_i)$, está em um intervalo. Kranakis (2014) estudou o Custo Mínimo Esperado de Transporte segundo a abordagem da soma de movimentos de sensores de suas posições iniciais em direção às posições finais. Considerou que os sensores movimentam-se aleatoriamente sobre uma reta de acordo com um processo de Poisson e encontrou uma fórmula analítica fechada, em função de polinômio de Pochhammer, para a distância esperada entre eventos de dois processos de Poisson com respectivos tempos de chegada X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots e, taxas de chegada iguais a λ . Com isso foi possível determinar o intervalo para o Custo Mínimo Esperado de Transporte. Recentemente, Kapelko (2017), ao considerar dois processos aleatórios gerais idênticos e independentes, determinou a diferença absoluta esperada para todos os expoentes $b > 0$. Desse modo, ele soluciona outro problema em aberto deixado por Kapelko (2015). Sua principal contribuição foi encontrar fórmulas assintóticas para os momentos sem uso de qualquer função de densidade específica. Nessa abordagem, os resultados são válidos para uma ampla classe de distribuições. Em todos os trabalhos mencionados acima, para o cálculo do Custo Mínimo Esperado de Transporte, assume-se que os sensores se movimentam conforme dois processos estocásticos independentes e com a mesma distribuição (i.i.d). Porém, ao considerar dois processos estocásticos para o movimento dos sensores, é mais natural assumir que os processos não necessariamente possuem a mesma distribuição. O objetivo deste trabalho é determinar o Custo Mínimo Esperado de Transporte para o movimento de sensores que ocorre conforme dois processos de Poisson com taxas λ_1 e λ_2 (não necessariamente iguais) e tempos de chegadas X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, Y_2, \dots, Y_n , respectivamente.

Nossa metodologia difere da utilizada por Kranakis (2014) e Kapelko (2017), pois eles se baseiam somente em resultados da teoria combinatória, porém aqui utilizamos também resultados das funções especiais gama, gama incompleta superior e inferior definidas, respectivamente, por

$$\Gamma(a) := \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

$$\Gamma(a, x) := \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \tag{1.2}$$

$$\gamma(a, x) := \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt. \tag{1.3}$$

Desta forma, primeiro apresentamos o resultado da distância esperada entre os tempos X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots relativos a aos processos de Poisson independentes com respectivas taxas λ_1 e λ_2 , em seguida mostramos os resultados obtidos para o custo mínimo esperado de transporte na alocação de sensores cujos os movimentos ocorrem conforme esses dois processos. Finalmente, apresentamos ilustrações gráficas de nossos resultados

geradas a partir de simulações dos processos através da programa computacional R.

2 I DISTÂNCIA ESPERADA

Sejam X_r, Y_k variáveis aleatórias que representam o i -ésimo e k -ésimo tempos de chegadas de dois processos de poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2 . Então

$$X_i \sim \text{Gama}(i, \lambda_1) \quad \text{e} \quad Y_k \sim \text{Gama}(k, \lambda_2)$$

cujas funções de densidade de probabilidade são, respectivamente,

$$f_{X_i}(x) := f_1(x) = \frac{\lambda_1^i}{\Gamma(i)} x^{i-1} e^{-\lambda_1 x} \quad x > 0 \quad (2.1)$$

e

$$f_{Y_k}(x) := f_2(y) = \frac{\lambda_2^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda_2 y} \quad y > 0, \quad (2.2)$$

Teorema Considere dois processos de Poisson independentes com taxas de chegada λ_1 e λ_2 , cujos tempos de chegadas são, respectivamente, X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots . Então, a identidade

$$E|X_{k+r} - Y_k| = \frac{k+r}{\lambda_1} - \frac{k}{\lambda_2} + 2k(k+r) \binom{2k+r}{k} \left[\frac{B_x(k+r, k+1)}{\lambda_2} - \frac{B_x(k+r+1, k)}{\lambda_1} \right] \quad (2.3)$$

é válida para $r \geq 0, k \geq 1$ inteiros e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Prova Pela teoria de distribuição condicional, utilizando a hipótese de que os processos são independentes, temos que

$$\begin{aligned} E(|X_i - Y_k|) &= E[E(|X_i - Y_k| \mid Y_k)] \\ &= \int_0^\infty E(|X_i - Y_k| \mid Y_k = y) f_2(y) dy \\ &= \int_0^\infty E(|X_i - y|) f_2(y) dy. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Além disso

$$E(|X_i - y|) = \int_0^y -(x-y) f_1(x) dx + \int_y^\infty (x-y) f_1(x) dx. \quad (2.5)$$

Sejam $I_1 = \int_0^y -(x-y) f_1(x) dx$ e $I_2 = \int_y^\infty (x-y) f_1(x) dx$. No cálculo de I_1 e I_2 utiliza-se a densidade de probabilidade (2.1) e algumas manipulações algébricas mostradas abaixo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^y -(x-y) f_1(x) dx \\ &= \int_0^y -x f_1(x) dx + y \int_0^y f_1(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_y^\infty x f_1(x) dx - \int_0^\infty x f_1(x) dx + y \int_0^y f_1(x) dx \\
&= \frac{\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^i e^{-\lambda_1 x} dx - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y \lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_0^y x^{i-1} e^{-\lambda_1 x} dx
\end{aligned} \tag{2.6}$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_y^\infty (x - y) f_1(x) dx \\
&= \frac{\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^i e^{-\lambda_1 x} dx - \frac{y \lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^{i-1} e^{-\lambda_1 x} dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5) e em seguida ao aplicar as funções gama superior e gama inferior, obtem-se

$$\begin{aligned}
E(|X_i - y|) &= \frac{2\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^i e^{\lambda_1 x} dx - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y \lambda_1^i}{\Gamma(i)} \left(\int_0^y x^{i-1} e^{-\lambda_1 x} dx - \int_y^\infty x^{i-1} e^{-\lambda_1 x} dx \right) \\
&= \frac{2}{\lambda_1 \Gamma(i)} \Gamma(i + 1, \lambda_1 y) - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y}{\Gamma(i)} \left(\gamma(i, \lambda_1 y) - \Gamma(i, \lambda_1 y) \right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Aplicando (2.8) em (2.4), segue que

$$\begin{aligned}
E(|X_i - Y_k|) &= \int_0^\infty E(|X_i - y|) f_2(y) dy \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{2}{\lambda_1 \Gamma(i)} \Gamma(i + 1, \lambda_1 y) - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y}{\Gamma(i)} \left(\gamma(i, \lambda_1 y) - \Gamma(i, \lambda_1 y) \right) \right] f_2(y) dy \\
&= -\frac{i}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1 \Gamma(i)} \underbrace{\int_0^\infty \Gamma(i + 1, \lambda_1 y) f_2(y) dy}_{J_1} + \frac{1}{\Gamma(i)} \left(\underbrace{\int_0^\infty y \gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy}_{J_2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(i)} \left(\underbrace{\int_0^\infty y \Gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy}_{J_3} \right).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

A prova finaliza ao calcular as integrais J_1 , J_2 e J_3 , em que

$$J_1 := \int_0^\infty \Gamma(i + 1, \lambda_1 y) f_2(y) dy; \quad J_2 := \int_0^\infty y \gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \quad e \quad J_3 := \int_0^\infty y \Gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy.$$

Para o cálculo de J_1 basta usar as funções Gamma e Gamma superior definidas em (1.1) (1.2). Assim

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \int_0^{\infty} \Gamma(i+1, \lambda_1 y) f_2(y) dy \\
&= \frac{i! \lambda_2^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} \sum_{s=0}^i \frac{(\lambda_1 y)^s}{s!} y^{k-1} dy \\
&= \frac{i! \lambda_2^k}{\Gamma(k)} \sum_{s=0}^i \left(\frac{\lambda_1^s}{s!} \int_0^{\infty} y^{k+s-1} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} dy \right) \\
&= \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(k)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \sum_{s=0}^i \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k)}{s!} \right]. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Para calcular J_2 e J_3 , usam-se as equações (1.2), (1.3) e a função de densidade (2.2):

$$\begin{aligned}
J_2 &:= \int_0^{\infty} y \gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \\
&= \int_0^{\infty} y(i-1)! \left(1 - e^{-\lambda_1 y} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(\lambda_1 y)^s}{s!} \right) f_2(y) dy \\
&= (i-1)! \int_0^{\infty} y f_2(y) dy - (i-1)! \frac{\lambda_2^k}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(\lambda_1 y)^s}{s!} y^k dy \\
&= \frac{\Gamma(i)k}{\lambda_2} - \frac{\Gamma(i)}{\lambda_2 \Gamma(k)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k+1} \sum_{s=0}^{i-1} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k+1)}{s!} \right]. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J_3 &:= \int_0^{\infty} y \Gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \\
&= \frac{(i-1)! \lambda_2^k}{\Gamma(k)} \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda_1^s}{s!} \int_0^{\infty} y^{k+s} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} dy \right) \\
&= \frac{\Gamma(i)}{\lambda_2 \Gamma(k)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k+1} \sum_{s=0}^{i-1} \left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k+1)}{s!} \right]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Logo, substituindo os resultados de (2.10), (2.11) e (2.12) em (2.9), resulta em:

$$\begin{aligned}
E|X_i - Y_k| &= \frac{k}{\lambda_2} - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{2i}{\lambda_1 \Gamma(k)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \sum_{s=0}^i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k)}{s!} \\
&\quad - \frac{1}{\lambda_2 \Gamma(k)} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{k+1} \sum_{s=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k+1)}{s!}. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

A expressão (2.13) equivale ao resultado (2.3), quando se considera a relação de coeficientes binomias, abaixo, com a distribuição beta incompleta, dada em Didonato (1966),

$$\sum_{s=0}^L \binom{n+s}{s} x^s = \frac{1 - (L+1) \binom{L+n+1}{n} B_x(L+1, n+1)}{(1-x)^{n+1}}, \quad (2.14)$$

em que $B_x(a, b)$ denota a função beta incompleta, definida por

$$B_x(a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt.$$

3 I CUSTO MÍNIMO ESPERADO DE TRANSPORTE

Aqui é definida e obtido um intervalo para o custo mínimo esperado de transporte da máxima combinação bicolor aleatória de um sensor.

Considere X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, Y_2, \dots, Y_n como sendo os n primeiros tempos de chegada de dois processos de Poisson com taxas de chegada, respectivamente, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Além disso, considere que os sensores são colocados aleatoriamente na semi-reta $[0, \infty)$. A k -ésima posição do sensor na cor amarela é determinada pelo seu tempo de chegada X_k e a k -ésima posição do sensor na cor vermelha é determinada pelo seu tempo de chegada Y_k . O custo mínimo esperado de transporte do sensor em uma rede bicolor é dado por

$$C_{opt}(\lambda, n) = \sum_{k=1}^n E|X_k - Y_k|. \quad (3.1)$$

Teorema 2. Considere dois processos de Poisson com taxas λ_1 e λ_2 , com $\lambda_1 \geq \lambda_2$, e respectivos tempos de chegadas X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots . Então,

$$C_{opt}(\lambda, n) \in [l_n, s_n], \quad (3.2)$$

em que

$$l_n = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{2}{\lambda_2} \times S(n, \lambda_1, \lambda_2), \quad (3.3)$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \times S(n, \lambda_1, \lambda_2), \quad (3.4)$$

e

$$S(n, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^n \frac{(xx')^k}{B(k+1, k)} \quad \text{com} \quad x = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{e} \quad x' = 1 - x. \quad (3.5)$$

Prova. Para obter a primeira desigualdade, utiliza-se a identidade (ver Didonato (1966)

$$I_x(a, b) = I_x(a-1, b+1) - \frac{x^{a-1} x'^b}{bB(a, b)} \quad (3.6)$$

na equação (2.3) do Teorema 1. Assim, quando $a = k + 1$ e $b = k$ e $r = 0$ a esperança da diferença se transforma em

$$E|X_k - Y_k| = \frac{k}{\lambda_1} - \frac{k}{\lambda_2} + 2k \left[\frac{I_x(k, k+1)}{\lambda_2} - \frac{I_x(k+1, k)}{\lambda_1} \right]. \quad (3.7)$$

De (3.7), quando $\lambda_1 \geq \lambda_2$, se tem que o limite inferior do custo esperado é a expressão da direita da desigualdade

$$C_{opt}(\lambda, n) \geq \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{2}{\lambda_2} \sum_{k=1}^n \frac{(xx')^k}{B(k+1, k)}. \quad (3.8)$$

Por outro lado, as identidades

$$I_x(a, b) = I_x(a, b+1) - \frac{x^a x'^b}{bB(a, b)} \quad (3.9)$$

e

$$I_x(a, b) = I_x(a+1, b) + \frac{x^a x'^b}{aB(a, b)} \quad (3.10)$$

permitem mostrar que

$$C_{opt}(\lambda, n) \leq \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{(xx')^k}{B(k+1, k)}. \quad (3.11)$$

O resultado (3.2) sai diretamente das desigualdades (3.8) e (3.11).

Corolário 1. Considere dois processos de Poisson com taxas λ_1 e λ_2 , e respectivos tempos de chegadas X_1, X_2, \dots e Y_1, Y_2, \dots . Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então

$$C_{opt}(\lambda, n) = \frac{2n}{3\lambda} \binom{n + \frac{1}{2}}{n}. \quad (3.12)$$

Prova. Do Teorema 2, tem-se que

$$\frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) + \frac{2}{\lambda_2} \times S, \lambda_1, \lambda_2 \leq C_{opt}(\lambda, n) \leq \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \right) \times S,$$

com

$$S = S(n, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^n \frac{(xx')^k}{B(k+1, k)}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a inequação fica simplificada em

$$\frac{2}{\lambda} \times S(n, \lambda) \leq C_{opt}(\lambda, n) \leq \frac{2}{\lambda} \times S(n, \lambda). \quad (3.13)$$

Isto é, de (3.13), tem-se que

$$\begin{aligned}
 C_{opt}(\lambda, n) &= \frac{2}{\lambda} \times S(n, \lambda) \\
 &= \frac{2}{\lambda} \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{-2k} \binom{2k}{k}.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Consequentemente, pela Eq.(3.14), segue o resultado. O Corolário 1 é um dos principais resultados de Kapelko (2017).

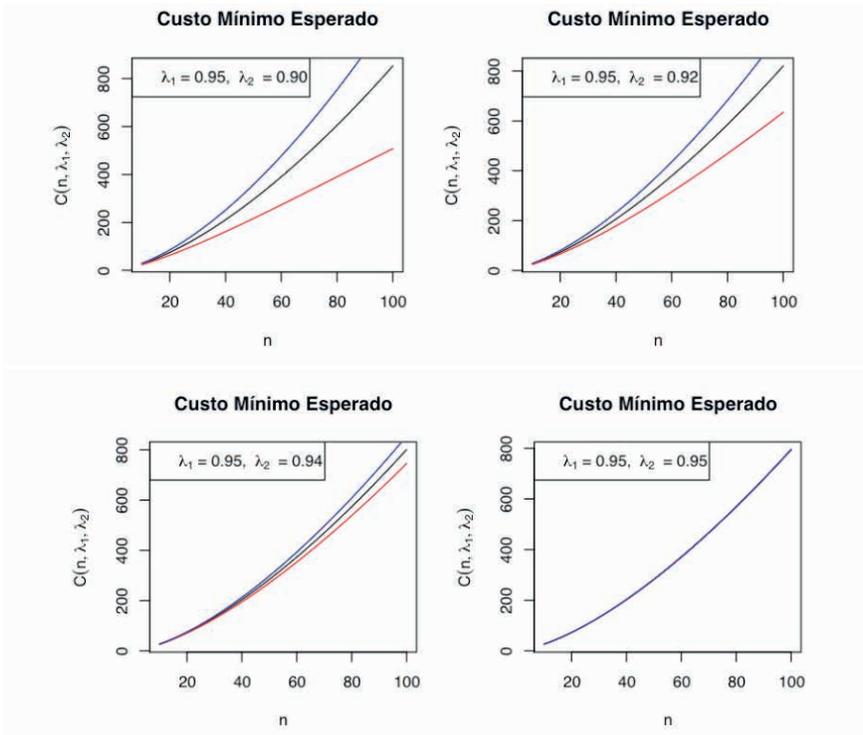


Figure 1: Gráficos referentes ao Custo Mínimo Esperado de Transporte, C_{opt} , e ao seu intervalo; Vermelho: Limite Inferior; Azul: Limite Superior.

3.1 Gráficos do Custo (3.1)

A Figura 3.1 ilustra que o resultado do Teorema 2 é consistente, pois a medida que as taxas dos processos de Poisson se aproximam o custo assume o valor do Corolário 1 que também foi encontrado por Kapelko (2017).

A construção gráfica foi realizada a linguagem computacional R.

REFERENCES

Ajtai, M., J. Komlós, G. Tusnády (1984). On optimal matchings. *Combinatorica*, 44: 259–264. DiDonato, A. e M. Jarnagin (1966). A method for computing the incomplete beta function ratio.

Revised. Rel. tecn. U. S. Naval Weapons Laboratory Dahlgren, Virginia.

Kapelko, R. (2017). On the expected moments between two identical random processes with application to sensor network. arXiv preprint arXiv:1705.08855.

Kapelko, R. (2015). The weighted event distance of Poisson processes. arXiv:1507.01048, Kranakis, E. (2014). On the event distance of Poisson processes with applications to sensors. *Discrete*

Applied Mathematics 179, pp. 152–162.

R Core Team (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.