

## RESOLVENTE DEL OPERADOR DIFERENCIAL EN EL ESPACIO $L^2([-π, π])$

*Data de aceite: 02/10/2023*

**Yolanda Silvia Santiago Ayala**

Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas  
<https://orcid.org/0000-0003-2516-0871>

**RESUMEN:** En este trabajo, estudiamos al operador diferencial en el subespacio distribucional periódico  $L^2([-π, π])$ . Determinamos el resolvente de este operador y su caracterización mediante la convolución. Esta teoría nos permite resolver problemas distribucionales. Finalmente, damos algunas aplicaciones y comentarios.

**PALABRAS CLAVE:** Operador diferencial, Resolvente de un operador, espacio distribucional periódico, Transformada de Fourier, existencia de solución.

### RESOLVENT OF DIFFERENTIAL OPERATOR ON $L^2([-π, π])$ SPACE

**ABSTRACT:** In this work, we study the differential operator on  $L^2([-π, π])$  periodic distributional space. We determine the resolvent of this operator and its characterization through convolution. This theory allows us to solve distributional

problems. Finally, we give some applications and comments.

**KEYWORDS:** Differential operator, Resolvent of operator, periodic distributional space, Fourier transform, existence of solution.

### 1 | INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos al operador diferencial en el espacio de Hilbert  $L^2([-π, π])$ . Daremos la forma explícita del resolvente de este operador y su caracterización mediante la convolucion. Además, determinaremos la solución de un problema distribucional.

Este estudio puede ser aplicado a los espacios de Sobolev periódico  $H^s_{per}$ . Podemos citar algunos trabajos en estos espacios, como [1], [3]-[8]. Como referencia para este estudio citamos a Iorio [1] y [8].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos

en seis subsecciones. Así, en la subsección 3.1 estudiamos al Operador diferenciación  $D$  en  $L^2([-\pi, \pi])$ .

En la subsección 3.2, estudiamos al Operador diferenciación  $D^2$  en  $L^2([-\pi, \pi])$ . En la subsección 3.3, estudiamos al Operador diferencial  $H_o$  en  $L^2([-\pi, \pi])$ . En la subsección 3.4, estudiamos al Operador  $F_z(H_o)$  en  $L^2([-\pi, \pi])$  y probamos que es acotada y que representa al resolvente en  $z$  de  $H_o$ . En la subsección 3.5, obtenemos otra caracterización del resolvente usando la convolución. En la subsección 3.6, damos una aplicación donde evidenciamos la forma explícita de la solución de un problema distribucional.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

## 2 | METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

**Definición 2.1** Sea

$$P := C_{per}^\infty([-\pi, \pi]),$$

el espacio de las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciable y periódica con periodo  $2\pi$ .

Así, se prueba que  $P$  es un espacio métrico completo.

También,

$$\begin{aligned} P' &:= \{T : P \rightarrow \mathcal{C} \text{ lineal tal que } \exists \psi_n \in P \text{ y} \\ &\quad \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in P \} \\ &= (P)'. \end{aligned}$$

Esto es,  $P'$  es el dual topológico de  $P$ . Así,  $P'$  es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

**Definición 2.2** Denotamos por  $S(\mathbb{Z})$  al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \alpha_k \in \mathcal{C} / \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \text{ y } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| |k|^n < \infty, \forall n \geq 1 \right\}$$

y  $S(\mathbb{Z})$  es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por  $S(\mathbb{Z}) := \alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \alpha_k \in \mathcal{C} / \exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  con  $|\alpha_k| \leq C|k|^N, \forall k \neq 0$ .

Para ver propiedades de  $P, P', S(\mathbb{Z})$  y  $S(\mathbb{Z})$  citamos [1] y [9]; y para  $L^2([-\pi, \pi])$  y propiedades citamos [10].

Ahora, enunciaremos un importante resultado que será usado posteriormente.

**Teorema 2.1 (Hellinger-Toeplitz)** Si  $T$  es un operador lineal no acotado, simétrico y densamente definido (i.e.  $\overline{\text{Dom}(T)} = H$ ) en un espacio  $H$  de Hilbert, entonces no admite

extensión lineal simétrica a  $H$ .

**Prueba.** Citamos Kreyszig [2].

### 3 I PRINCIPALES RESULTADOS

#### 3.1 El operador $D$ de diferenciación en $L^2([-\pi, \pi])$

**Proposición 3.1 (Operador Diferenciación  $D$ )** El operador

$$\begin{aligned} D : P \subset L^2([-\pi, \pi]) &\longrightarrow L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi &\longrightarrow -i\varphi' \end{aligned}$$

es  $\mathbb{C}$  lineal, densamente definido, simétrico y no acotado.

**Prueba.** Fácilmente se prueba que es lineal. Sean  $f, g \in P$ , usando la identidad de Parseval y que  $k \in \mathbb{R}$ ,  $(-if)^\wedge(k) = kf^\wedge(k)$  y  $(-ig)^\wedge(k) = kg^\wedge(k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (Df, g) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(z)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{k \widehat{g}(z)} \\ &= (f, Dg), \end{aligned}$$

esto es,  $D$  es simétrico.

En efecto,  $D$  es densamente definido pues  $\overline{P}^{\|\cdot\|_2} = L^2([-\pi, \pi])$ .

Ahora, probaremos que  $D$  no es acotado. Para esto introducimos una familia  $(\varphi_k)$  de funciones en  $P$ , donde  $\varphi_k(x) := \frac{e^{ikx}}{k}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Se observa que  $\|\varphi_k\|_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{|k|}$ .

Además,  $D\varphi_k = e^{ikx}$  y  $\|D\varphi_k\|_2 = \sqrt{2\pi}$ .

Podemos observar que  $\frac{\|D\varphi_k\|_2}{\|\varphi_k\|_2} = |k|$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , no es acotada. Luego  $D$  no es acotado.

#### 3.2 El Operador $D^2$ de Diferenciación en $L^2([-\pi, \pi])$

**Proposición 3.2 (Operador Diferenciación  $D^2$ )** El operador

$$\begin{aligned} D^2 : P \subset L^2([-\pi, \pi]) &\longrightarrow L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi &\longrightarrow -\varphi'' \end{aligned}$$

es  $\mathbb{C}$ -lineal, densamente definido, simétrico y no acotado.

**Prueba.** En efecto, sea  $c \in \mathbb{C}$  y  $\varphi, \psi \in P$ , tenemos

$$\begin{aligned} D^2(\varphi + c\psi) &= -(\varphi + c\psi)'' \\ &= -\varphi'' - c\psi'' \\ &= D^2\varphi - cD^2\psi, \end{aligned}$$

esto es,  $D^2$  es  $\mathbb{C}$ -lineal.

Ahora, probaremos que  $D^2$  es simétrico. Sean  $\varphi, \psi \in P$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (D^2\varphi, \psi) &= (-\varphi'', \psi) \\
 &= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(x)\overline{\psi}(x) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\overline{\psi}'(x) dx - \varphi'(x)\overline{\psi}(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\overline{\psi}'(x) dx \\
 &= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\overline{\psi}''(x) dx + \varphi(x)\overline{\psi}'(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\overline{\psi}''(x) dx \\
 &= (\varphi, D^2\psi),
 \end{aligned}$$

desde que  $\psi, \varphi$  y sus derivadas son periódicas de periodo  $2\pi$ .

Ahora, probaremos que el Operador  $D^2$  no es acotado. En efecto, para esto introduciremos una sucesión de funciones en  $P$ . Esto es, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\psi_k(x) := \frac{e^{ikx}}{k^2}.$$

Se observa que  $\psi_k \in P$  y que  $\|\psi_k\|_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{k^2}$ . Además,  $\psi_k''(x) = -e^{ikx}$  y  $\|D^2\psi_k\|_2 = \|\psi_k''\|_2 = \sqrt{2\pi}$ .

Podemos observar que  $\frac{\|D^2\psi_k\|_2}{\|\psi_k\|_2} = k^2, \forall k \in \mathbb{N}$  no es acotada. Así, el operador  $D^2$  no es acotado.

Como  $Dom(D^2) = P$  y  $\overline{P}^{\|\cdot\|_2} = L^2([-\pi, \pi])$ , entonces el operador  $D^2$  es densamente definido.

**Proposición 3.3** *El operador diferenciación no acotado  $D^2$  no admite extensión a la cerradura de su dominio:  $\overline{P}^{\|\cdot\|_2} = L^2([-\pi, \pi])$ .*

**Prueba.** En efecto, si admitiera extensión a la cerradura de su dominio sería

$$\tilde{D}^2 : \overline{P} = L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow L^2([-\pi, \pi])$$

$$g \rightarrow -g' \text{ derivada distribucional}$$

lo cual no es posible, pues  $\exists f \in L^2([-\pi, \pi])$  tal que  $f'' \notin L^2([-\pi, \pi])$ . En efecto, definiendo

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -\pi < x \leq \pi \\ \text{con } f(x+2\pi) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tenemos que:  $f \in C_{per}([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi])$  y  $f'' = 2\delta - 2\delta_{\pi} \notin L^2([-\pi, \pi])$  pues

$f'' \notin \mathcal{P}(Z)$ . Para verificar esto, basta calcular:

$$\widehat{f''}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } |k| \text{ es par o cero} \\ \frac{2}{\pi}, & \text{si } |k| \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f''}(k)|^2 = 2 \sum_{k=\text{impar}} |\widehat{f''}(k)|^2 = +\infty.$$

En consecuencia tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.4** *Si un operador lineal no es acotado, puede suceder que no admita extensión a la cerradura de su dominio.*

**Prueba.** Esto sigue de la proposición 3.3.

### 3.3 El operador $H_o$ en $L^2([-\pi, \pi])$

**Proposición 3.5 (Operador Diferenciación  $H_o$ )** *El Operador*

$$H_o : \text{Dom}(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow L^2([-\pi, \pi]) \\ f \rightarrow -f'' \text{ derivada distribucional}$$

con  $\text{Dom}(H_o) := \{f \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } -f'' \in L^2([-\pi, \pi])\}$  es lineal, simétrico, densamente definido y no acotado. Además,  $H_o$  no admite extensión lineal simétrica a  $L^2([-\pi, \pi])$ .

**Prueba.** Sean  $f, g \in \text{Dom}(H_o)$  y  $c \in \mathbb{C}$  entonces  $f$  y  $g$  son infinitamente diferenciables en el sentido distribucional, con  $f'', g'' \in L^2([-\pi, \pi])$ , luego,  $(cf + g)'' = cf'' + g'' \in L^2([-\pi, \pi])$ , esto es  $H_o(cf + g) = cH_of + H_o g$ .

Se cumple  $P \subset \text{Dom}(H_o)$ , luego

$$L^2([-\pi, \pi]) = \overline{P}^{\|\cdot\|_2} \subset \overline{\text{Dom}(H_o)}^{\|\cdot\|_2} \subset L^2([-\pi, \pi]),$$

de donde obtenemos que  $\overline{\text{Dom}(H_o)}^{\|\cdot\|_2} = L^2([-\pi, \pi])$ .

Ahora, probaremos que el Operador  $H_o$  no es acotado. En efecto, para esto introduciremos la sucesión  $(\psi_k)$  de funciones en  $P$ , donde  $\psi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{k^2}$ . Se observa que  $\|\psi_k\|_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{k^2}$ . Además,  $\psi_k'' = -e^{ikx}$  y  $\|H_o \psi_k\|_2 = \|\psi_k''\|_2 = \sqrt{2\pi}$ .

Podemos observar que  $\frac{\|H_o \psi_k\|_2}{\|\psi_k\|_2} = k^2, \forall k \in \mathbb{N}$  no es acotada. Luego, el operador  $H_o$  no es acotado.

Sean  $f, g \in \text{Dom}(H_o)$ , probaremos que  $(-f'', g) = (f, -g'')$ . En efecto, usando la Identidad de Parseval, las igualdades:  $\widehat{f''}(k) = -k^2 \widehat{f}(k)$  y  $\widehat{g''}(k) = -k^2 \widehat{g}(k), \forall k \in \mathbb{Z}$ , tenemos

$$\begin{aligned} (-f'', g) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-f'')^{\wedge}(k) \overline{\widehat{g}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{k^2 \widehat{g}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \overline{-\widehat{g''}(k)} \\ &= (f, -g''), \end{aligned}$$

esto es,  $(H_o f, g) = (f, H_o g)$  para todo  $f, g \in \text{Dom}(H_o)$ , con lo que hemos probado que  $H_o$  es simétrico.

El además, sale de usar el Teorema 2.1.

**Observación 3.1** El operador  $H_o$  es una extensión de  $D^2$ .

A seguir, daremos algunas propiedades importantes de  $H_o$ .

**Proposición 3.6** Se satisfacen los siguientes enunciados:

1. Para  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\phi_k$  es una autofunción de  $H_o$  correspondiente al autovalor  $k^2$ , desde que  $H_o \phi_k = D^2 \phi_k = -\phi_k'' = k^2 \phi_k$  con  $\phi_k(x) := e^{ikx}$ .

2.  $H_o(\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 P_k(\cdot)$ , donde para  $f \in \text{Dom}(H_o)$  se tiene para cada  $k \in \mathbb{Z}$   $P_k(f) = \frac{1}{2\pi} (f, \phi_k) \phi_k \in L(\{\phi_k\})$ . Recordemos que  $P_k$  es el operador proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado  $L(\{\phi_k\})$ . Y observemos que la convergencia de la serie es con la norma  $\|\cdot\|_2$ .

**Prueba.** Es inmediato.

**Observación 3.2** Se verifica que  $\{k^2\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \sigma_p(H_o)$ .

### 3.4 El operador $F_z(H_o) \in B(L^2([-\pi, \pi]))$

Ahora, a partir de  $H_o$  generaremos un operador acotado, y para ello introduciremos una función  $F_z$ .

**Definición 3.1** Sea la función  $F_z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$  y  $k^2 - z \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , definimos:

$$\begin{aligned} F_z(H_o) : \text{Dom}(F_z(H_o)) \subset L^2([-\pi, \pi]) &\longrightarrow L^2([-\pi, \pi]) \\ f &\longrightarrow F_z(H_o)f := \left\{ (F_z(k^2) \hat{f}(k)) \right\}^\vee, \end{aligned}$$

con  $\text{Dom}(F_z(H_o)) := \left\{ f \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } (F_z(k^2) \hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}$ .

Así, de la definición de  $F_z(H_o)$  tenemos

$$F_z(H_o)f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_z(k^2) \underbrace{\hat{f}(k) \phi_k}_{P_k(f)}, \quad \forall f \in \text{Dom}(F_z(H_o)),$$

donde la convergencia de la serie es con la norma  $\|\cdot\|_2$ .

Ahora, estudiaremos algunas propiedades de  $F_z(H_o)$ .

**Proposición 3.7** La aplicación  $F_z(H_o)$  es  $\mathbb{C}$ -lineal.

**Prueba.** Sean  $f, g \in \text{Dom}(F_z(H_o))$  entonces  $f, g \in L^2([-\pi, \pi]), (F_z(k^2) \hat{f}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$  y  $(F_z(k^2) \hat{g}(k)) \in l^2(\mathbb{Z})$ . Luego,  $\{f + cg\} \in L^2([-\pi, \pi])$  y

$$\begin{aligned} (F_z(k^2) \{f + cg\}^\wedge(k)) &= (F_z(k^2) \{\hat{f}(k) + c\hat{g}(k)\}) \\ &= (F_z(k^2) \hat{f}(k) + cF_z(k^2) \hat{g}(k)) \\ &= (F_z(k^2) \hat{f}(k)) + c(F_z(k^2) \hat{g}(k)) \in l^2(\mathbb{Z}). \quad (3.1) \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Fourier a (3.1), tenemos  $F_z(H_0)\{f + cg\} = F_z(H_0)f + cF_z(H_0)g$ .

**Proposición 3.8** Sea  $z \in \mathbb{C}$  y  $F_z(x) := \frac{1}{x-z}$  tal que  $k^2 - z \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $F_z(H_0) \in B(L^2([- \pi, \pi]))$ .

**Prueba.** Primero notemos que existe  $\inf_{k \in \mathbb{Z}} |k^2 - z| > 0$  y si denotamos  $\delta := \inf_{k \in \mathbb{Z}} |k^2 - z|$  tenemos:

$$0 < \delta \leq |k^2 - z|, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Luego,

$$|F_z(k^2)| = \frac{1}{|k^2 - z|} \leq \frac{1}{\delta}, \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.2)$$

Sea  $f \in \text{Dom } F_z(H_0)$ , usando (3.2) y la Identidad de Parseval se tiene

$$\begin{aligned} \|F_z(H_0)f\|_2^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |F_z(k^2)\hat{f}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi\delta^{-2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi\delta^{-2} \|\hat{f}\|_2^2 \\ &= \delta^{-2} \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Esto es,  $\|F_z(H_0)f\|_2 \leq \delta^{-1} \|f\|_2, \forall f \in \text{Dom}(F_z(H_0))$ . Así,  $F_z(H_0)$  es acotada y  $\|F_z(H_0)\| \leq \delta^{-1}$ .

Nos resta probar que  $\text{Dom}(F_z(H_0)) = L^2([- \pi, \pi])$ . Una de las inclusiones es inmediata. Probaremos que si  $f \in L^2([- \pi, \pi])$  entonces  $(F_z(k^2)\hat{f}(k)) \in \ell(\mathbb{Z})$ .

En efecto, por hipótesis, aplicando la transformada de Fourier a  $f$  tenemos  $\hat{f} \in \ell(\mathbb{Z})$ , luego usando la acotación (3.2), tenemos  $(F_z(k^2)\hat{f}(k)) \in \ell(\mathbb{Z})$ .

Finalmente veremos que  $F_z(H_0)$  es el inverso del operador  $H_0 - z$ ; esto es,  $F_z(H_0) = (H_0 - z)^{-1}$ .

**Proposición 3.9 (Caracterización de  $F_z(H_0)$ )** Sea  $z \in \mathbb{C}$  y  $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$  tal que  $k^2 - z \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $B(L^2([- \pi, \pi])) \ni F_z(H_0) = (H_0 - z)^{-1}$ , esto es satisface:

1.  $(H_0 - z)F_z(H_0)f = f, \forall f \in \text{Dom}F_z(H_0) = L^2([- \pi, \pi])$  y  $F_z(H_0)f \in \text{Dom}(H_0)$ .
2.  $F_z(H_0)(H_0 - z)f = f, \forall f \in \text{Dom}(H_0)$ .

**Prueba.** Primero veremos que la función  $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \frac{k^2}{k^2 - z}$  es acotada.

$$\left| \frac{k^2}{k^2 - z} \right| = \left| 1 + \frac{z}{k^2 - z} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq 1 + |z| \left| \frac{1}{k^2 - z} \right| \\
&\leq \underbrace{1 + |z|\delta^{-1}}_{\xi(z) :=}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde  $0 < \delta := \inf_{k \in \mathbb{Z}} |k^2 - z|$ .

Sea  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , usando (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^4 |\{F_z(H_o)f\}^\wedge(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^4 |F_z(k^2)\widehat{f}(k)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^4 \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k^2 - z|^2} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k^2}{k^2 - z} \right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq \underbrace{\left( \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{k^2}{k^2 - z} \right| \right)^2}_{\leq \xi(z)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F_z(H_o)f \in \text{Dom}(H_o)$  y

$$\begin{aligned}
(H_o - z)F_z(H_o)f &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k^2 - z)\{F_z(H_o)f\}^\wedge(k)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k^2 - z) \frac{\widehat{f}(k)}{k^2 - z} \phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\phi_k \\
&= f.
\end{aligned}$$

Ahora, sea  $g \in \text{Dom}(H_o)$ , entonces

$$\begin{aligned}
F_z(H_o)(H_o - z)g &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_z(k^2)(k^2 - z)\widehat{g}(k)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\phi_k \\
&= g.
\end{aligned}$$

### Definición 3.2

$$A := \{z \in \mathbb{C}, k^2 - z \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

**Observación 3.3** Si  $z \in A$  entonces el operador  $H_o - zI : \text{Dom}(H_o) \rightarrow L^2([-\pi, \pi])$  no es acotado.

**Observación 3.4** De la Proposición 3.8 tenemos



$$\{F_z(H_o)\}_{z \in A} \subset B(L^2([-\pi, \pi])) .$$

Al operador  $F_z(H_o)$  lo llamaremos: Operador Resolvente de  $H_o$ . Otra notación para este operador es  $R(z, H_o)$ .

Así, tenemos

**Observación 3.5**  $A \subset \rho(H_o)$  y  $\rho(H_o) \neq \emptyset$ , donde  $\rho(H_o)$  es el conjunto resolvente de  $H_o$ .

**Observación 3.6** De las observaciones 3.2, 3.5 y desde que  $\mathcal{C} = \{k^2\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup A$  entonces  $\sigma_\rho(H_o) = \{k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $\rho(H_o) = A$  y  $\sigma_c(H_o) = \sigma_r(H_o) = \emptyset$ .

Además, se tiene

**Observación 3.7 (Existencia de solución)** Sea  $z \in A$ ,

$$\forall g \in L^2([-\pi, \pi]) \exists! f \in \text{Dom}(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } (H_o - z)f = g \quad (3.4)$$

donde  $f := F_z(H_o)g = (H_o - z)^{-1}g = R(z, H_o)g$ .

Así, el problema en (3.4) posee una única solución.

### 3.5 Caracterización de $F_z(H_o)$ vía la convolución

Usando que en  $P'$ , la transformada de la convolución es el producto de las convoluciones, tenemos otra caracterización para  $F_z(H_o)$ :

**Proposición 3.10** Sea  $z \in \mathcal{C}$  y  $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$  tal que  $k^2 - z \neq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  entonces

$$F_z(H_o)f = G_z * f, \forall f \in L^2([-\pi, \pi]) ,$$

donde  $C_{per}([-\pi, \pi]) \ni G_z := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2-z} \phi_k$  y esta serie converge uniformemente.

**Prueba.-** La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Probaremos que la serie  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2-z} \phi_k$  converge uniformemente,  $\forall z \in \mathcal{C}$  fijo tal que  $z \neq k^2$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . En efecto, como  $|\frac{1}{k^2-z} \phi_k(x)| = |\frac{1}{k^2-z} e^{ikx}| = \frac{1}{|k^2-z|}$  y  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{k^2-z} e^{ikx}$ , tenemos para  $n < m$ :

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2-z} e^{ikx} + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{1}{k^2-z} e^{ikx} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{|k^2-z|} + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{1}{|k^2-z|} \\ &= 2 \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{|k^2-z|} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tomando supremo a la desigualdad (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-\pi, \pi])} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq 2 \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{|k^2 - z|} \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{|(n+1)^2 - z|} + \dots + \frac{1}{|(m)^2 - z|} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tomando límite a la desigualdad (3.6) cuando  $n, m \rightarrow +\infty$  tenemos que la sucesión  $(S_n)$  es de Cauchy en  $C_{per}([-\pi, \pi])$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  y por lo tanto  $S_n$  es convergente en  $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_\infty)$ , denotamos a ese límite como  $G_z$ . i.e.  $S_n$  converge uniformemente.

2. Luego, como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, entonces  $G_z$  es continuo y puntualmente vale:  $G_z(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - z} \phi_k(x)$ .

3. Obviamente, como las  $\phi_k$  son periódicas, la unicidad del límite de la serie nos conduce a que  $G_z$  es periódica. Así,  $G_z \in C_{per}([-\pi, \pi])$ .

Finalmente, sea  $f \in L^2([-\pi, \pi]) \subset P'$  aplicamos  $F_z(H_o)$ , y usando que en  $P'$  es válido que la transformada de la convolucion es el producto de las convoluciones obtenemos:

$$\begin{aligned} F_z(H_o)f &= R(z, H_o)f \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k^2 - z} \phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - z} \widehat{f}(k) \phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{G}_z(k) \widehat{f}(k) \phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{G_z * f}(k) \phi_k \\ &= G_z * f \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $G_z = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 - z} \phi_k$ .

**Observacion 3.8** Si  $z \in A$  entonces  $R(z, H_o)f = G_z * f, \forall f \in L^2([-\pi, \pi])$ , donde  $G = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 - z} \phi_k$ .

**Observacion 3.9** Sea  $z \in A$ , si  $g \in L^2([-\pi, \pi])$  entonces  $L^2([-\pi, \pi]) \supset \text{Dom}(H_o) \ni f = G_z * g$  es solución de (3.4).

### 3.6 Existencia de solución de una ecuación distribucional

**Proposición 3.11** Sea  $z \in \mathbb{C}$  y  $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$  tal que  $k^2 - z \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$  entonces  $G := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2 - z} \phi_k$  es solución de la ecuación distribucional

$$\left| \begin{array}{l} \exists f \in P' \text{ tal que} \\ -f'' - zf = 2\pi\delta. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

**Prueba.** En efecto, sea  $\varphi \in P$  y como  $G_z \in C_{\text{per}}(-\pi, \pi] \subset P'$ , tenemos

$$\begin{aligned} (-G_z'' - zG_z, \varphi) &= -(G_z'', \varphi) - (zG_z, \varphi) \\ &= (G_z, -\varphi'') - (G_z, z\varphi) \\ &= (G_z, -\varphi'' - z\varphi). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ahora, observamos que

$$\begin{aligned} \{-\varphi'' - z\varphi\}^\wedge(k) &= -\widehat{\varphi}''(k) - z\widehat{\varphi}(k) \\ &= -(ik)^2\widehat{\varphi}(k) - z\widehat{\varphi}(k) \\ &= (k^2 - z)\widehat{\varphi}(k). \end{aligned}$$

Luego

$$-\varphi'' - z\varphi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k)(k^2 - z)\phi_k. \tag{3.10}$$

También,

$$\begin{aligned} (k^2 - z)(G_z, \phi_k) &= (k^2 - z) \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - z} e^{imx} e^{ikx} dx \\ &= (k^2 - z) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - z} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{ikx} dx \\ &= (k^2 - z) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - z} \delta_{k,m} 2\pi \\ &= 2\pi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando (3.10) y (3.11) en (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} (-G_z'' - zG_z, \varphi) &= (G_z, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k)(k^2 - z)\phi_k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) \underbrace{(k^2 - z)(G_z, \phi_k)}_{=2\pi} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) \\ &= 2\pi\varphi(0) \\ &= 2\pi(\delta_0, \varphi) \\ &= (2\pi\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $-G_z'' - zG_z = 2\pi\delta$  en  $P'$ .

Ahora, veamos que si  $f \in P'$  es solución de (3.8) entonces su expresión es  $G_z$ . En

efecto, tomando la transformada de Fourier a la ecuación obtenemos

$$k^2 \widehat{f}(k) - z \widehat{f}(k) = 2\pi \widehat{\delta}(k) = 1$$

esto es,  $\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^2 - z}$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  desde que  $z \in A$ . Luego,  $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - z} \phi_k$ .

## 4 | CONCLUSIONES

En nuestro estudio hemos realizado lo siguiente:

1. Hemos estudiado al operador  $D$  y su compuesta  $D^2$  en  $L^2([-\pi, \pi])$ , mostrando sus propiedades.
2. Introducimos un operador  $H_o$  en  $L^2([-\pi, \pi])$ , que es una extensión de  $D^2$ , y hemos probado que está densamente definida, es no acotada, simétrica y que no admite extensión lineal simétrica a  $L^2([-\pi, \pi])$ .
3. Introducimos otro operador  $F_z(H_o)$  en  $L^2([-\pi, \pi])$  y hemos probado que está en el espacio  $B(L^2([-\pi, \pi]))$ , para todo  $z \in A$ . Así también, se probó que este operador es el resolvente de  $H_o$  en  $z \in A$ .
4. Usando la convolución se encontró una caracterización para el operador acotado  $F_z(H_o)$ .
5. También, tratamos el problema de existencia de solución de un problema distribucional, evidenciando su solución.
6. Finalmente, queremos enfatizar que este estudio puede ser generalizado a los espacios de Sobolev periódico.

## REFERENCIAS

- [1 ] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.
- [2 ] Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. 1978.
- [3 ] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existence of the solution of a Schrodinger type homogeneous model in Periodic Sobolev spaces. *Selecciones Matemáticas*. 2022; 09(02): 357-369.
- [4 ] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. *Bulletin of the Allahabad Mathematical Society*. 2017; 32(02): 207-230.
- [5 ] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. *Selecciones Matemáticas*. 2019; 06(01): 49-65.
- [6 ] Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. *Selecciones Matemáticas*. 2021; 08(02): 348-359.
- [7 ] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non homogeneous third order equation and generalizations. *Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence*. 2022; 10(05): 43-56.

- [8 ] Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger type homogeneous model. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2023; 11(04): 919-932.
- [9 ] Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. *Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2*. 2023; 66-87.
- [10 ] Santiago Ayala, Y. El espacio Distribucional periódico  $L^2([-π, π])$  como completamiento del espacio  $P$ . *Construção e difusão do conhecimento matemático*. 2023; 34-60.