CAPÍTULO 11

MATEMÁTICA NO COMBATE O SARS-COV-2: UMA ABORDAGEM APLICADA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Data de aceite: 01/11/2023

Augusto Marinho Teixeira de Sousa
UNAMA/ Faculdade Iguaçu

Elaine da Silva Gaspar
UNAMA/ SEDUC

RESUMO: O presente trabalho tem como finalidade mostrar a importância da matemática em nossas vidas e como ela é uma ferramenta importantíssima no combate a qualquer tipo de epidemia que possa surgir. Usaremos neste trabalho basicamente duas ferramentas essenciais para descrever o comportamento de uma doença infectocontagiosa; essas ferramentas são as equações diferenciais ordinárias "acopladas". Usaremos essa ferramenta da matemática aplicada à pandemia de SARS-CoV-2, mostrando assim aos alunos da graduação em áreas de ciências exatas (e a quem possa interessar, bem como a demais estudantes e leitores) a utilidade específica das EDOs (equações diferenciais ordinárias) e o quão importante e fundamental elas são para as ciências. Vamos entender a dinâmica matemática dessas doenças que se espalham tão rapidamente e de forma exponencial em seu início. Este trabalho faz a abordagem prática das equações diferenciais ordinárias como uma ferramenta do cálculo computacional aplicada no combate à pandemia de SARS-CoV-2.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática, SARS-CoV-2, Equações diferenciais ordinais, modelos epidemiológicos.

1 I INTRODUÇÃO

Tem como objetivo neste trabalho apresentar as aplicações das equações diferenciais ordinárias, especificamente como aplicá-las na modelagem matemática para explicar o comportamento de uma doença infectocontagiosa e como as EDOs (equações diferenciais ordinárias) são uma ferramenta de suma importância para controlar um surto de uma determinada doença, pois por meio delas conheceremos a dinâmica de tais epidemias, como a gripe, sarampo, rubéola e outras, evitando assim que se tornem pandemias.

Usaremos nosso conhecimento em matemática para criar modelos matemáticos epidemiológicos por meio das EDOs, com o objetivo de desenvolver um modelo epidemiológico otimizado e mais simples (mas igualmente eficaz), para que o leitor tenha uma compreensão básica de como os modelos matemáticos em epidemiologia funcionam. Isso será útil não apenas para acadêmicos de cursos de exatas, mas também para o público em geral interessado na leitura deste trabalho, demonstrando como a matemática é fundamental em nossas vidas."

As equações diferenciais são amplamente utilizadas hoje em dia principalmente para a modelagem de problemas físicos relacionados à engenharia, física, química, informática, biologia, entre outros. Com essa ferramenta matemática (EDOs), podemos avaliar, modelar e resolver problemas do mundo real, aplicando nosso conhecimento teórico para solucionar problemas práticos. Essa é uma das aplicações da matemática que utiliza o conhecimento teórico para resolver problemas reais.

2 I HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações diferenciais são um ramo importante do cálculo e da análise e representam, provavelmente, a parte da matemática que maior número de aplicações encontra na física e na engenharia. Sua história tem origem no início do cálculo, desenvolvido por Newton e Leibniz no século XVII. Equações que envolvem as derivadas de uma função desconhecida logo apareceram no cenário do cálculo, mas, logo se constatou que elas podem ser de difícil tratamento. As mais simples são aquelas que podem ser diretamente integradas, por meio do uso do método de separação de variáveis, desenvolvido por Jakob Bernoulli e generalizado por Leibniz. No século XVIII muitas equações diferenciais começaram a surgir no contexto da física, astronomia e outras aplicações.

A equação de Newton para a gravitação universal foi usada por Jakob Bernoulli para descrever a órbita dos planetas em torno do Sol. Já nesta época ele podia usar as coordenadas polares e conhecia a catenária como solução de algumas equações. Halley usou os mesmos princípios para estudar o movimento do cometa que hoje tem o seu nome. Johann Bernoulli, irmão de Jakob, foi um dos primeiros a usar os conceitos do cálculo para modelar matematicamente fenômenos físicos e usar equações diferenciais para encontrar suas soluções.

Ricatti (1676 - 1754) levou a sério o estudo de uma equação particular, mais tarde também estudada pelos irmãos Bernoulli. Taylor foi o primeiro a usar o desenvolvimento de funções em séries de potência para encontrar soluções. Não havia, no entanto, uma teoria global ou unificada sobre o tema. Leonard Euler, o primeiro matemático a compreender profundamente o significado das funções exponencial, logarítmica e trigonométricas, desenvolveu procedimentos gerais para a solução de equações diferenciais. Além de usar as funções elementares ele desenvolveu novas funções, definidas através de suas séries de potências como soluções de equações dadas. Sua técnica dos coeficientes indeterminados foi uma das etapas deste desenvolvimento. Em 1739 Euler desenvolveu o método da variação dos parâmetros e, mais tarde, técnicas numéricas que fornecem "soluções aproximadas" para quase todo o tipo de equação. Posteriormente muitos outros estudiosos se dedicaram ao assunto, refinando e ampliando as técnicas de Euler.

3 | UM POUCO DA HISTÓRIA DOS MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Há muito tempo, um dos problemas mais preocupantes da população em geral é o fato de doenças infecciosas se alastrarem, causando muitas mortes. Quando essas doenças se espalham muito rapidamente em um curto período temos uma epidemia. A peste negra foi uma das maiores epidemias já registradas, tendo início na China e se alastrando pela Europa durante o século XIV, matando cerca de um terço da população. Esta pandemia foi causada por uma bactéria que foi transmitido através de pulgas de rato, e levaram a vida de 1/3 da população da Europa. Foi trazido da Ásia e entrou na Europa pelos portos comerciais mais movimentados, como Veneza e Gênova.

Do ponto de vista geográfico, a praga começou na Ásia entre 1331 e 1334 e atingiu a Índia em 1342, onde havia um grande comércio com a Europa via navios para o mar Mediterrâneo. Quando chegou à Europa em 1347, já havia relatos de milhões de mortes na China, Mongólia e Ásia Menor. Um dos marcos históricos que influenciaram a propagação desta pandemia, além do intenso comércio entre a Ásia e a Europa, foi a invasão pelos mongóis da Crimeia, que jogaram cadáveres dentro das cidades muradas, contribuindo para a propagação da peste. A causa da peste negra ou peste bubônica é uma bactéria chamada Yersinia pestis, que geralmente é encontrada em pulgas e piolhos de alguns roedores, razão pela qual ratos e suas pulgas foram considerados os agentes transmissores da bactéria, no entanto, as pesquisas mais recentes conseguiram elucidar que, além dos ratos, outros fatores puderam influenciar a pandemia, como a mudança de clima com verões mais quentes e mais secos, o que favoreceu a proliferação desse tipo de bactéria.

Ainda na Europa, outras doenças também foram registradas, como varíola, sarampo, gripe, dentre outras trazidas por estrangeiros, as quais também causaram muitas mortes. Uma das mais famosas também foi a chamada Gripe Espanhola Estudos atuais estimam que a cepa de vírus mortal de 1918 e 1919 poderia matar 100 milhões de pessoas em todo o mundo (Toby Saul).

4 | A MODELAGEM MATEMÁTICA

Um modelo matemático é a descrição matemática (frequentemente representado por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno da vida real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer etc. O proposito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro e muitas das vezes essas previsões contribui de forma direta para o cotidiano das pessoas. A ilustração abaixo mostra o processo de modelagem matemática. Dado um problema do mundo real, nossa primeira tarefa é formular um modelo matemático por meio da identificação e especificação das variáveis dependentes e independentes e da formulação de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente, tornando-o matematicamente tratável.

Em situações em que não existe uma lei física para nos guiar, pode ser necessário coletar dados (da internet ou conduzindo nossas próprias experiências) e examiná-los na forma de uma tabela, a fim de perceber os padrões. Dessa representação numérica de uma função podemos obter sua representação gráfica marcando os dados. Esse gráfico obtido pode até sugerir a fórmula algébrica apropriada, em alguns casos.

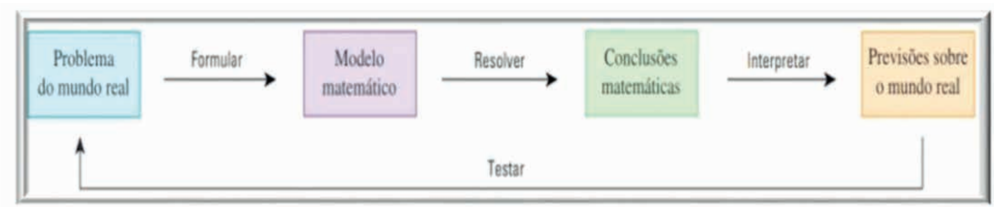


Figura 1: Processo de modelagem de um problema real.

Fonte: James Stwart, Cálculo Vol. 1, pág. 14, 8ª edição.

A obtenção de uma solução numérica para um problema físico (como uma epidemia por exemplo) por meio da aplicação de métodos numéricos seja ele qual for, nem sempre fornece valores que se encaixam dentro de limites razoáveis. Essa afirmação é verdadeira mesmo quando se aplica um método adequado e os cálculos são efetuados de uma maneira correta. Ao se tentar representar um fenômeno do mundo físico por meio de um modelo matemático, raramente se tem uma descrição correta deste fenômeno, normalmente, são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo matemático com o qual se possa trabalhar. Para se fazer a modelagem de um problema físico, nem sempre usamos tão somente uma única ferramenta matemática, mas sim um conjunto de ferramentas matemáticas seja estas direta ou indiretamente.

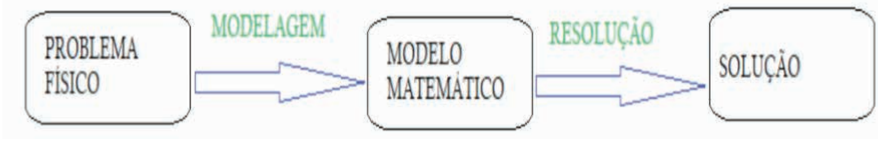


Figura 2: Processo de solução de um problema físico.

Fonte: Leônidas c. Barroso, Magali Maria de A. Barroso, Frederico F. Campos Filho, Márcio Luiz B. de Carvalho, Miriam I. Maia. Cálculo Numérico: Com Aplicações. Edição 2º. Editora Harbra-1987. Pág. 1.

5 I OS MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS MAIS COMUNS

Iremos apresentar os modelos epidemiológicos mais comuns e são os que mais são usados para se estudar o comportamento de doenças infectocontagiosas. Existem muito mais modelos do que os que irei citar, mas não são relevantes para esse trabalho.

SIR: esse modelo tem esse nome porque consiste em um conjunto de equações diferenciais acopladas relacionando o número de indivíduos da população de acordo com o seu estado da doença. Assim, temos as pessoas Suscetíveis, S(t), as pessoas Infectadas I(t) e as pessoas Removidas (i.e., que foram curadas ou morreram, deixando de influir no processo epidemiológico).

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases}$$

SIS: o modelo SIS é utilizado para descrever doenças nas quais os indivíduos suscetíveis a adquirem, tornando-se infectados e, após a recuperação, não há período latente nem isolamentos.

As condições iniciais são:

$$I(0) = I_0$$
$$S(0) = S_0$$

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases}$$

SIRS: Neste modelo há indivíduos suscetíveis que adquirem a doença, tornando-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, tornando-se suscetíveis novamente.

Neste caso não há período latente nem isolamentos.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI + \delta R \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I - \delta R \end{cases}$$

Esses são os três modelos epidemiológicos mais usado para se modelar o comportamento de uma doença infecto contagiosa como o sarampo, rubéola e o novo coronavírus. Aqui apresento somente três modelos, no entanto todos esses modelos epidemiológicos têm em como é que todos são formados por equações diferenciais ou de conjunto destas equações e outros são derivados destas EDOs.

Fonte: Luiz, Mônica Helena Ribeiro. Modelos Matemáticos em Epidemiologia. Rio Claro 2012.

6 I EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: A BASE DE UM MODELO EPIDEMIOLÓGICO

Como já vimos até aqui, existem vários modelos matemáticos que são usados para se entender como uma doença contagiosa se espalha em uma população como já falamos no capítulo anterior, os mais conhecidos são os modelos clássicos que apresentamos e são, SIS, SIR e SIRS, todos esses modelos descritos são formados por um conjunto de equações diferenciais ordinais, os outros modelos epidemiológicos que existem são variações dos modelos clássicos apresentados ou são variações de outas equações diferenciais (como foi citado), como é o caso do modelo matemático que criamos para determinar o número de infectados pela SARS-CoV-2. Esse modelo que desenvolvemos, foi a partir da equação diferencial ordinal que o economista inglês Thomas Robert Malthus, desenvolveu a partir de uma equação diferencial ordinal de primeira ordem para explicar o crescimento da população na sua teoria malthusiana. Abaixo apresentamos o modelo chamado de "modelo malthusiano".

O malthusianismo é uma teoria demográfica criada no final do século XVIII. De acordo com esta teoria, a população mundial cresce em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos em progressão aritmética. Esta teoria foi definida por Malthus no livro Na *Essay on the Principle of Population (Um Ensaio sobre o princípio da população)*, publicado pela primeira vez em 1798. Abaixo está descrito o modelo de Malthus para determinar o crescimento da população.

$$\frac{dP}{dt} = kP_0$$

$$\frac{dP}{dt} - kP_0 = 0$$

$$\mu = e^{-k\,dt} = e^{-kt}$$

$$e^{-kt}.\frac{dP}{dt} - \; kP_0.\,e^{-kt} = 0$$

$$\int P_0 \cdot e^{-kt}\,dt = \int 0\,dt$$

$$P(t) = c \cdot e^{kt}$$

$$P(0) = ce^0 = P_0$$

$$P_0 = c$$

$$P(t) = P_0.e^{kt}$$

$$P_0 \cdot e^{-kt} = c$$
$$P = \frac{c}{e^{-kt}}$$

Onde a taxa k é uma constante de proporcionalidade que relaciona a natalidade (n) e a mortalidade (m) e é dada por k=n-m.

Esta equação diferencial linear ordinária apresenta como solução a função dada pela expressão $P(t)= P_0.e^{kt}$, onde P_0 é a população inicial no instante t_0, ou seja:

- Se k >0, a população cresce.
- Se k < 0, a população se reduzirá.

* Este modelo está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem considera as taxas de migração.

Com esse modelo o economista Thomas Robert Malthus, previu o aumento da população mundial e a escassez de alimentos caso nada fosse feito para mudar isso. Pensamos se poderíamos explicar o crescimento da pandemia do novo coronavírus com um modelo matemático otimizado, que viesse mostrar o crescimento de forma mais direta e de uma forma que até o público em geral pudesse entender, assim desenvolvemos um modelo otimizado a partir do modelo que Malthus usou para explicar o crescimento populacional, mas no caso do modelo que desenvolvemos, fizemos alterações como a questão de aplicar a *Transformada de Laplace* para “refinar a equação”. Para obter uma precisão maior, já que tal modelo não usa o padrão de recuperados e suscetíveis da forma que os modelos epidemiológicos convencionais, não foi preciso usar um sistema de equações diferençais ordinais e sim apenas uma EDO que possa descrever o crescimento da pandemia em um determinado lugar, estado ou país.

7 I UM MODELO OTIMIZADO PARA SE ESTIMAR A TAXA DE INFECTADOS PELA SARS-COV-2

Usando a mesma função modelada pela EDO que Thomas Malthus, usou para dar base a sua teoria demográfica no final do século XVIII, iremos usá-la para gerar uma função que estime com bastante precisão o número de infectados pelo novo coronavírus. A tal função poderá estimar os casos de novos contaminados em qualquer cenário da atual pandemia de SARS-CoV-2.

Usando a função $P(t)=P_0.e^{kt}$ derivada de uma equação diferencial ordinal, iremos substituir as suas variáveis por outras letras, só para facilitar o raciocínio aplicado a questão da pandemia referida.

Assim ficando $I(t)=I_c e^{kt}$

I(t)= Infectados acumulados em função do tempo t.

I_c = Infectados confirmados

K = constante de proporcionalidade

8 | A CONSTANTE K

A constante k, é uma constante de proporcionalidade que depende da razão do logaritmo natural, do número de casos detectados (N_d), e o tempo que a infecção está circulando no país, localidade etc. O cálculo da constante k, é de extrema importância pois ele nos dá a noção de aceleração ou desaceleração com o qual uma epidemia vem se espalhando por uma região e isto é de extrema importância para as autoridades de saúde saberem se uma epidemia está acelerando, desacelerando ou se manteve estável. Quanto maior a constante k, significa que a infecção está se espalhando mais rapidamente, quanto menor o k, quer dizer que a doença está desacelerando ou se o k se manter por um tempo sem variação de crescimento ou decrescimento, dizemos que ele está estável ou linear, isso irá determinar a estabilidade de novos casos ativos ao qual os epidemiologistas chamam platô.

Como explica sobre o platô em uma reportagem do Jornal A gazeta, o professor Etereldes Gonçalves Júnior, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes) e membro do Núcleo Internacional de Estudos Epidemiológicos (NIEE).

“O platô acontece quando o número de casos ativos do novo coronavírus permanece o mesmo ao longo do tempo em determinado local. O que significa que a curva de casos acumulados vai crescer em uma velocidade bem baixa, formando uma linha praticamente horizontal”.

A constante k, determinamos da seguinte maneira.

$$K = \frac{\ln(N)}{t},$$

que iremos determinar de uma maneira direta quando temos o valor de *t* e

$$\ln(N),$$

aí isolamos o k na função.

9 | APLICANDO NOSSO MODELO MATEMÁTICO

Vamos fazer uma projeção para o Brasil, levando em consideração os dados obtidos através do site do Ministério da Saúde https://covid.saude.gov.br/ Vamos pegar os casos do dia 03 de agosto de 2020 (o dia 03 foi escolhido devido ser uma segunda feira, e são nas segundas-feiras que temos dados mais precisos atualizados pelo Ministério da Saúde).

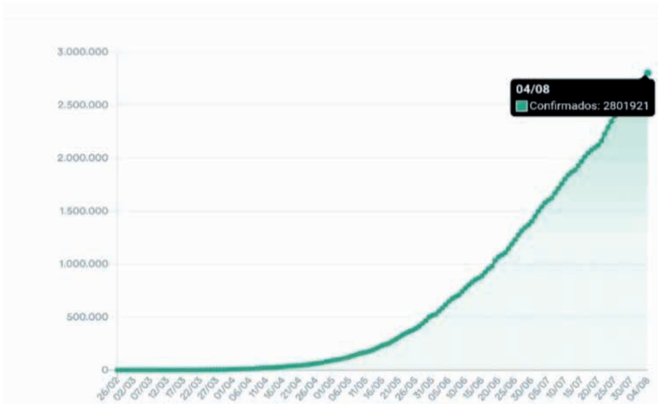


Gráfico 1.

Fonte: Ministério da Saúde do Brasil.

Com base nos gráficos acima, vemos que até o dia 04 de agosto de 2020, a pandemia de Covid-19 está no Brasil há 159 dias, isso será o nosso t da função e o número de infectados detectados até o dia 03 de agosto de 2020, será o nosso I(t) e o p, será o período que queremos saber quantos casos acumulados teremos nesse dia. Iremos escolher daqui com 7 dias.

$$I(t) = I_c e^{\frac{ln(I_C)}{t}p}$$

$$I(t) = ?$$

$$I_c = 2\,801921$$

$$t = 159$$

$$p = 7$$

Substituindo os valores na nossa função temos:

$$I(t) = 2\,801\,921\,.\,e^{\frac{ln(2\,801\,921)}{159}.7}$$

Efetuando a operação obtemos como *I(t)≅5 386 493 o* valor de 5 386 493 (cinco milhões trezentos e oitenta e seis mil quatrocentos e noventa e três) representa o número de casos acumulados que apareceram no dia 11 de agosto de 2020, que equivale aos 7 dias que colocamos na função. Lembrando que existe uma subnotificação de casos de coronavírus no Brasil e que só são registrados os casos das pessoas que buscam atendimento nos postos de saúde dos municípios e por isso que os casos registrados pelo Ministério da Saúde sempre serão menores que as projeções matemáticas e isso representa uma porcentagem de erro do modelo pois estamos trabalhando com dados que mudam constante mente pois depende de uma série de fatores como testes faltando, atraso nos resultados dos casos positivos, atraso no repasse desses caso positivos de COVID-19 por meio das secretarias estaduais de saúde e também os casos das pessoa assintomáticas que são aquelas pegaram o vírus mas não apresentaram a doença e também dos casos de pessoas que apresentaram de forma leve a doença e não precisaram de tratamento etc. Tudo isso resulta em erros, pois o modelo matemático mostra uma tendência de como a SARS-CoV-2 está se espalhando na população e o modelo não mostra apenas os casos registrados como graves ou leves e sim uma estimativa numérica de todos os casos, não importando se são os registrados ou não. No entanto, com os dados que temos e são mantidos pelas secretarias estaduais de saúdes, e aplicando o modelo matemático derivado de uma EDO, podemos ter uma noção aceitável de como está o cenário da pandemia no Brasil.

Abaixo o gráfico de casos acumulados no dia 08 de agosto.

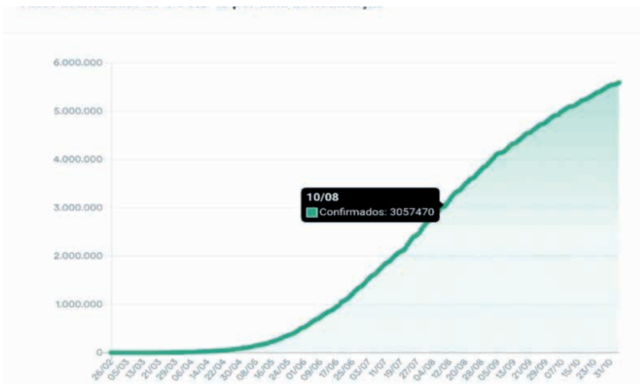


Gráfico 2.

Fonte: Ministério da Saúde do Brasil

Nosso modelo estimou 5 386 493 (cinco milhões trezentos e oitenta e seis mil quatrocentos e noventa e três) casos e o Ministério da Saúde detectou 3 057470 casos. Essa diferença de 2 329 023 casos aproximadamente, tem relação com o tipo de função que usamos para modelar os casos acumulados e com a questão do ERRO que também já falamos. Os epidemiologistas usam um modelo diferente para cada período que a doenças vai tomando outros formatos, no início se usa um modelo exponencial que pode ser determinado por analise de regressão (irei tratar de modelagem por regressão linear no próximo capitulo), ou sistemas de equações diferenciais ou até o modelo de função logística que é mais adequado para se usar quando a doença começa a ser controlada e naturalmente seu gráfico vai se parecendo com o da função logística, que resolvemos não discutir aqui devido limitações técnicas.

9.1 Quando o Sars-Cov-2 começou a ser controlado.

Iremos usar a constate k, que representa de forma numérica a aceleração com que está crescendo a pandemia no país. Para se fazer isso, levaremos em consideração o número de casos detectados até 04/08/2020 que foi quando as regras de isolamento social começaram ser menos restritivas na maioria dos estados do país.

$$K = ?$$
$$ln(N) = 2\,801\,921$$
$$t = 159$$
$$K = \frac{ln(I)}{t} \Rightarrow \frac{ln(2\,801\,921)}{159}$$

Assim obtemos o valor de K=0,09336 (consideramos até a 5ª casa decimal).

Iremos fazer uma comparação na constante k para saber se a pandemia de SARS-CoV-2, está acelerando, desacelerando ou se está estável no país com base nos dados reais de casos confirmados. Iremos dividir esses 159 dias que a infecção circula no Brasil (até o dia 04 de agosto), por 3 e fazemos o cálculo da constante k para esses 3 períodos que terá seu t constate igual a 53, e o número de casos, menos o número de casos do seu antecessor a partir do segundo período.

Teremos: 159 / 3 = 53 e iremos pegar esses 53 que será nosso t, acumulados desses três períodos que dividimos. Esses três períodos e seus respectivos t's são:

1º 19/04, t = 53, 38 659

2º 11/06, t = 106, 802 828

3º 03/08, t = 53, 2 037 752

Aplicando a fórmula $K = \frac{ln(I)}{t} \Rightarrow \frac{ln(I_{dº})}{53}$

Teremos:

$$K = \frac{ln(I_{d1º})}{t_1} \Rightarrow \frac{ln(38\,659)}{53} = 0{,}19929$$
$$K = \frac{ln(I_{d1º})}{t_2} \Rightarrow \frac{ln(802\,828)}{106} = 0{,}12826$$
$$K = \frac{ln(I_{d1º})}{t_3} \Rightarrow \frac{ln(2\,801\,921\,)}{159} = 0{,}09336$$

Com base na constante 'k´ para os três períodos da pandemia de SARS-CoV-2 no Brasil, temos os seguintes resultados:

19/04, k = 0,19929

11/06, k = 0,12826

03/08, k = 0,09336

Com isso provamos matematicamente que no dia 19/04/2020, a taxa de aceleração do SARS-CoV-2, foi a maior dos três períodos da pandemia no Brasil (até os dados presentes) e que no mês de 11/06/2020, essa taxa foi de 0,12826, já apresentando uma desaceleração em relação ao primeiro período dos 53 dias da pandemia no país, e enfim, no terceiro período que foi o dia 03/08/2020, a constante k foi a menor dos últimos dois primeiros períodos da pandemia, sendo o k = 0,09336. Concluímos que, com base nesse modelo matemático a pandemia de SARS-CoV-2, vem perdendo força no Brasil, isso devido a vários fatores incluindo o principal deles que foi o isolamento social. Para essa taxa de aceleração (k) continuar a cair é de suma importância que venhamos manter o distanciamento social e o uso de máscaras sempre que saímos e aí sim conseguiremos atingir um platô aceitável que impactará diretamente na queda também do número de mortes causado pelo novo coronavírus. Esse valor de k = 0,09336, não significa que ele não possa crescer, pois nas férias de julho houve um afrouxamento da quarentena em várias cidades do Brasil e isso é uma variável a se levar em conta.

10 | REFINANDO A FUNÇÃO $I(t) = I_c e^{\frac{ln(I_c)}{t} p}$ COM A TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Nesse capítulo iremos aplicar a Transformada de Laplace para refinar nossa função que dá o número de casos acumulados de infectados pela SARS-CoV-2.

A Transformada de Laplace é uma ferramenta muito utilizada para se obter resoluções de equações diferenciais e aqui vamos usá-la na nossa função para obtermos uma frequência, frequência essa que será o número de novos casos de pessoa infectadas pelo chamado novo coronavírus.

Definição: seja f(x) definida para $0 \leq x < \infty$ e denotemos por s uma variável real arbitraria. A Transformada de Laplace de f(x), designada por

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(S) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

Para todos os valores de s para os quais a integral imprópria converge. Ocorre convergência quando o limite

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} f(x)\, dx$$

existe. Se esse limite não existe, a integral imprópria diverge e *f(x)* não admite Transformada de Laplace.

Os problemas físicos que podem ser resolvidos com o emprego da Transformada de Laplace são os seguintes.

a) Análise de fenômenos transitórios e de regime em condução de calor e eletricidade nos sólidos.

b) Vibrações de sistemas dinâmicos contínuos.

c) Análise de fenômenos transitórios em linha de transição elétrica.

d) Análise dos transitórios de campos eletrodinâmicos etc.

Este extraordinário método deve-se aos matemáticos Laplace, Heaviside, Bronwich, Jeffeys, Wagner, Carson e Levy (Lisa- Biblioteca da Matemática Moderna 1ª edição – 1968).

Os próximos cálculos iremos realizar com o software *Wolfram Alpha versão 1.4.16.20.* O primeiro cálculo que faremos é encontrar a Transformada de Laplace da função:

$$I_c e^{\frac{ln(I_c)}{t}p}$$

Iremos usar os casos do dia 03 de agosto que foram os casos que usamos no primeiro exemplo prático de nossa função.

$$I(t) = 2\,801\,921\,.\,e^{\frac{ln(2\,801\,921)}{159}.7}$$

Usando esse mesmo exemplo de casos reais detectados de SARS-CoV-2, usamos a função para fazer uma projeção para 7 dias a frente de quantos casos totais teríamos no dia 10 de agosto.

Agora iremos usar esse mesmo exemplo, porém não desejamos fazer projeção, mas sim encontra uma outra função (assim não precisaremos manter o parâmetro 7), função essa que nos permitirá saber quantos casos do novo coronavírus aparecerão por dia em uma dada data que quisermos saber, isso permitirá também saber como está o comportamento do contágio da SARS-CoV-2.

$$\mathcal{L}_t\left[2801921e^{log^{(2801921)}/_{159}}\right](s)$$

Esta é a forma da função programada dentro do software Wolfram Alpha, com seus determinados dados dos casos e dias que o vírus está em circulação no Brasil até aquele momento (dia 03 de agosto).

Usaremos os seguintes comandos para programar o nosso cálculo no programa: Laplace trasform 2801921e^ (ln (2801921) /159)

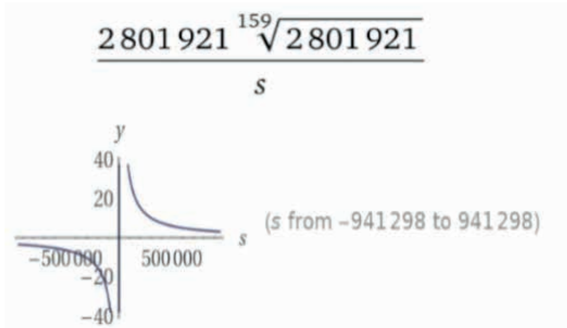
Obtemos o seguinte resultado da Transformada de Laplace para a função:

$$2\,801\,921\,.\,e^{\frac{ln(2\,801\,921)}{159}}$$

$$\frac{2801921\sqrt[159]{2801921}}{s}$$

De posse desse resultado, iremos usar o comando ‘Plot’ no Wolfram, para ele nos mostrar o gráfico dessa função com os respectivos casos e o tempo que colocamos na função.

Gráfico da Transformada de Laplace da função:



Fonte: Autor

Esse gráfico corresponde a nova função que foi transformada.

Agora iremos simplesmente fazer as devidas substituições para darmos forma a nossa nova função encontrada através da Transformada de Laplace. O que é a frequência na fórmula da Transformada de Laplace, aqui na fórmula passará ser o Δ_t (só por uma questão de nomenclatura), assim a Transformada de Laplace da função $I_C e^{\frac{ln(I_C)}{t}}$, sem o p (p é o dia) pois não temos interesse nele porque o mesmo é a penas o parâmetro usado para se estimar o número de casos acumulados em um tal dia. Usamos a Transformada para saber a frequência, frequência essa que para nosso estudo será o número de casos de novos infectados pela SARS-CoV-2 (chamada genericamente de Covid-19) por dia em função do tempo. Essa nova função nos permitirá avaliar o comportamento da doença através dos casos diários.

Assim temos:

$$\mathcal{L}\left\{f\left(I_c e^{\frac{\ln(I_C)}{t}}\right)\right\} = F(s) = \frac{I_C \sqrt[t]{I_C}}{\Delta_T}$$

Nossa nova função fica sendo $I_d = \frac{I_C \sqrt[t]{I_C}}{\Delta_t}$, onde

I_d são o número de infectados por dia.

I_c são o número de infectados acumulados.

t são o tempo que o vírus circula dado em dia ordinal.

Δ_t é a variação do tempo em relação ao t, é o tempo em que desejamos saber quantos casos apareceram nesse dia em tempo ordinal, ele aqui é o nosso p.

Nosso interesse é o parâmetro s, ele será o nosso p da função $\boldsymbol{I_C e^{\frac{ln(I_C)}{t} p}}$.

Que agora por questão de nomenclatura e posição, iremos chamar de Δ_t. Assim vamos escrever a nova função da seguinte maneira.

$I_d = \frac{I_C \sqrt[t]{I_C}}{\Delta t}$ onde;

I_d é o número de infectados por dia

I_c é o número de infectados confirmados

Δ_t variação tempo (é o dia que queremos fazer uma projeção).

Essa nova função encontrada devido a aplicação da *Transformada de Laplace*, nos permite determinar os casos de infecções em um dado dia, ou a frequência com que os novos casos de SARS-CoV-2 iram aparecer em função de um dado tempo ou data.

Vamos testar a função para verificar o número de infectados que apareceram no dia 14 de novembro de 2020.

** Essa data foi escolhida porque era a mais recente no dia em que foi redigido este trabalho.*

Segundo o Ministèrio da Saúde, o número de casos acumulados até o dia 13 de novembro de 2020.

Figura: 3

Fonte: Secretarias Estaduais de Saúde, Brasil, 2020

Substituindo os dados coletados na nossa função $I_d = \frac{I_c \sqrt[t]{I_c}}{\Delta t}$, ficando da seguinte maneira;

$$I_d = \frac{5810652 \sqrt[261]{5810652}}{262}$$

Fazendo os cálculos no Wolfram Alpha

Usaremos o comando (5810652*(5810652^1/261) /262) obtemos o comando 'input'.

$$5810652 \, . \frac{\sqrt[261]{5810652}}{262} = 23541.825994691823308793781426016223337 \ldots$$

Obtemos, 23 542 novos casos (aproximadamente) de contaminados pelo novo coronavírus que iram aparecer no dia 14 de novembro de 2020.

Segundo o Ministério da Saúde, foram registrados 38 307 casos no dia 14, bem próximos do que o nosso cálculo determinou.

Fonte: Https://Covid.Saude.Gov.Br/

11 | ESTIMANDO O NÚMERO DE ÓBITOS CAUSADOS PELA SARS-COV-2.

Iremos aplicar a mesma função que usamos para estimar o número de casos de infectados por dia, agora para estimar o número de óbitos para o mesmo período, como mostra o gráfico, no dia 13 de novembro de 2020, foram detectados.

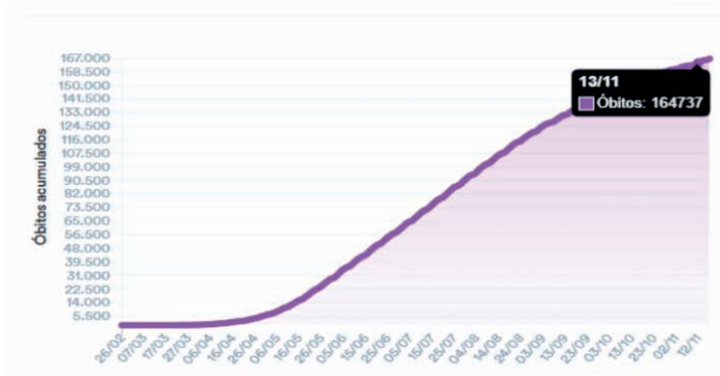


Gráfico 5.

Fonte: Secretarias Estaduais de Saúde, Brasil, 2020

Substituindo letras da primeira função $I_d = \frac{I_c \sqrt[t]{I_c}}{\Delta t}$ por novas, que sejam adequadas ao que queremos encontrar (óbitos diários), temos:

$$O_d = \frac{O_c \sqrt[t]{O_c}}{\Delta t}$$

Onde: O_d é o número de óbitos por dia

O_c é o número de óbitos totais confirmados

t é o tempo desde que o correu a primeira morte

Δ_t variação tempo (é o dia que queremos fazer uma projeção para determinarmos o número de óbitos).

A primeira morte causada pela SARS-CoV-2, segundo o Ministério Saúde, ocorreu no dia 17 de março de 2020. Do dia 17 de março até o dia 13 de novembro, passaram-se 241 dias e esse será o nosso , já o , será 242 que representa o dia 14 de novembro que é o dia em que desejamos saber quantas óbitos aproximadamente iram acontecer.

Ao aplicarmos os valores à nossa função, obtemos o seguinte resultado:

$$O_d = \frac{164737 \sqrt[241]{164737}}{242}$$

Usaremos o comando 164737*(164737^1/241) /242)

Ao realizar os cálculos, obteremos os seguintes resultados:

$$\frac{164737 \sqrt[241]{164737}}{242} = 715.52073423614519523820139961808545832\ldots$$

Assim obtemos o valor de 716 óbitos (aproximadamente) no dia 14 de novembro de 2020.

Segundo o Ministério da Saúde, foram confirmados 921 óbitos, no dia 14 de novembro de 2020.

Fonte: Https://Covid.Saude.Gov.Br/

Com base nas demonstrações apresentadas até o momento, torna-se evidente que o modelo, derivado da equação diferencial ordinária de Malthus e aprimorado pela aplicação da Transformada de Laplace, demonstrou notável precisão tanto na estimativa do número diário de novos casos quanto no número de óbitos.

12 I UM NOVO MODELO EPIDEMIOLÓGICO

Concluímos a apresentação do nosso modelo matemático epidemiológico, denominado ‘Modelo Epidemiológico PARÁ’. Este modelo opera por meio de um conjunto interligado de equações formuladas utilizando Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Essas equações nos possibilitam analisar o comportamento de diversas populações de microrganismos, como vírus, bactérias e outros patógenos, independentemente de seu crescimento ser exponencial, linear ou mesmo quadrático. Essa capacidade de oferecer estimativas precisas para diferentes padrões de crescimento ou declínio de agentes infecciosos torna essa ferramenta inestimável para compreender o comportamento de vírus como os responsáveis pelo sarampo, ebola e o amplamente conhecido SARS-CoV-2, popularmente referido como Covid-19.

Aqui apresentamos as funções e suas respectivas aplicações:

Função que nos possibilita estimar o número de casos acumulados em cenários de crescimento exponencial ou durante intervalos de tempo reduzidos (alguns dias).

$$I(t) = I_c e^{\frac{ln(I_c)}{t}p}$$

Função que nos permite estimar o número diário de óbitos acumulados em um curto período (dias).

$$O(t) = O_c e^{\frac{ln(O_c)}{t}p}$$

Função que nos possibilita estimar o número diário de novos casos de infectados em um determinado dia.

$$I_d = \frac{I_c \sqrt[t]{I_c}}{\Delta t}$$

Função que nos permite estimar o número diário de óbitos.

$$O_d = \frac{O_c \sqrt[t]{O_c}}{\Delta t}$$

13 I NOMENCLATURA DOS PARÂMETROS DAS FUNÇÕES

I(t): Número de Infectados acumulados em função do tempo

I_c: Número de infectados confirmados

I_d : Número de infectados diários.

p : Período em dia ordinal que se deseja fazer uma estimativa

t : tempo em dias

O(t) : Número de óbitos acumulados em função do tempo.

O_c : Número de óbitos confirmados.

O_d: Número de óbitos diários.

Δt : Variação do tempo em dias ordinal.

e : Constante de Euler que vale aproximadamente 2,71828128...

ln : Logaritmo natural

14 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho reforça a importância do conhecimento matemático para toda a sociedade, especialmente quando se trata de nossa sobrevivência. A pandemia de coronavírus, que atingiu seu auge em 2020, paralisou o mundo inteiro, levando ao fechamento de escolas, universidades, indústrias, comércios e diversos outros setores. No entanto, essa crise trouxe à tona termos conhecidos pelo público, como epidemiologia, achatamento da curva e modelos matemáticos. Essa realidade nos inspirou a abordar este tema, com o propósito de explicar o funcionamento de um modelo matemático, os cálculos envolvidos e as projeções, tudo isso por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), tornando este trabalho uma valiosa ferramenta para o ensino dessas habilidades matemáticas, tanto em universidades quanto em escolas. Além disso, este estudo auxilia na compreensão da propagação da infecção na população brasileira, demonstrando como o Governo Federal, Estadual ou Municipal, embasado em cálculos semelhantes, pode adotar medidas eficazes para combater e controlar a pandemia em suas regiões, economizando tempo e preservando vidas, até que uma vacina nos liberte completamente desta crise.

A Matemática desempenha um papel direto e indireto na vida de todos nós, estando presente em tudo o que vemos, sabemos ou tocamos, independentemente de compreendermos completamente seu funcionamento. Como o físico teórico Stephen Hawking afirmou: ‘A Matemática é a única linguagem que compartilhamos com a natureza’.

Este artigo tem como um de seus principais objetivos explicar, por meio de modelos matemáticos adaptados e formulados a partir de fenômenos populacionais, sejam eles naturais ou não, como aplicar a Matemática. Uma das formas mais relevantes de aplicação se dá por meio das equações diferenciais ordinárias.

REFERÊNCIAS

Antônio Marmo de Oliveira, Agostinho Silva. *Biblioteca da Matemática Moderna*, 1ª Edição- 1968. Editora LISA - Livros Irradiantes.

Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. Equações Diferenciais Volume 1. EDIÇÃO 3º. Editora Pearson.

James Stewart – *Cálculo Volume 1º*. Edição 8º. Editora Cengage Learning- 2016.

Equações diferenciais e equações de diferenças. Faculdade de engenharia da universidade do porto 2011.

Leônidas c. Barroso, Magali Maria de A. Barroso, Frederico F. Campos Filho, Márcio Luiz B. de Carvalho, Miriam l. Maia. Cálculo Numérico: Com Aplicações. Edição 2º. Editora Harbra-1987.

Mônica Helena ribeiro. Modelos matemáticos em epidemiologia. Universidade estadual paulista, Júlio de mesquita filho, instituto de geociências e exatas, campus de Rio claro/SP 2012.

Richard Bronson, Gabriel Costa- Equações Diferenciais, Coleção Schaum. Edição 3º. Editora Brookman- 2008.

Https://www.who.int/ (acesso: 04 de novembro de 2020).

https://www.bbc.com/portuguese/geral-51842518; acesso; 04 de novembro de 2020

Organização pan-americana de saúde- OPAS Brasil: https://www.paho.org/bra/ (acesso: 04 de novembro de 2020).

Ministério da Saúde: Https://Covid.Saude.Gov.Br/ (acesso: 15 de novembro de 2020).