CAPÍTULO 7

SERIE DE FOURIER EN ELECTRÓNICA

Data de aceite: 01/11/2023

Carlos Figueroa Navarro
Universidad de Sonora

Lamberto Castro
Universidad de Sonora

RESUMEN: En estas notas se explica en forma breve los aspectos elementales de la serie de Fourier. Primeramente, se determinan los coeficientes, luego se hace un desarrollo de los coeficientes complejos, enseguida se explican las funciones pares e impares, por último, se analiza el caso de un circuito eléctrico con señal periódica, la cual se demuestra gráficamente la aproximación de la función.

1 I INTRODUCCIÓN

La serie de Fourier consiste en una suma de términos con funciones seno y coseno; esta representación es muy útil porque tienen muchas aplicaciones en ingeniería, por ejemplo en comunicaciones, inteligencia artificial y procesamiento de imágenes, así como en electrónica. La idea es representar funciones periódicas generales, pues la serie respectiva permite una suma finita o infinita de funciones senoidales.

El propósito de este trabajo es ofrecer una idea introductoria de la serie de Fourier y su aplicabilidad a un problema de electrónica de potencia. Nuestro análisis propuesto es con base al trabajo de Fernández Monteforte [1]. En efecto, en este artículo se plantea la solución en forma de serie de Fourier de la ecuación diferencial ordinaria que representa un circuito eléctrico RLC (con una resistencia, una capacitancia y una inductancia) que tiene un voltaje periódico. Nosotros consideramos como propuesta complementaria, que debe graficarse la aproximación de la función y debe interpretarse de forma más correcta, además proponemos incluir la solución de la integral que obtiene el coeficiente de la serie.

Para tener una explicación de estas series se presenta en la forma que propone [2], en efecto este autor inicia con series trigonométricas, se define que es una función periódica, luego se utiliza el hecho de que la función seno y coseno tienen periodo 2π , con base a esto se establece un sistema trigonométrico, donde se especifica la ortogonalidad en el intervalo respectivo. El problema es representar una función del tiempo, en serie de suma infinita y que por supuesto garantice su convergencia. Estas series se llaman series trigonométricas [3] y surgen del deseo de representar una función periódica que dependa del tiempo en términos de función seno y coseno, cuyos coeficientes, llamados de Fourier se determinan mediante las fórmulas de Euler.

Otro aspecto relevante es definir el caso de funciones pares e impares, pues es fácil dilucidar que una función par corresponde una serie de Fourier de cosenos, mientras la función par es una función de senos. De la misma manera, se justifica la forma compleja de la serie de Fourier y su relación con la transformada de Fourier. Por último, se añaden comentarios sobre el fenómeno de Gibbs y las denominadas pulsaciones.

Para el enfoque aplicativo, se resuelve el problema de un circuito eléctrico RLC, resistivo, capacitivo e inductivo, [4] se establece una función para la corriente en forma triangular y periódica, se aplican las leyes de Kirchhoff y el principio de superposición, lo cual que genera una ecuación diferencial ordinaria se obtiene el voltaje de circuito y se grafica la aproximación.

2 I SERIE TRIGONOMÉTRICAS Y CÁLCULO DE COEFICIENTES

Se dice que una función es periódica si

$$f\left(t+p\right)=f(t) \quad t\in\mathbb{R} \quad p>0$$

Al término p se le llama periodo; ahora nos interesa como representar funciones con periodo de p = 2π en términos del siguiente conjunto llamado sistema trigonométrico.

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots \cos(nt), \sin(nt), \ldots\}$$

Este sistema es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo [-π ,π], por definición esto significa que la integral del producto de cualquiera de dos funciones diferentes de ese conjunto, sobre dicho intervalo es cero, para todo m, $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cos(nt)dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1sen(nt)dt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen(mt)}\cos(nt)dt = 0$$

$$m,n\in\mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{cos(nt)}\cos(\mathrm{m}t)dt = \begin{cases} 0 & si\, n\neq m \\ \pi & si\, n=m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sin(nt)}\sin(\mathrm{m}t)dt = \begin{cases} 0 & si\, n\neq m \\ \pi & si\, n=m \end{cases}$$

Las series que surgen son de la forma

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos t+b_1 sent+a_2\cos(2t)+b_2 sen(2t)+...=$$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)\right]$$

Se supone que la función *f* (*t*) es una función periódica de periodo 2π que se representa por una serie trigonométrica.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)\right]$$

También se puede decir que la serie converge a la función $f(t)$ donde los coeficientes son constantes reales. Aquí son necesarias las sumas parciales como

$$S_N=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)\right]$$

Ahora el reto es encontrar los coeficientes correspondientes, se procede a efectuar el integral término a término de la serie

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)\right])dt$$

Claramente se tiene con el primer término que no es diferente de cero es el primero, los demás son cero al considerar su propiedad de ortogonalidad, de tal forma que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dt=a_0\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

Para determinar los demás coeficientes, se multiplica por cos(mt) para m entero

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)dt=\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt)+b_n sen(nt)\right])\cos(mt)dt$$

Se sabe que la primera integral es cero, la segunda integral se aplica otra vez su propiedad de ortogonalidad tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\mathrm{nt})\cos(\mathrm{m}t)dt=a_m\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(\mathrm{nt})\cos(\mathrm{m}t)dt=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt = a_m\pi$$

Para determinar el otro coeficiente se procede de manera análoga.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen(mt)\,dt = b_m\pi$$

Se obtienen los llamadas coeficientes de Euler

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen(nt)dt$$

3 l SERIE COMPLEJA DE FOURIER, PARIDAD Y FENÓMENO DE GIBBS

A continuación, se establecen las bases para obtener la serie compleja de Fourier, aquí se aprovecha la denominada también fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + isenx$$

$$e^{-ix} = \cos x - isenx$$

Se hace $x = nt$ tal que

$$\cos(nt) = \frac{e^{\text{int}} + e^{-\text{int}}}{2}$$

$$sen(nt) = i\frac{e^{-\text{int}} - e^{\text{int}}}{2}$$

Tales formas se sustituyen en la serie

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{\text{int}} + e^{-\text{int}}}{2}\right) + ib_n\left(\frac{e^{-\text{int}} - e^{\text{int}}}{2}\right)\right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - ib_n}{2}e^{\text{int}} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-\text{int}}\right]$$

Ahora se definen los coeficientes así

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \qquad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \qquad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$$

Al sustituir se tiene

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{\text{int}}+c_{-n}e^{-\text{int}}\right]$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\text{int}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-\text{int}}$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{\text{int}}+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n e^{\text{int}}$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{\text{int}}+\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n e^{\text{int}}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\text{int}}$$

Ahora se procede a encontrar el coeficiente de la serie compleja de Fourier

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,dt-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)sen(nt)\,dt$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos(nt)-isen(nt)\right]dt$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-\text{int}}dt$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{\text{int}}dt$$

Por último, se tiene la serie de Fourier compleja

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\text{int}}$$

Otro resultado de mucha aplicación en procesamiento de imágenes es la transformada de Fourier

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{i2\pi\omega t}dt$$

A continuación, se presenta la serie de Fourier de una función par e impar. Se dice que una función definida en un intervalo [-L, L] es par si $g(-t)=g(t)$ y su gráfica es simétrica con respecto el eje OY, ahora es función impar si $h(-t)=-h(t)$ y es simétrica respecto al origen. la figura 1 y 2 muestran cada caso

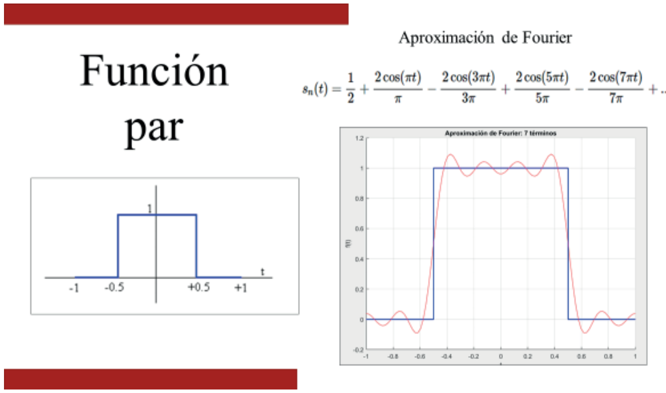

Figura 1. Función par

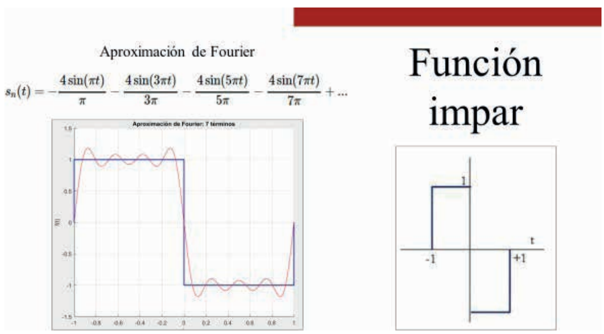

Figura 2. Fucion impar

Asimismo, en la figura 3 se presenta el denominado fenómeno de Gibbs

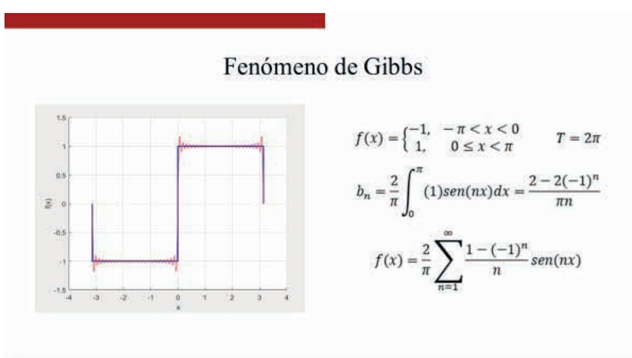

Figura 3. Fenómeno de Gibbs

El fenómeno de Gibbs es la descripción del comportamiento que tiene la serie de Fourier asociada a una función periódica en una discontinuidad, es decir, cuando una función tiene una discontinuidad de salto en un punto, su serie de Fourier tiene un comportamiento especial en dicho punto. Este comportamiento se llama fenómeno de Gibbs. Este fenómeno consiste en que cerca del punto las sumas parciales de la serie de Fourier mantienen unas oscilaciones que no se hacen pequeñas y puede cuantificarse con precisión.

Por otro lado, para mostrar gráficamente la serie de Fourier, a continuación, se genera un ejemplo mostrado en la figura 4

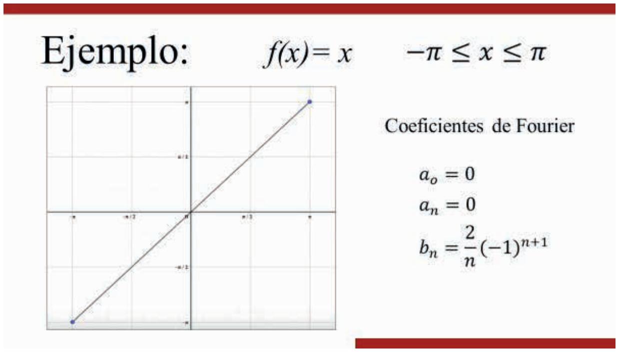

Figura 4. Ejemplo

La función tiene la siguiente serie parcial, las figuras 5, 6 muestran la aproximación

$$f(x) = 2\left[sen(x) - \frac{1}{2} sen(2x) + \frac{1}{3} sen(3x) - \frac{1}{4} sen(4x) + \cdots \right]$$

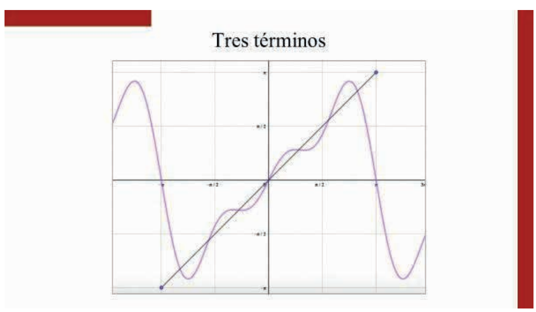

Figura 5. Ejemplo

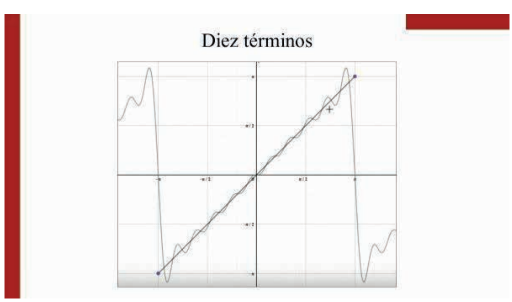

Figura 6. Ejemplo

De igual manera, se presenta en la figura 7 una pulsación, que consiste en sumar dos ondas similares tales como

$$x(t) = sen(20t) + sen(21t)$$

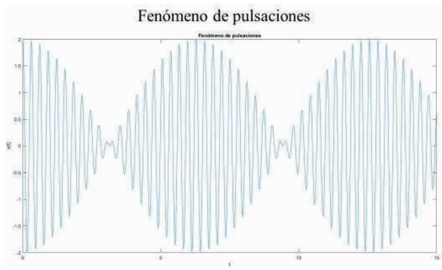

Figura 7. Pulsación

4 I APLICACIÓN EN ELECTRÓNICA

Se desea resolver un circuito RLC que tiene una corriente eléctrica de forma periódica

$$e(t) = \begin{cases} -t - \frac{\pi}{2}, & -\pi < t < 0 \\ t - \frac{\pi}{2}, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

La figura 8 muestra su periodicidad

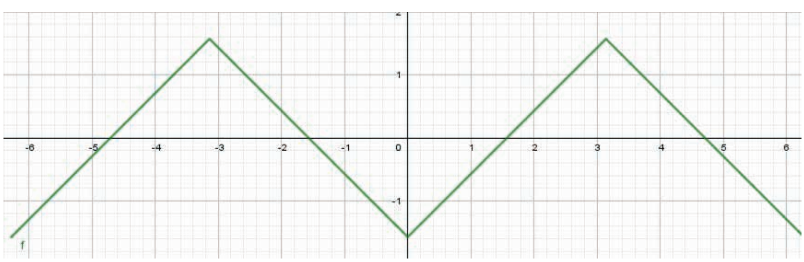

Figura 8. Corriente eléctrica

Aplicando ley de Kirchhoff se tiene que el voltaje será dado por

$$v(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Sustituyendo cada caída de voltaje se tiene

$$v(t) = \mathrm{Re}(t) + L\frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int e(t)dt$$

Para calcular los coeficientes se considera la función de la corriente y usando las fórmulas Euler se procede a resolver las integrales

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t^2}{2}-\frac{\pi t}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}-\frac{\pi t}{2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{-1}{\pi}\left[-\frac{(-\pi)^2}{2}-\frac{\pi(-\pi)}{2}\right] - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,dt$$

Al resolver la primera por partes se tiene que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad u = -t-\frac{\pi}{2} \quad v = \frac{sen(nt)}{n}$$
$$du = -dt \quad dv = \cos(nt)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,dt =$$

$$\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{sen(nt)}{n\pi}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} sen(nt)\,dt$$

El primero termino es cero, el segundo se procede a integrar

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0} sen(nt)\,dt = -\frac{1}{n}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2\pi}\left[-1+(-1)^n\right]$$

El segundo término entonces

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,dt =$$

$$\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{sen(nt)}{n\pi}\bigg|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} sen(nt)\,dt$$

$$\frac{-1}{n\pi}\int_{0}^{\pi} sen(nt)\,dt = \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left[-1+(-1)^n\right]$$

Al sumar ambos resultados se tiene

$$a_n = \frac{-2+2(-1)^n}{n^2\pi}$$

De tal forma que se tiene

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2+2(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nt)$$

$$e'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2+2(-1)^n}{n\pi}sen(nt)$$

$$\int e(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2+2(-1)^n}{n^3\pi}sen(nt)$$

El voltaje ahora será

$$v(t)=R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2+2(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nt)+L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2+2(-1)^n}{n\pi}sen(nt)$$
$$+\frac{1}{C}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2+2(-1)^n}{n^3\pi}sen(nt)$$

reescribiendo

$$v(t)=\sum_{n=1}^{\infty}R\frac{-2+2(-1)^n}{n^2\pi}\cos(nt)+$$
$$\left(L\frac{-2+2(-1)^n}{n\pi}+\frac{-2+2(-1)^n}{Cn^3\pi}\right)sen(nt)$$

Para una suma parcial se tiene

$$v(t)=\frac{-4R\cos(t)}{\pi}-\frac{4R\cos(3t)}{9\pi}-\frac{4R\cos(5t)}{25\pi}$$
$$\left(\frac{4L}{\pi}-\frac{4}{C\pi}\right)sen(t)+\left(\frac{4L}{3\pi}-\frac{4}{27C\pi}\right)sen(3t)$$
$$\left(\frac{4L}{5\pi}-\frac{4}{125C\pi}\right)sen(5t)$$

La figura 9 muestra el resultado

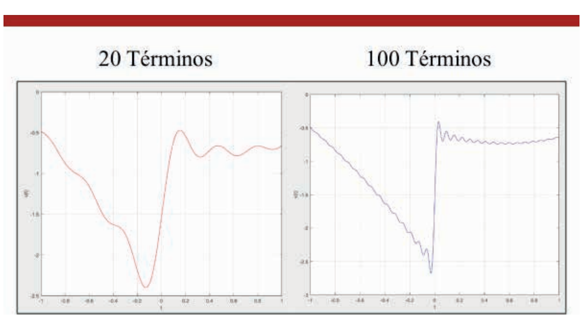

Figura 9. Función aproximada

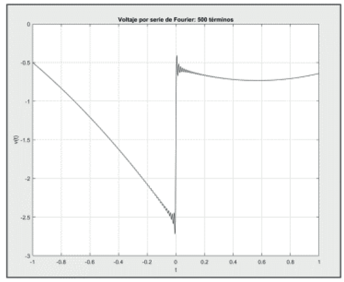

Figura 10. Función aproximada

5 I CONCLUSIONES

La serie de Fourier tiene un mundo de aplicaciones en electrónica, comunicación y procesamiento de imágenes, y es junto con la transformada de Laplace de las herramientas matemáticas más importantes e ingeniería. Un sustancial documental disponible es el video https://youtu.be/ds0cmAV-Yek.

Aspectos importantes además son el fenómeno de Gibbs y las pulsaciones, del primero se sabe que es relativo al estudio de las discontinuidades que pueda tener la función, y las pulsaciones es la suma de ondas similares. En cuanto al circuito RLC, nuestro trabajo complementa el cálculo de Fernández, pero añadiendo dos elementos importantes, primero especificando la integral que genera el coeficiente y segundo, graficando la función en serie que verifique la aproximación.

REFERENCIAS

[1]. Fernández Monteforte María C. *Utilización de Series de Fourier para resolver circuitos eléctricos con una señal periódica.* (2013).

[2]. Campbell, Stephen L, Haberman, Richard. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera.* Edit. McGraw-Hill. (1997)

[3]. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Series de Fourier. ITESM , Departamento de Matemáticas (2018)

[4]. J.A. Edminister. *Circuitos Eléctricos.* McGraw Hill (1979)