

SOLUÇÃO ESTÁTICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM VIGAS COMPOSTAS LAMINADAS APOIADAS EM BASE ELÁSTICA DE PASTERNAK

Data de submissão: 20/08/2023

Data de aceite: 02/10/2023

Paulo Cavalcante do Nascimento Júnior

Universidade de Pernambuco – UPE

Garanhuns - PE

<http://lattes.cnpq.br/1917884759484094>

Welky Klefson Ferreira de Brito

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Tecnologia

João Pessoa – PB

<http://lattes.cnpq.br/6589773310447196>

Arthur Coutinho de Araújo Pereira

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Tecnologia

João Pessoa – PB

<http://lattes.cnpq.br/7182255000778134>

Ângelo Vieira Mendonça

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Tecnologia

João Pessoa – PB

<http://lattes.cnpq.br/2283433515334530>

RESUMO: Materiais compósitos laminados têm sido usados como uma solução viável para muitos problemas tecnológicos. Neste artigo é estabelecida uma nova solução baseada na técnica de elementos de contorno para a teoria clássica de vigas laminadas apoiadas em fundação elástica

de Pasternak. Discussões sobre etapas matemáticas para escrever equações integrais e soluções fundamentais para o problema de vigas laminadas são feitas adequadamente. Apenas a flexão no plano é considerada e os resultados numéricos para a viga de seção transversal retangular também são apresentados.

PALAVRAS-CHAVE: MEC, Solução Fundamental, Equação Integral

STATIC BOUNDARY ELEMENT SOLUTION FOR LAMINATED COMPOSITE BEAMS ON PASTERNAK FOUNDATION

ABSTRACT: Laminated composite materials have been used as a feasible solution of many technological problems. In this article a new solution based on boundary element technique for classical laminated beam theory supported on Pasternak elastic foundation is established. Discussions on mathematical steps to write down both integral equations and fundamental solutions for laminated beam problem are properly made. Only in-plane bending is taken into account and numerical results for rectangular cross-section beam are presented as well.

1 | INTRODUÇÃO

Laminados são materiais compostos feitos pelo empilhamento de camadas orientadas e geralmente fabricados para maximizar a relação resistência/peso em muitas aplicações tecnológicas. Vigas laminadas têm sido representadas matematicamente usando diferentes níveis de precisão, tais como modelos baseados na elasticidade tridimensional, modelos de placas/vigas baseadas em abordagens de camada discreta (DL) e modelos de camada única equivalente (ESL). Enquanto nas duas primeiras abordagens são utilizadas ferramentas mais complexas para a representação do problema, na abordagem ESL, a ideia principal é substituir as camadas do laminado por uma única camada que se supõe ser equivalente ao laminado real, produzindo soluções reguladoras muito mais confortáveis de alcançar. Modelos ESL baseados em soluções numéricas são muito atraentes do ponto de vista do custo computacional, porque o número de graus de liberdade exigidos é muito menor do que a quantidade demandada do que as respostas numéricas baseadas em modelos de elasticidade 3D e DL. Grande parte das teorias de vigas laminadas são resolvidas por técnicas numéricas utilizando o Método dos Elementos Finitos tais como: Heinisuo (1988), Yuan e Miller (1989), Wanji e Zhen (2005), Goyal e Kapania (2007), Aguiar *et al.* (2012), Hajianmaleki e Qatu (2012), Polit *et al.* (2015) e Kahya (2016). Uma das técnicas numéricas alternativa é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A maioria das soluções do MEC de teorias de barra/viga tem sido aplicada à análise de vigas e pórticos feitos de materiais homogêneos, por exemplo, Providakis e Beskos (1986), Antes (2003), Antes *et al.* (2004) e Brito *et al.* (2019). Convém notar que em vigas homogêneas ortotrópicas/isotrópicas, tanto os efeitos axiais quanto os de flexão podem ser tratados como dois problemas desacoplados: se for aplicada apenas carga transversal, nenhuma força normal é mobilizada; ou se apenas a carga axial for considerada, tanto a força cortante quanto o momento fletor são zero. No caso de um laminado simétrico, o desacoplamento das respostas axiais e de flexão também são mantidos, de modo que soluções do MEC de vigas laminadas simétricas podem ser estabelecidas diretamente a partir de soluções do MEC para vigas homogêneas, usando equações integrais desacopladas para respostas axiais e de flexão. Caso contrário, se o laminado não simétrico for considerado, os efeitos axiais e de flexão são acoplados, de modo que as representações integrais acopladas da viga são necessárias primeiro, se uma representação direta pura do MEC for desejada.

Em Mendonça e Nascimento Jr (2013), é feito um estudo preliminar da teoria clássica de vigas laminadas por formulação direta de MEC, onde são estabelecidas equações integrais usando o método dos resíduos ponderados. Além disso, são dadas formas fechadas de matrizes de influência e são apresentados alguns exemplos de vigas laminadas sob carregamento uniformemente distribuído. Em Nascimento Jr e Mendonça

(2021), o problema de vigas laminadas de Timoshenko foi resolvido pelo MEC. No presente artigo uma formulação do MEC é estabelecida para análise estática de vigas compostas laminadas apoiadas em fundação elástica de Pasternak.

2 | EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para o desenvolvimento da teoria clássica de vigas laminadas são assumidas as seguintes hipóteses:

- a) O laminado é composto por camadas perfeitamente unidas;
- b) O material de cada camada deve ser elástico-linear e possuir três planos de simetria (ortotrópico);
- c) As camadas possuem espessura uniforme;
- d) As deformações e os deslocamentos são pequenos;
- e) As tensões de cisalhamento transversais sobre as superfícies superior e inferior do laminado são zero;
- f) A seção transversal inicialmente plana permanece plana e ortogonal ao eixo da viga deformado;
- g) A flexão é observada segundo um dos eixos principais de inércia (no caso eixo y);
- h) O efeito de torção é desprezado (carga transversal aplicada no centro de cisalhamento) e apenas a flexão no plano é considerada;
- i) Já o modelo de fundação elástica Pasternak está associado por um sistema de molas linearmente elásticas, infinitesimalmente espaçadas, mutualmente independentes combinadas com uma camada de cisalhamento.

Para o desenvolvimento do equacionamento da Teoria Clássica de Vigas Laminadas, será adotado um sistema de coordenadas onde y e z são os eixos principais de inércia de uma barra prismática de comprimento L submetida aos carregamentos p_x , p_z conforme mostrado na Fig. 1. Fazendo o equilíbrio de forças nas direções x e z e de momentos em torno do eixo y, resulta nas seguintes relações:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p_x, \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x), \quad \frac{dV(x)}{dx} - g = -p_z, \quad g = K_1 w(x) - K_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2}. \quad (1)$$

onde M é o momento fletor, V é a força de cortante, N é a força normal, K_1 é a constante elástica da mola e K_2 é a constante de distorção da camada elástica. Já p_x e p_z são as cargas distribuídas axiais e transversas, respectivamente.

Fazendo-se substituições convenientes na Eq(1), resulta em:

$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} - K_1 w(x) + K_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + p_z = 0. \quad (2)$$

Devido à conservação da planicidade da seção transversal e aos seus movimentos translacionais e rotacionais, os deslocamentos axial e transversal $\bar{u}(x,z)$ e $\bar{w}(y,z)$, respectivamente, são dados por:

$$\bar{u}(x, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx}, \quad \bar{w}(x, z) = w(x), \quad (3)$$

onde $u(x)$ e $w(x)$ são os deslocamentos axial e transversal no eixo longitudinal. Além disso, z é a profundidade da fibra de interesse em relação à linha neutra.

Já a deformação axial é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{d\bar{u}(x, z)}{dx} = \frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2}. \quad (4)$$

Como no caso das vigas uma dimensão é muito maior que as outras duas, as tensões normal e tangencial na direção do eixo y (σ_y e τ_{xy}), e a tensão tangencial na direção z (τ_{xz}) são consideradas desprezíveis. Destas relações, obtém-se as equações:

$$\sigma_x = \bar{Q}_{11}\varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = \bar{Q}_{55}\gamma_{xz}, \quad (5)$$

onde \bar{Q}_{11} e \bar{Q}_{55} são elementos da matriz de rigidez transformada que podem ser relacionadas com a tensão reduzida a um plano de rigidez em eixos principais do material (x_1, x_2), dados por:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta.$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta.$$

onde θ é a inclinação do sistema (x_1, x_2) com (x, y) conforme mostrado na Fig.1b Já as rigidezes são dadas por:

$$Q_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}, \quad Q_{12} = \nu_{12} Q_{22}, \quad Q_{44} = G_{23},$$

$$Q_{55} = G_{31}, \quad Q_{66} = G_{12}.$$

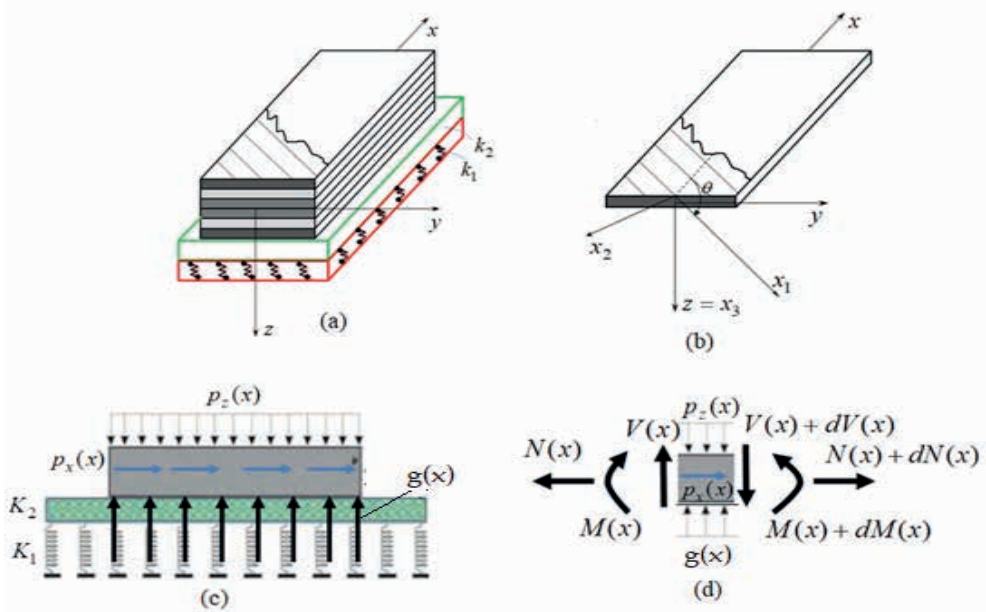


Figura 1 (a) Viga laminada; (b) Ação de forças externas; (c) Equilíbrio no elemento

Como a viga em análise (o laminado) é formada por várias lâminas, as relações constitutivas (tensão-deformação) na k -ésima lâmina, dada na Eq. (5), podem ser reescritas como:

$$\sigma_x^{(k)} = \bar{Q}_{11}^{(k)} \varepsilon_x, \quad \tau_{xz}^{(k)} = \bar{Q}_{55}^{(k)} \gamma_{xz} \quad (6)$$

Em vigas laminadas clássicas, as tensões tangenciais transversas são desprezadas $\tau_{xz}=0$, de tal forma que a Eq. (4) em (6) resulta em:

$$\sigma_x^{(k)} = \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) \quad (7)$$

Devido à variação na continuidade das tensões de uma camada para outra nos laminados, a força normal (N_x) e o momento fletor (M_y) são dados pelas equações:

$$N = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \sigma_x^{(k)} dz \quad (8)$$

onde b é largura da barra e h_k é a coordenada da espessura, vide Fig. 2.

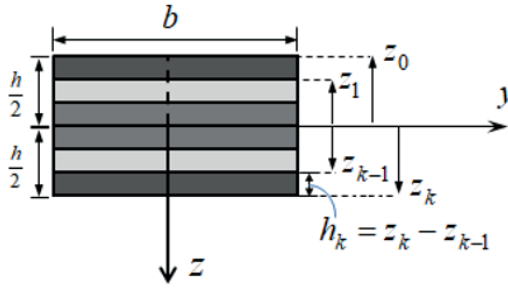


Figura 2 Detalhamento das lâminas no Laminado

Finalmente, as relações esforço-deslocamento podem ser obtidas, substituindo a Eq. (7) na Eq. (8):

$$N = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dz = A_{11} \frac{du}{dx} - B_{11} \frac{d^2w}{dx^2},$$

$$M = b \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dz = B_{11} \frac{du}{dx} - D_{11} \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (9)$$

onde $A_{11} = \sum_{k=1}^n b \bar{Q}_{11}^{(k)} (h_k - h_{k-1})$, $B_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b \bar{Q}_{11}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2)$, $D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n b \bar{Q}_{11}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3)$.

No caso da teoria clássica o esforço cortante não é obtido diretamente da integração na espessura do laminado τ_{xz} (já que o $y_{,xz} = 0$) e sim através das equações de equilíbrio resultando em:

$$V = \frac{dM}{dx} = B_{11} \frac{d^2u}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3w}{dx^3}. \quad (10)$$

Agora, introduzindo as Eqs.(9) e (10) na Eq.(2), resulta em

$$A_{11} \frac{d^2u(x)}{dx^2} - B_{11} \frac{d^3w(x)}{dx^3} = -p_x(x),$$

$$B_{11} \frac{d^3u(x)}{dx^3} - D_{11} \frac{d^4w(x)}{dx^4} - K_1 w(x) + K_2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} = -p_z(x).$$

Matricialmente, as equações governantes da viga laminada clássica apoiada em base elástica de Pasternak ficam:

$$[B]\{u\} = \{f\} \quad (11)$$

onde

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{Bmatrix}, \{f\} = \begin{Bmatrix} -p_x(x) \\ -p_z(x) \end{Bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} - K_1 + K_2 \frac{d^2}{dx^2} \end{bmatrix}$$

3 | PROBLEMA FUNDAMENTAL E SUAS SOLUÇÕES

O uso de soluções fundamentais apropriadas tem papel vital nas formulações de elementos de contorno porque permite eliminar integrais de domínio contendo campos desconhecidos nas representações integrais de problemas. Para tanto, é necessário derivar soluções fundamentais específicas para as equações governantes do problema de interesse. Por exemplo, se soluções fundamentais de vigas laminadas isoladas (sem base elástica) forem usadas para derivar equações integrais para problemas de vigas laminadas apoiadas em bases elásticas, integrais de domínio contendo campos de deslocamento desconhecidos surgem na representação integral. O problema fundamental da viga laminada apoiada na fundação Pasternak está associado a uma viga de domínio infinito sob cargas pontuais (p_x^* , p_z^*) e governada por relações análogas ao problema real conforme mostrado na Fig. 3. Ao se fazer o equilíbrio de forças e momentos fundamentais mostrados da Fig.3a, quando a fonte puntual axial na direção x (p_x^*) for ativada tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dN_F^*(x, \hat{x})}{dx} + p_x^*(x, \hat{x}) = 0, \quad \frac{dV_F^*(x, \hat{x})}{dx} - g_F^*(x, \hat{x}) = 0, \\ \frac{dM_F^*(x, \hat{x})}{dx} - V_F^*(x, \hat{x}) = 0, \quad g_F^*(x, \hat{x}) = K_1 w_F^*(x, \hat{x}) - K_2 \frac{d^2 w_F^*}{dx^2}(x, \hat{x}). \end{aligned} \quad (12)$$

Já o equilíbrio de forças e momentos fundamentais com fonte aplicada na direção z (p_z^*), conforme mostrado na Fig.3b, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dN_P^*(x, \hat{x})}{dx} = 0, \quad \frac{dV_P^*(x, \hat{x})}{dx} - g_P^*(x, \hat{x}) + p_z^*(x, \hat{x}) = 0, \\ \frac{dM_P^*(x, \hat{x})}{dx} - V_P^*(x, \hat{x}) = 0, \quad g_P^*(x, \hat{x}) = K_1 w_P^*(x, \hat{x}) - K_2 \frac{d^2 w_P^*}{dx^2}(x, \hat{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

Por analogia ao problema real, os esforços fundamentais podem ser escritos a partir da Eq. (9), resultando em:

$$\begin{aligned} N_F^*(x, \hat{x}) = A_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad M_F^*(x, \hat{x}) = B_{11} \frac{du_F^*(x, \hat{x})}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \\ V_F^*(x, \hat{x}) = B_{11} \frac{d^2 u_F^*(x, \hat{x})}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_F^*(x, \hat{x})}{dx^3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Já os esforços fundamentais para fonte transversal ativada, são:

$$\begin{aligned} N_P^*(x, \hat{x}) = A_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x})}{dx} - B_{11} \frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad M_P^*(x, \hat{x}) = B_{11} \frac{du_P^*(x, \hat{x})}{dx} - D_{11} \frac{d^2 w_P^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \\ V_P^*(x, \hat{x}) = B_{11} \frac{d^2 u_P^*(x, \hat{x})}{dx^2} - D_{11} \frac{d^3 w_P^*(x, \hat{x})}{dx^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo-se respectivamente as Eqs.(14) e (15) nas Eqs.(12) e (13) tem-se a equação governante do problema fundamental:

$$[B][C] = \{f^*\} \quad (16)$$

onde

$$[C] = \begin{bmatrix} u_F^*(x, \hat{x}) & u_P^*(x, \hat{x}) \\ w_F^*(x, \hat{x}) & w_P^*(x, \hat{x}) \end{bmatrix}, \quad [f^*] = - \begin{bmatrix} p_x^* & 0 \\ 0 & p_z^* \end{bmatrix} = -\delta(x, \hat{x}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $[C]$ a matriz de soluções fundamentais onde $(u_F^*(x, \hat{x}), w_F^*(x, \hat{x}))$, são os deslocamentos fundamentais devidos à fonte axial. Já $(u_P^*(x, \hat{x}), w_P^*(x, \hat{x}))$, são os deslocamentos fundamentais devidos à fonte transversal.

Deve-se notar que a Eq. (16) consiste em um sistema de equações diferenciais acopladas que pode ser mais facilmente resolvido se for transformada em uma equação diferencial desacoplada equivalente. Uma técnica de desacoplamento que tem sido usada em muitos problemas como vigas é o método de Hormander (1963). Essa abordagem também pode ser aplicada a vigas laminadas sobre fundação de Pasternak em termos de uma função escalar ψ como segue

$$[C] = [B^{cof}]^T \psi, \tag{17}$$

onde $[B^{cof}]$ é a matriz dos cofatores de $[B]$, conhecida como matriz adjunta.

Substituindo a Eq. (17) na Eq. (16), resulta em

$$[B][B^{cof}]^T \psi = -[I]\delta(x, \hat{x}), \tag{18}$$

sendo $[I]$ a matriz identidade e a inversa de B definida como $[B]^{-1} = [B^{cof}]^T / \det[B]$, a Eq. (18) pode ser transformada em uma equação diferencial desacoplada dada por:

$$\det[B]\psi(x, \hat{x}) = -\delta(x, \hat{x}) . \tag{19}$$

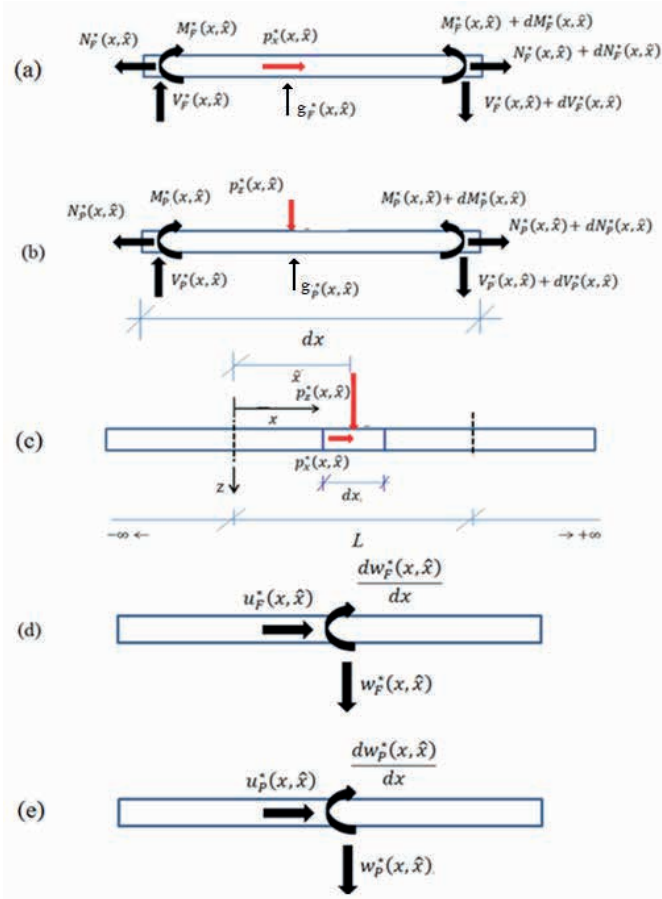


Figura 3 Equilíbrio Fundamental: (a) px^* ativado; (b) pz^* ativado; (c) Barra fundamental; Deslocamentos Fundamentais: (d) px^* ativado; (e) pz^* ativado

Após o cálculo do determinante de [B], a Eq. (19) pode ser reescrita como:

$$d^2/dx^2 (\lambda d^4/dx^4 - A_{11} K_2 d^2\psi/dx^2 + A_{11} K_1)\psi(x, \hat{x}) = -\delta(x, \hat{x}), \quad (20)$$

onde $\lambda = B_{11}^2 - A_{11} D_{11}$.

Assumindo $d^2\psi/dx^2 = z$, a equação característica da Eq. (20) é dada por:

$$z(\lambda z^2 + A_{11} K_2 z - A_{11} K_1) = z(z - z_1)(z - z_2) = 0, \quad (21)$$

onde $z_1 = (-A_{11} K_2 - \sqrt{\Delta_2})/(2\lambda)$, $z_2 = (-A_{11} K_2 + \sqrt{\Delta_2})/(2\lambda)$, $\Delta_2 = (A_{11} K_2)^2 + 4\lambda A_{11} K_1$.

De acordo com a natureza das raízes na Eq. (21), as expressões para a função $\psi(r)$ podem ser divididas em três grupos:

Grupo I ($\Delta_2 > 0$, $z_1 > 0$ e $z_2 > 0$)

Neste caso, a solução sugerida neste trabalho é:

$$\psi_0(r) = \psi(r) = c_1 r + c_2 e^{-r\sqrt{z_1}} + c_3 e^{-r\sqrt{z_2}}, \quad (22)$$

$$\text{onde } c_1 = -\frac{1}{2z_1 z_2 \lambda}, c_2 = \frac{1}{2z_1 \sqrt{z_1} (z_1 - z_2) \lambda}, c_3 = -\frac{1}{2z_2 \sqrt{z_2} (z_1 - z_2) \lambda}, r = |x - \hat{x}|.$$

Grupo II ($\Delta_2 = 0$, $z_1 = z_2 = -A_{11} K_2$)

Neste caso, quando z_1 tende a z_2 ocorrem singularidades, que permite que $\psi_0(r)$ seja calculado no limite usando a regra de L'hôpital:

$$\begin{aligned} \psi_0(r) &= -\frac{1}{2\lambda} \lim_{z_1 \rightarrow z_2} \frac{r}{z_1 z_2} + \frac{1}{2\lambda} \lim_{z_1 \rightarrow z_2} \frac{\left(\frac{e^{-r\sqrt{z_1}}}{z_1 \sqrt{z_1}} - \frac{e^{-r\sqrt{z_2}}}{z_2 \sqrt{z_2}} \right)}{z_1 - z_2} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{r}{z_2^2} + \\ &\frac{1}{2\lambda} \lim_{z_1 \rightarrow z_2} \frac{\frac{d}{dz_1} \left(\frac{e^{-r\sqrt{z_1}}}{z_1 \sqrt{z_1}} - \frac{e^{-r\sqrt{z_2}}}{z_2 \sqrt{z_2}} \right)}{\frac{d}{dz_1} (z_1 - z_2)} = -\frac{1}{2\lambda z_2^2} \left[r + \frac{1}{2} \left(r + \frac{3}{\sqrt{z_2}} \right) e^{-r\sqrt{z_2}} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Grupo III ($\Delta_2 < 0$, as raízes são complexas)

Neste caso, a sugestão para a função $\psi(r)$ é:

$$\psi_0(r) = \psi(r) = c_1 r + c_2 e^{-pr} \cos(qr) + c_3 e^{-pr} \sin(qr), \quad (24)$$

$$\text{onde } c_1 = -\frac{1}{2\lambda(a^2 + b^2)}, c_2 = -\frac{a q + b p}{2\lambda b(a^2 + b^2)^2}, c_3 = -\frac{a q - b p}{2\lambda b(a^2 + b^2)^2}, r = |x - \hat{x}|,$$

$$p = |Re\sqrt{z_1}|, q = |Im\sqrt{z_1}|, a = p^2 + q^2, b = 2pq$$

Conforme a natureza das raízes, se uma das equações de Eq. (22) a Eq. (24) for substituída na Eq. (17), tem-se as soluções fundamentais primárias:

$$u_F^*(x, \hat{x}) = -D_{11} \psi_4(r) + K_2 \psi_2(r) - K_1 \psi_0(r),$$

$$w_F^*(x, \hat{x}) = -u_p^*(x, \hat{x}) = -B_{11} \psi_3(r) \operatorname{sgn}(r),$$

$$\theta_F^*(x, \hat{x}) = u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -B_{11} \psi_4(r), \quad w_p^*(x, \hat{x}) = A_{11} \psi_2(r),$$

$$\theta_p^*(x, \hat{x}) = -w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = A_{11} \psi_3(r) \operatorname{sgn}(r), \quad \theta_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = -A_{11} \psi_4(r)$$

onde $\operatorname{sgn}(r)$ é a função sinal.

Os esforços fundamentais são dados por:

$$N_F^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x, \hat{x}), \quad V_F^*(x, \hat{x}) = -B_{11} (K_1 \psi_2 - K_2 \psi_4),$$

$$M_F^*(x, \hat{x}) = -B_{11} (K_1 \psi_1 - K_2 \psi_3) \operatorname{sgn}(x, \hat{x}), \quad N_p^*(x, \hat{x}) = N_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = 0,$$

$$V_p^*(x, \hat{x}) = \left(-\frac{1}{2} + K_1 A_{11} \psi_1 - A_{11} K_2 \psi_3 \right) \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) = \lambda \psi_5 \operatorname{sgn}(x, \hat{x}),$$

$$M_p^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} r + A_{11} [K_1 \psi_0(r) - K_2 \psi_2] = \lambda \psi_4,$$

$$V_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = K_1 A_{11} \psi_2(r) - A_{11} K_2 \psi_4 = -\lambda \psi_6,$$

$$M_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2} - A_{11} (K_1 \psi_1(r) - K_2 \psi_3(r)) \operatorname{sgn}(x, \hat{x}) = -\lambda \psi_5 \operatorname{sgn}(x, \hat{x})$$

As derivadas da função $\psi(r)$ dependem da natureza das raízes da Eq. (21). Para o Grupo I, elas ficam:

$$\psi_1(r) = \frac{d\psi(r)}{dr} = c_1 - c_2\sqrt{z_1}e^{-r\sqrt{z_1}} - c_3\sqrt{z_2}e^{-r\sqrt{z_2}},$$

$$\psi_n(r) = d^n\psi(r)/dr^n = \begin{cases} c_2z_1^{n/2}e^{-r\sqrt{z_1}} + c_3z_2^{n/2}e^{-r\sqrt{z_2}}, & \text{se } n = 2,4,6, \dots \\ -c_2z_1^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{z_1}e^{-r\sqrt{z_1}} - c_3z_2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{z_2}e^{-r\sqrt{z_2}}, & \text{se } n = 3,5,7, \dots \end{cases}$$

Convém notar que n é a ordem da derivada de interesse.

Para o grupo II, as derivadas de $\psi(r)$ resultam em:

$$\psi_1(r) = \frac{d\psi(r)}{dr} = -\frac{1}{4\lambda z_2^2} [2 - (2 + r\sqrt{z_2})e^{-r\sqrt{z_2}}],$$

$$\psi_n(r) = d^n\psi(r)/dr^n = -\frac{1}{4\lambda z_2^2} (-1)^n [(3-n)z_2^{\frac{n-1}{2}} + rz_2^{\frac{n}{2}}] e^{-r\sqrt{z_2}}, \text{ se } n = 2,3,4, \dots$$

E, finalmente para o Grupo III, as derivadas de $\psi(r)$ são expressas por:

$$\psi_1(r) = c_1 + c_2e^{-pr}[-p \cos(qr) - q \sin(qr)] + c_3e^{-pr}[-p \sin(qr) + q \cos(qr)],$$

$$\psi_2(r) = c_2e^{-pr}[a \cos(qr) + b \sin(qr)] + c_3e^{-pr}[a \sin(qr) - b \cos(qr)],$$

$$\psi_3(r) = c_2e^{-pr}[(-p a + q b) \cos(qr) - (q a + p b) \sin(qr)] + c_3e^{-pr}[(-p a + q b) \sin(qr) + (q a + p b) \cos(qr)],$$

$$\psi_4(r) = c_2e^{-pr}[(a^2 - b^2) \cos(qr) + 2a b \sin(qr)] + c_3e^{-pr}[(a^2 - b^2) \sin(qr) - 2a b \cos(qr)],$$

$$\psi_5(r) = c_2e^{-pr}\{[-p(a^2 - b^2) + 2a b q] \cos(qr) + [-q(a^2 - b^2) - 2a b p] \sin(qr)\} + c_3e^{-pr}\{[-q(a^2 - b^2) - 2a b p] \cos(qr) + [-p(a^2 - b^2) - 2a b q] \sin(qr)\},$$

$$\psi_6(r) = c_2e^{-pr}[a(a^2 - 3b^2) \cos(qr) + b(3a^2 - b^2) \sin(qr)] + c_3e^{-pr}[a(a^2 - 3b^2) \sin(qr) - [b(3a^2 - b^2) \cos(qr)].$$

4 I EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS

As representações integrais têm um papel relevante na construção das soluções numéricas baseadas no MEC. Uma das maneiras para o estabelecimento dessas equações integrais é pela transformação das equações diferenciais do problema real ponderada por funções pesos, que são soluções de um problema virtual de domínio infinito: o então chamado problema fundamental. Além disso, o problema fundamental é regido pelas mesmas hipóteses do problema real e está submetido apenas a fontes concentradas que estão associadas ao delta de Dirac. Se a equação governante do problema real, Eq. (11), for ponderada por soluções fundamentais apropriadas tem-se que:

$$\int_0^L \left[\begin{array}{cc} A_{11} \frac{d^2}{dx^2} & -B_{11} \frac{d^3}{dx^3} \\ B_{11} \frac{d^3}{dx^3} & -D_{11} \frac{d^4}{dx^4} - K_1 + K_2 \frac{d^2}{dx^2} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u(x) \\ w(x) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} p_x(x) \\ p_z(x) \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} u_F^*(x, \hat{x}) & u_P^*(x, \hat{x}) \\ w_F^*(x, \hat{x}) & w_P^*(x, \hat{x}) \end{array} \right] dx = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}^T. \quad (25)$$

Depois de aplicar convenientemente integrações sucessivas por partes da Eq. (25) e então com a ajuda das Eqs. (12) e (13) e a propriedade do delta de Dirac, obtêm-se as equações integrais para deslocamentos axiais e transversais:

$$u(\hat{x}) + [N_F^*(x, \hat{x})u(x)]_0^L + [Q_F^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - [M_F^*(x, \hat{x})\theta(x)]_0^L = [u_F^*(x, \hat{x})N(x)]_0^L + [w_F^*(x, \hat{x})Q(x)]_0^L - [\theta_F^*(x, \hat{x})M(x)]_0^L + \int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] dx, \quad (26)$$

$$w(\hat{x}) + [N_P^*(x, \hat{x})u(x)]_0^L + [Q_P^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - [M_P^*(x, \hat{x})\theta(x)]_0^L = [u_P^*(x, \hat{x})N(x)]_0^L + [w_P^*(x, \hat{x})Q(x)]_0^L - [\theta_P^*(x, \hat{x})M(x)]_0^L + \int_0^L [p_x u_P^*(x, \hat{x}) + p_z w_P^*(x, \hat{x})] dx. \quad (27)$$

onde

$$Q(x) = V(x) + K_2 \frac{dw(x)}{dx}, \quad Q_F^*(x, \hat{x}) = V_F^*(x, \hat{x}) + K_2 \frac{dw_F^*(x, \hat{x})}{dx} = B_{11} K_1 \psi_2,$$

$$Q_P^*(x, \hat{x}) = V_P^*(x, \hat{x}) + K_2 \frac{dw_P^*(x, \hat{x})}{dx} = -\left(\frac{1}{2} + K_1 A_{11} \psi_1\right) sgn(x, \hat{x}) = -(\lambda \psi_5 + A_{11} K_2 \psi_3) sgn(x, \hat{x})$$

Deve-se notar que as Eqs. (26) e (27) para laminados simétricos são análogas às representações integrais para viga homogênea dadas por Passos (2012). As soluções fundamentais também podem ser substituídas por soluções fundamentais de vigas homogêneas, se desejado. No entanto, as propriedades mecânicas do laminado simétrico devem substituir adequadamente as constantes de material homogêneo em soluções fundamentais Passos (2012). Os problemas de vigas laminadas clássicas requerem três incógnitas no contorno para serem determinadas. Portanto, uma equação adicional é necessária para ser estabelecida a fim de obter o problema solucionável. Então, essa equação restante pode ser associada à derivada da Eq. (27) no ponto de origem $\theta(\hat{x})=dw(\hat{x})/d\hat{x}$, resultando na equação integral da inclinação:

$$\theta(\hat{x}) + [N_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})u(x)]_0^L + [Q_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})w(x)]_0^L - [M_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})\theta(x)]_0^L = [u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})N(x)]_0^L + [w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})Q(x)]_0^L - [\theta_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})M(x)]_0^L + \int_0^L [p_x u_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] dx. \quad (28)$$

$$\text{onde } Q_{P,\hat{x}}^* = V_{P,\hat{x}}^* + K_2 \frac{dw_{P,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} = K_1 A_{11} \psi_2(r) = \lambda \psi_6 + A_{11} K_2 \psi_4$$

As equações governantes da viga, Eq. (11), são definidas em um domínio dimensional (1-D). Após a aplicação da integração por partes e com a ajuda de soluções fundamentais, as grandezas nos pontos de domínio dadas nas Eqs. (26), (27) e (28) são escritas apenas em termos de variáveis de contorno. Nas formulações do MEC, a transformação

de equações integrais em uma representação algébrica é feita por discretização usando elementos de contorno e avaliação das integrais necessárias. Para um problema de viga, os elementos de contorno são os pontos finais da viga, não sendo necessária nenhuma interpolação para as variáveis de contorno. Colocando a fonte nas extremidades da barra, uma representação algébrica em termos de variáveis de contorno para deslocamentos e para forças (ver Fig.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\{u\} + [\hat{H}]\{u\} = [G]\{p\} + \{f\}, \quad (29)$$

onde [H] e [G] são as matrizes de influência, {u}, {p} e {f} são os vetores de deslocamentos, esforços e carga, respectivamente.

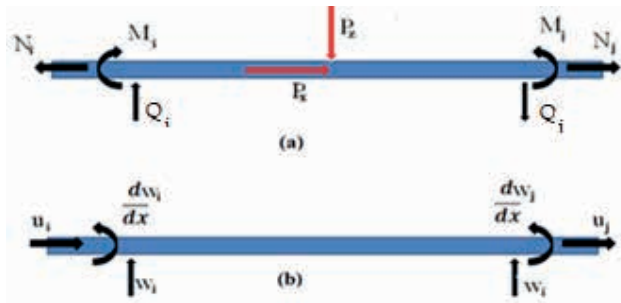


Figura 4. Esforços no contorno (a) e deslocamentos no contorno (b).

Na Eq. (29), as matrizes e vetores de interesse são:

$$\{u\} = [u_i \quad w_i \quad \theta_i \quad u_j \quad w_j \quad \theta_j]^T,$$

$$\{p\} = [N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_j \quad V_j \quad M_j]^T,$$

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, \quad [\hat{H}] = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix},$$

$$[G_{11}] = - \begin{bmatrix} u_F^*(0,0) & w_F^*(0,0) & -\theta_F^*(0,0) \\ u_P^*(0,0) & w_P^*(0,0) & -\theta_P^*(0,0) \\ u_{P,x}^*(0,0) & w_{P,x}^*(0,0) & -\theta_{P,x}^*(0,0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -g_0(0) & g_3(0) & g_4(0) \\ -g_3(0) & g_2(0) & g_5(0) \\ -g_4(0) & g_5(0) & g_6(0) \end{bmatrix},$$

$$[G_{21}] = - \begin{bmatrix} u_F^*(0,L) & w_F^*(0,L) & -\theta_F^*(0,L) \\ u_P^*(0,L) & w_P^*(0,L) & -\theta_P^*(0,L) \\ u_{P,x}^*(0,L) & w_{P,x}^*(0,L) & -\theta_{P,x}^*(0,L) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -g_0(L) & g_3(L) & g_4(L) \\ -g_3(L) & g_2(L) & g_5(L) \\ -g_4(L) & g_5(L) & g_6(L) \end{bmatrix},$$

$$[G_{12}] = \begin{bmatrix} u_F^*(L,0) & w_F^*(L,0) & -\theta_F^*(L,0) \\ u_P^*(L,0) & w_P^*(L,0) & -\theta_P^*(L,0) \\ u_{P,x}^*(L,0) & w_{P,x}^*(L,0) & -\theta_{P,x}^*(L,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_0(L) & -g_3(L) & g_4(L) \\ g_3(L) & g_2(L) & -g_5(L) \\ -g_4(L) & -g_5(L) & g_6(L) \end{bmatrix},$$

$$[G_{22}] = \begin{bmatrix} u_F^*(L,L) & w_F^*(L,L) & -\theta_F^*(L,L) \\ u_P^*(L,L) & w_P^*(L,L) & -\theta_P^*(L,L) \\ u_{P,x}^*(L,L) & w_{P,x}^*(L,L) & -\theta_{P,x}^*(L,L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_0(0) & -g_3(0) & g_4(0) \\ g_3(0) & g_2(0) & -g_5(0) \\ -g_4(0) & -g_5(0) & g_6(0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [\hat{H}_{11}] &= - \begin{bmatrix} N_F^*(0,0) & Q_F^*(0,0) & -M_F^*(0,0) \\ N_P^*(0,0) & Q_P^*(0,0) & -M_P^*(0,0) \\ N_{P,\hat{x}}^*(0,0) & Q_{P,\hat{x}}^*(0,0) & -M_{P,\hat{x}}^*(0,0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/2 & -h_2(0) & -h_1(0) \\ 0 & -h_5(0) - K_2 A_{11} \psi_3(0) & -h_4(0) \\ 0 & -h_6(0) - K_2 A_{11} \psi_4(0) & -h_5(0) \end{bmatrix}, \\ [\hat{H}_{21}] &= - \begin{bmatrix} N_F^*(0,L) & Q_F^*(0,L) & -M_F^*(0,L) \\ N_P^*(0,L) & Q_P^*(0,L) & -M_P^*(0,L) \\ N_{P,\hat{x}}^*(0,L) & Q_{P,\hat{x}}^*(0,L) & -M_{P,\hat{x}}^*(0,L) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/2 & -h_2(L) & -h_1(L) \\ 0 & -h_5(L) - K_2 A_{11} \psi_3(L) & -h_4(L) \\ 0 & -h_6(L) - K_2 A_{11} \psi_4(L) & -h_5(L) \end{bmatrix}, \\ [\hat{H}_{12}] &= \begin{bmatrix} N_F^*(L,0) & Q_F^*(L,0) & -M_F^*(L,0) \\ N_P^*(L,0) & Q_P^*(L,0) & -M_P^*(L,0) \\ N_{P,\hat{x}}^*(L,0) & Q_{P,\hat{x}}^*(L,0) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -h_2(L) & h_1(L) \\ 0 & h_5(L) + K_2 A_{11} \psi_3(L) & -h_4(L) \\ 0 & -h_6(L) - K_2 A_{11} \psi_4(L) & h_5(L) \end{bmatrix}, \\ [\hat{H}_{22}] &= \begin{bmatrix} N_F^*(L,L) & Q_F^*(L,L) & -M_F^*(L,L) \\ N_P^*(L,L) & Q_P^*(L,L) & -M_P^*(L,L) \\ N_{P,\hat{x}}^*(L,L) & Q_{P,\hat{x}}^*(L,L) & -M_{P,\hat{x}}^*(L,L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -h_2(0) & h_1(0) \\ 0 & h_5(0) + K_2 A_{11} \psi_3(0) & -h_4(0) \\ 0 & -h_6(0) - K_2 A_{11} \psi_4(0) & h_5(0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h_2(r) &= B_{11} K_1 \psi_2(r), \quad h_1(r) = B_{11} (K_1 \psi_1(r) - K_2 \psi_3(r)), \\ h_5(r) &= \lambda \psi_5(r), \quad h_4(r) = \lambda \psi_4(r), \quad h_6(r) = \lambda \psi_6(r), \quad g_3(r) = B_{11} \psi_3(r), \\ g_4(r) &= B_{11} \psi_4(r), \quad g_0(r) = D_{11} \psi_4(r) - K_2 \psi_2(r) + K_1 \psi_0(r), \\ g_6(r) &= A_{11} \psi_4(r), \quad g_2(r) = A_{11} \psi_2(r) \text{ e } g_5(r) = A_{11} \psi_3(r). \end{aligned}$$

Se p_x e p_z forem assumidos constantes, os termos de domínio nas equações (26), (27) e (28) podem transferidos para o contorno com auxílio de integrações por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^L [p_x u_F^*(x, \hat{x}) + p_z w_F^*(x, \hat{x})] &= [p_x \chi_F^*(x, \hat{x}) + p_z \Lambda_F^*(x, \hat{x})]_0^L, \\ \int_0^L [p_x u_p^*(x, \hat{x}) + p_z w_p^*(x, \hat{x})] &= [p_x \chi_p^*(x, \hat{x}) + p_z \Lambda_p^*(x, \hat{x})]_0^L, \\ \int_0^L [p_x u_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z w_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] &= [p_x \chi_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) + p_z \Lambda_{p,\hat{x}}^*(x, \hat{x})]_0^L, \end{aligned}$$

onde $\chi_F^*(x, \hat{x}) = \text{sgn}(x, \hat{x}) (-D_{11} \psi_3 + K_2 \psi_1 - K_1 \psi_{-1})$,

$$\Lambda_F^*(x, \hat{x}) = -\chi_p^*(x, \hat{x}) = -B_{11} \psi_2 \text{ e } \Lambda_p^*(x, \hat{x}) = \text{sgn}(x, \hat{x}) A_{11} \psi_1.$$

Convém que $\psi_{-1} = \int \psi_0(r) dr$ de forma que também depende da natureza das raízes. Assim:

$$\psi_{-1} = \begin{cases} -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{r^2}{2z_1 z_2} + \frac{e^{-r\sqrt{z_1}}}{z_1^2 (z_1 - z_2)} + \frac{e^{-r\sqrt{z_2}}}{z_2^2 (z_1 - z_2)} \right), & \text{se } z_1 \neq z_2 \text{ (positivas)} \\ -\frac{1}{2\lambda z_2^2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{4 + r\sqrt{z_2}}{2z_2} e^{-r\sqrt{z_2}} \right), & \text{se } z_1 = z_2 > 0 \\ -\frac{1}{2\lambda d_1} \left\{ \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{d_1 d_2 b} e^{-pr} [d_3 t_1(r) - d_4 t_2(r)] \right\}, & \text{se } z_1 \text{ e } z_2 \text{ (complexas)} \end{cases}$$

onde $d_1 = a^2 + b^2$, $d_3 = a q + b p$, $d_2 = p^2 + q^2$, $d_4 = a q - b p$,

$$t_1(r) = p \cos(qr) - q \text{sen}(qr), \quad t_2(r) = p \text{sen}(qr) + q \cos(qr).$$

Assim, o vetor de carga $\{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$ na Eq. (29) fica:

$$\{f_i\} = \begin{bmatrix} \chi_F^*(0,0) + \chi_F^*(0,L) & \Lambda_F^*(0,0) + \Lambda_F^*(0,L) \\ \chi_P^*(0,0) + \chi_P^*(0,L) & \Lambda_P^*(0,0) + \Lambda_P^*(0,L) \\ \chi_{P,\hat{x}}^*(0,0) + \chi_{P,\hat{x}}^*(0,L) & \Lambda_{P,\hat{x}}^*(0,0) + \Lambda_{P,\hat{x}}^*(0,L) \end{bmatrix} \{p_x\} = \begin{bmatrix} -(f_5(L) + f_5(0)) & -f_2(L) + f_2(0) \\ f_2(L) - f_2(0) & f_1(L) + f_1(0) \\ -(g_3(L) + g_3(0)) & -g_2(L) + g_2(0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_z \end{Bmatrix},$$

$$\{f_j\} = \begin{bmatrix} \chi_F^*(L,L) + \chi_F^*(L,0) & \Lambda_F^*(0,L) + \Lambda_F^*(L,0) \\ \chi_P^*(L,L) + \chi_P^*(L,0) & \Lambda_P^*(0,L) + \Lambda_P^*(L,0) \\ \chi_{P,\hat{x}}^*(L,L) + \chi_{P,\hat{x}}^*(L,0) & \Lambda_{P,\hat{x}}^*(L,L) + \Lambda_{P,\hat{x}}^*(L,0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(f_5(L) + f_5(0)) & f_2(L) - f_2(0) \\ -f_2(L) + f_2(0) & f_1(L) + f_1(0) \\ -(g_3(L) + g_3(0)) & g_2(L) - g_2(0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_z \end{Bmatrix}.$$

onde $f_2 = B_{11}\psi_2(L)$, $f_1 = A_{11}\psi_1(L)$ e $f_5 = D_{11}\psi_3(L) - K_2\psi_1(L) + K_1\psi_{-1}(L)$.

De posse da Eq. (29), após a aplicação das condições de contorno, um outro sistema de equações pode ser obtido como:

$$[A]\{x\} = \{t\} \quad (30)$$

onde [A] é a matriz de influência das incógnitas e {t} é o vetor independente. Após a solução da Eq. (30), $\{x\}=[A]^{-1}\{t\}$, as incógnitas em forças e deslocamentos são determinadas, resultando em $\{u\}=\{\bar{u}\}$ e $\{p\}=\{\bar{p}\}$. Os deslocamentos em uma coordenada $\hat{x}=\alpha$ no domínio da viga laminada podem ser obtidos aplicando-se Eqs. (26), (27) e (28):

$$\begin{Bmatrix} u(\hat{x}) \\ w(\hat{x}) \\ \theta(\hat{x}) \end{Bmatrix} = -[\hat{H}_{21}(a) \quad \hat{H}_{12}(b)] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + [-G_{21}(a) \quad G_{12}(b)] \begin{Bmatrix} \bar{p}_i \\ \bar{p}_j \end{Bmatrix} + \{f(a)\}$$

$$\text{onde } b = L - a, \quad \hat{H}_{21}(a) = - \begin{bmatrix} 1/2 & -h_2(a) & -h_1(a) \\ 0 & -h_5(a) - K_2A_{11}\psi_3(a) & -h_4(a) \\ 0 & -h_6(a) - K_2A_{11}\psi_4(a) & -h_5(a) \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}_{12}(b) = \begin{bmatrix} -1/2 & -h_2(b) & h_1(b) \\ 0 & h_5(b) + K_2A_{11}\psi_3(b) & -h_4(b) \\ 0 & -h_6(b) - K_2A_{11}\psi_4(b) & h_5(b) \end{bmatrix}, \quad \{f(a)\} = \begin{bmatrix} -(f_5(b) + f_5(a)) & -f_2(b) + f_2(a) \\ f_2(b) - f_2(a) & f_1(b) + f_1(a) \\ -(g_3(b) + g_3(a)) & -g_2(b) + g_2(a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_z \end{Bmatrix}.$$

$$G_{21}(a) = - \begin{bmatrix} -g_0(a) & g_3(a) & g_4(a) \\ -g_3(a) & g_2(a) & g_5(a) \\ -g_4(a) & g_5(a) & g_6(a) \end{bmatrix}, \quad G_{12}(b) = \begin{bmatrix} -g_0(b) & -g_3(b) & g_4(b) \\ g_3(b) & g_2(b) & -g_5(b) \\ -g_4(b) & -g_5(b) & g_6(b) \end{bmatrix}.$$

5 I VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Seja uma viga simplesmente apoiada de comprimento L, seção retangular com largura b e altura h. Além disso, a viga tem propriedades mecânicas E_1, E_2, G_{12} e v_{12} e está sujeita a uma carga uniforme $p_z=p_0$. O apoio da direita é de segundo gênero (deslocamentos axial e transversal nulos). As soluções analíticas podem ser obtidas via método de Navier onde são assumidos que $w(x) = \sum_{m=1}^{m_{total}} B_m \sin(\frac{\pi mx}{L})$, $u(x) = \sum_{m=1}^{m_{total}} A_m \cos(\frac{\pi mx}{L})$ e $p_z(x) = \sum_{m=1}^{m_{total}} F_m \sin(\frac{\pi mx}{L})$ seguida da substituição na Eq. (11), resultando em:

$$w(x) = \frac{L^4}{D_{11}} \sum_{m=1}^{m_{total}} \frac{F_m \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m x}{L}\right)}{K_c + \pi^2 G_c m^2 + (1 - \beta)\pi^4 m^4} \quad (31)$$

$$u(x) = \frac{L^3}{D_{11} A_{11}} \sum_{m=1}^{m_{total}} \frac{\pi m F_m [\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) - \cos(\pi m)]}{K_c + \pi^2 G_c m^2 + (1 - \beta)\pi^4 m^4} \quad (32)$$

onde $K_c = K_1 L^4 / D_{11}$, $G_c = K_2 L^2 / D_{11}$ e $\beta = \frac{B_{11}^2}{A_{11} D_{11}} = 1 + \frac{\lambda}{A_{11} D_{11}}$. O coeficiente $F_m = \int_0^L p_z(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m x}{L}\right) dx$ para carga uniforme $p_z = p_0$ resulta em $F_m = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{2}\right)^2 p_0 / (\pi m)$. As equações (31) e (32) na forma adimensional ficam:

$$w_c = \frac{D_{11}}{p_0 L^4} w(x), \quad u_c = \frac{D_{11} A_{11}}{p_0 L^3 B_{11}} u(x) \quad (33)$$

Para laminados simétricos, $B_{11} = 0$, os deslocamentos adimensionalizados u_c são infinitos. As soluções do MEC desenvolvidas neste trabalho estão na forma dimensional, de forma que os dados de entrada precisam ser atribuídos dimensionalmente. Então, se for de interesse, as respostas do MEC podem ser adimensionalizadas usando a Eq. (33). Os dados dimensionais são: $L = 1m$, $b = 0,025m$, $h = 0,05m$, $p_0 = 250 \text{ kN/m}$, $E_1 = 138 \text{ GPa}$, $E_2 = 8,96 \text{ GPa}$, $G_{12} = 7,1 \text{ GPa}$ e $\nu_{12} = 0,3$. Duas opções de laminado com quatro lâminas são investigadas dadas respectivamente por $[0/90/0/90]$ e $[0/90/90/0]$. As soluções analíticas ($m_{total} = 200$) e do MEC dos deslocamentos adimensionalizados no meio do vão do laminado não-simétrico são mostradas na Tabela 1. Um estudo da influência dos parâmetros da base elástica no deslocamento do meio vão do laminado simétrico é mostrado na Fig.5.

	Grupo	$w_c (x10^{-3})$		$u_c (x10^{-3})$		
		Exata	MEC	Exata	MEC	
10	0	III	13,58	13,58	43,56	43,56
	$\sqrt{40(1-\beta)}$	II	8,37	8,37	27,14	27,14
	10	I	6,58	6,58	21,46	21,46
	50	I	2,14	2,14	7,27	7,27
	100	I	1,15	1,15	4,04	4,04
50	0	III	9,49	9,49	30,70	30,70
	10	III	5,44	5,44	17,87	17,87
	$\sqrt{200(1-\beta)}$	II	4,80	4,80	15,85	15,85
	50	I	2,00	2,00	6,83	6,83
	100	I	1,11	1,11	3,91	3,91

	0	III	6,89	6,89	22,51	22,51
	10	III	4,46	4,46	14,81	14,81
1100	$\sqrt{400(1-\beta)}$	II	3,43	3,43	11,51	11,51
	50	I	1,85	1,85	6,36	6,36
	100	I	1,06	1,06	3,75	3,75

Tabela 1 Deslocamentos adimensionalizados no laminado não-simétrico (0/90/0/90)

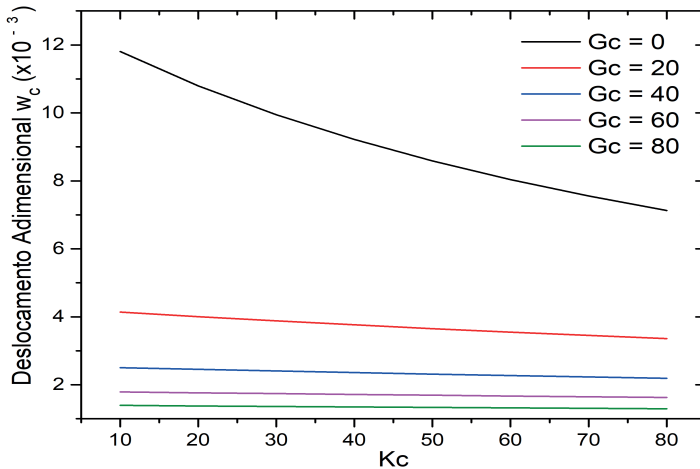


Figura 5. Deslocamento no meio-vão da viga 0/90/90/0 em função de β e K_c .

A partir da tabela 1 pode-se observar que as soluções do MEC, que dependem das propriedades da viga e da base elástica (natureza das raízes), recuperam com sucesso as soluções analíticas obtidas pelo método Navier. Vale lembrar que a solução do tipo-Navier para a Eq. (11) não requer nenhuma condição prévia tanto para as propriedades do laminado e da fundação, mas exige que a viga seja necessariamente simplesmente apoiada. A Fig.5 mostra uma influência mais dominante do parâmetro (G_c) em relação à repercussão da constante de mola (K_c) no deslocamento da viga laminada.

6 | CONCLUSÕES

Neste trabalho foi estabelecida uma modelagem de elementos de contorno para problemas de vigas laminadas compostas apoiadas em fundação elástica de Pasternak sob hipóteses da teoria clássica de vigas laminadas. Apenas a flexão no plano da viga é considerada aqui, e os resultados sugerem a correção e eficácia da formulação aqui apresentada.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

Aguiar, R.M., Moleiro, F. e Soares, C.M.M. (2012). **Assessment of mixed and displacement-based models for static analysis of composite beams of different cross-sections**. *Compos. Struct.* 92:601-616.

Antes, H. (2003). **Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams**, *Comput Struct*, 81: 383-396.

Antes, H., Shanz, M. e Alvermann, S. (2004). **Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams**, *J Sound Vib*, 276:807-836.

Brito, W.K.F., Maia, C.D.C.D. e Mendonca, A.V. (2019). **Bending analysis of elastically connected Euler-Bernoulli double-beam system using the direct boundary element method**, *Appl. Math. Modelling*, 74: 387-408.

Goyal, V.K. and Kapania, R.K. (2007). **A Shear-Deformable Beam Element for the Analysis of Laminated Composites**, *Finite Elem Anal Des*, 43:463 – 477.

Hajianmaleki, M. e Qatu, M.S. (2012). **A rigorous beam model for static and dynamic analysis of generally laminated composite thick beams and shafts**. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration* 8(2): 166-184.

Heinisuo, M. (1988). **An exact finite element technique for layered beams**, *Comput Struct*, 30: 615-622.

Hormander, L. (1963) **Linear partial differential operators**. Springer, Berlin Kahya, V. (2016). **Buckling analysis of laminated composite and sandwich beam by finite element method**, *Composites Part B*, 91:126-134.

Mendonça, A. V. e Nascimento Jr, P. C. (2013). **Boundary element formulation for the classical laminated beam theory**. *Proceedings of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering*. Ribeirão Preto, Brazil, 2256-2262.

Nascimento Jr, P. C. e Mendonça, A. V. (2021). **Fundamental solutions and integral equations of first-order laminated composite beams**. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Engng.* 43, Article number: 13.

Passos, J. J. S. (2012). **Análise da estabilidade estática e dinâmica em barras pelo método dos elementos de contorno**. *Dissertação (Mestrado) no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - UFPB*.

Polit, O., Gallim, L. e Vidal, P. (2015). **An analysis of composite beams by means of hierarchical finite elements and a variables separation method**, *Comput. Struct.* 158(1):15-29

Providakis, C.P. e Beskos, D.E. (1986). **Dynamic analysis of beams by the boundary element method**. Comput. Struct. 22:957-967.

Wanji, C. and Zhen, W. (2005). **A New Higher-Order Shear Deformation Theory and Refined Beam Element of Composite Laminates**. Acta Mech. Sinica 21:65–69.

Yuan, F.G.and Miller, R.E. (1989). **A new finite element for laminated composite beams**. Comput. Struct. 31:737-745.