v. 3, n. 28, 2023

Journal of
Engineering
Research

SOBRE UN TIPO DE MATRICES NO SIMÉTRICAS CON VALORES PROPIOS QUE SON ENTEROS POSITIVOS

Francisco Javier Sánchez-Bernabe
UAM Iztapalapa, Departamento de Matemáticas, San Rafael Atlixco, Ciudad de México, Mexico
https://orcid.org/0000-0001-6794-5736

All content in this magazine is licensed under a Creative Commons Attribution License. Attribution-Non-Commercial-Non-Derivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0).

Abstract: A type of nonsymmetric square matrices with real entries, such that they have positive integer eigenvalues are considered. The first given matrix has 6 rows and 6 columns, with three different eigenvalues with double multiplicity. That matrix can be diagonalized. The second matrix has size 8 x 8, with also three different eigenvalues, two of them with double multiplicity, and the other one with multiplicity equal to 4. This matrix can also be diagonalized. However, the third considered matrix, with 10 rows and 10 columns, is not equivalent to a diagonal matrix. That matrix has three eigenvalues, two of them with double multiplicity, and the other one with multiplicity equal to 6. The fourth given matrix, of size 12 x 12, also with three eigenvalues, two of them with double multiplicity, and the other one with multiplicity equal to 8. This matrix can neither be diagonalized. For this last two matrices, its canonical Jordan form is built. Having found a pattern on the multiplicity of eigenvalues, the form of characteristic polynomial of matrix with studied structure, of size 20 x 20 allows to state that this matrix has also positive integer eigenvalues.
Keywords: nonsymmetric matrix, eigenvalues, canonical Jordan form

INTRODUCCIÓN

Dada una matriz cuadrada y simétrica [1] con entradas reales, entonces sus valores propios son números reales [2]. Sin embargo, para matrices cuadradas que no son simétricas, no hay garantía que los valores propios sean números reales. En este trabajo, matrices que no son simétricas con entradas reales, con una estructura específica y con la propiedad de que sus valores propios son enteros positivos son consideradas. Se determinan los valores propios de matrices de tamaño 6 x 6, 8 x 8, 10 x 10 y además 12 x 12, junto con sus correspondientes polinomios característicos [3]. El patrón encontrado en estas cuatro matrices permite concluir que la matriz de tamaño 20 x 20, con el mismo tipo de estructura, también presenta valores propios que son enteros positivos.

$$A_{526} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 1. Matriz de tamaño 6 x 6.

MATRIZ CON 6 RENGLONES Y 6 COLUMNAS

La primera matriz considerada aparece en la Figura 1, en la cual se observa que la diagonal principal está ocupada por elementos iguales a 5, mientras que en la parte superior de la matriz aparece una banda de tres elementos –2. Una franja similar se encuentra en la parte inferior de la matriz. La matriz no es simétrica porque, por ejemplo, la primera entrada de la tercera fila, que es igual a cero, es diferente del tercer elemento del primer renglón, igual a –2. El polinomio característico de la matriz A_{526} está definido por $p_{526}(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)^2 (\lambda - 7)^2$ siendo posible encontrar vectores propios que son linealmente independientes, que formando las columnas de la matriz V_{526} dada por

$$V_{526} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 2. Matriz cuyas columnas son los vectores propios de A_{526}

entonces, si W_{526} es la matriz inversa de V_{526} y si definimos la matriz

$$D_{526} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Figura 3. Matriz en cuya diagonal principal están los valores propios de A_{526}

entonces, obtenemos la igualdad $D_{526} = W_{526}\, A_{526}\, V_{526}$. Por otro lado, una forma de comprobar que el polinomio característico está bien calculado, es verificar que la versión matricial de este polinomio, se anula, es decir que $p_{526}(A_{526}) = (A_{526} - 3\, I_6)^2 (A_{526} - 5\, I_6)^2 (A_{526} - 7\, I_6)^2 = 0_6$. En donde, I_6 es la matriz identidad de tamaño 6 x 6, mientras que 0_6 es la matriz con 6 renglones y 6 columnas, tales que todos sus elementos son iguales a cero. La validez de la igualdad matricial anterior se debe al Teorema de Cayley-Hamilton.

MATRIZ CON 8 RENGLONES Y 8 COLUMNAS

Continuamos con una matriz A_{528} de tamaño 8 x 8, que presenta una estructura similar a la matriz A_{526}. El polinomio característico $p_{528}(\lambda)$ de A_{528} está definido por $p_{528}(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)^4 (\lambda - 7)^2$, en donde se observa que a diferencia de la matriz A_{526}, valor propio $\lambda = 5$ tiene multiplicidad 4, en lugar de 2. Análogamente, también es posible que la matriz denotada por A_{528} sea diagonalizada. Así, definimos por V_{528} la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A_{528}, mientras que W_{528} denotará la matriz inversa de V_{528}

observemos que algunas columnas de V_{526} se parecen a las de V_{528}

$$A_{528} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 4. Matriz con 8 renglones y 8 columnas

el orden en que aparecen columnas de V_{526} se parecen a las de V_{528}

$$V_{528} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Figura 5. Matriz cuyas columnas son los vectores propios de A_{528}

De nuevo, se cumple la igualdad $D_{528} = W_{528}\, A_{528}\, V_{528}$.

$$D_{528} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Figura 6. Matriz en cuya diagonal principal están los valores propios de A_{528}

MATRIZ CON 10 RENGLONES Y 10 COLUMNAS

Enseguida, presentamos una matriz de tamaño 10 x 10 con una estructura análoga a las anteriores.

En la Figura 7 aparece esta matriz denotada por $A_{52\,10}$.

$$A_{5210} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 7. Matriz de tamaño 10 x 10

todas las columnas de la matriz $V_{52\ 10}$ corresponden a valores propios

$$V_{5210} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 8. Matriz cuyas columnas son los vectores propios de $A_{52\ 10}$

de la matriz $A_{52\ 10}$, con excepción de la sexta y octava columnas que satisfacen las igualdades siguientes

$$(A_{52\ 10} - 5\ I_{10})\ w_6 = w_5$$

$$(A_{52\ 10} - 5\ I_{10})\ w_8 = w_7$$

en donde I_{10} es la matriz identidad de tamaño 10 x 10, mientras que w_5, w_6, w_7 y w_8 constituyen la quinta, sexta, séptima y octava columnas, de la

matriz $A_{52\ 10}$. Definamos ahora $J_{52\ 10}$ de la manera siguiente

$$J_{5210} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 9. Matriz definida por la descomposición de Jordan de A_{5210}

ahora, la matriz $V_{52\ 10}$ es invertible y se denotará por $W_{52\ 10}$ su inversa, de manera que obtenemos la decomposición de Jordan [4] siguiente

$$J_{52\ 10} = W_{52\ 10} A_{52\ 10} V_{52\ 10}$$

además, el polinomio característico de $A_{52\ 10}$ está dado por

$$p_{52\ 10}(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)^6 (\lambda - 7)^2$$

MATRIZ CON 12 RENGLONES Y 12 COLUMNAS

Generalizando las matrices anteriones, sea $A_{52\ 12}$ definida por

$$A_{5212} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 10. Matriz con 12 renglones y 12 columnas

similarmente a la matriz de tamaño 10 x 10, la matriz $A_{52\ 12}$ tiene polinomio característico definido por

$$p_{52\ 12}(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)^8 (\lambda - 7)^2$$

de manera que el valor propio $\lambda = 3$ tiene multiplicidad 2, al igual que el valor propio $\lambda = 7$, mientras que el valor propio $\lambda = 5$, tiene multiplicidad igual a 8. Así, todos los valores propios de la matriz $A_{52\ 12}$ son positivos.

$$A_{5220a} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Figura 11. Primer bloque de la matriz $A_{52\ 20}$ de tamaño 20 x 20

MATRIZ CON 20 RENGLONES Y 20 COLUMNAS

Ahora, se construirá por bloques una matriz de tamaño 20 x 20,

$$A_{5220b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 12. Segundo bloque de la matriz $A_{52\ 20}$ de tamaño 20 x 20

cuyo primer bloque aparece en la Figura 11, mientras que el segundo bloque se aprecia en la Figura 12. Enseguida, el tercer bloque $A_{52\ 20c}$ de la matriz $A_{52\ 20}$ se obtiene al transponer el bloque $A_{52\ 20b}$. Es decir, que definimos $A_{52\ 20c} = (A_{52\ 20b})^T$. Por otro lado, el cuarto bloque $A_{52\ 20c}$ de la matriz $A_{52\ 20}$, está dado por $A_{52\ 20d} = (A_{52\ 20a})^T$. Entonces, definimos

$$A_{5220} = \begin{pmatrix} A_{5220a} & A_{5220b} \\ A_{5220c} & A_{5220d} \end{pmatrix}$$

Figura 13. Matriz $A_{52\ 20}$ de tamaño 20 x 20

entonces el polinomio característico de la matriz está $A_{52\ 20}$ dado por

$$p_{52\ 10}(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)^{16} (\lambda - 7)^2$$

lo cual quiere decir que todos sus valores propios son positivos.

CONCLUSIONES

Se han construido matrices no simétricas de orden par, empezando con n = 6, cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 5, mientras que en la parte superior de cada matriz aparece una banda de n/2 elementos iguales a -2. La estructura se complementa con otra banda de n/2 elementos iguales a -2, en la parte inferior de la matriz. Las dos primeras matrices consideradas, de orden n = 6 y n = 8, pueden diagonalizarse, teniendo los valores propios $\lambda = 3$ y $\lambda = 7$, con multiplicidad doble, mientras que el valor propio $\lambda = 5$ tiene multiplicidad 2 y 4, respectivamente.

Por lo que respecta a los matrices con orden $n = 10$ y $n = 12$, no pueden diagonalizarse, pero a partir de su polinomio característico se deduce que los valores propios también son enteros positivos. Finalmente, al considerar, una matriz de orden $n = 20$, con una estructura análoga, puede deducirse el tipo de polinomio característico correspondiente y por lo tanto concluir que todos los valores propios, también son números enteros positivos. Debido a razones de índole práctico, la matriz de orden $n = 20$, se construyó a partir de cuatro bloques de orden $n = 10$. Es posible concatenar los bloques para obtener matrices, mediante Matlab [5] ó utilizando una versión libre conocida como Octave. Los ejemplos presentados nos permiten deducir que matrices de orden mayor, con una estructura análoga a la estudiada, también tendrán valores propios que son números enteros positivos.

REFERENCIAS

[1] Arroyo Paniagua M J y Bromberg Silverstein S T (2021) Álgebra Lineal. *Editorial **Trillas**. México*.

[2] Strang G. (2023) Introduction to Linear Algebra. Sixth Edition, Wellesly-Cambridge Press.

[3] Lay D C (2018) Linear Algebra and its Applications. Pearson

[4] Roman S (2008) Advanced Linear Algebra Third Edit. Springer, New York

[5] Attaway D (2022) Matlab: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving. Amazon Sevices LLC