CAPÍTULO 3

EL ESPACIO DISTRIBUCIONAL PERIÓDICO L^2 ([–π, π]) COMO COMPLETAMIENTO DEL ESPACIO P

Data de aceite: 02/08/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este trabajo estudiamos el espacio distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$ como completamiento del espacio P de funciones infinitamente diferenciables y periódicas con periodo 2π. Probamos importantes resultados y su conexión con $l^2(Z)$, mediante la transformada de Fourier. Tratamos inmersiones continuas y densas de algunos subespacios de P^j.
Finalmente, damos algunos comentarios y aplicaciones.
PALABRAS CLAVE: Transformada de Fourier, espacio de Hilbert, espacio distribucional periódico, inmersiones continuas, existencia de solución.

THE $L^2([-\pi, \pi])$ PERIODIC DISTRIBUTIONAL SPACE AS COMPLETEMENT FROM *P* SPACE

ABSTRACT: In this work we study the $L^2([-\pi, \pi])$ periodic distributional space as completement from infinitely differentiable and periodic functions P space with period 2π. We prove important results and its connection with $l^2(Z)$, through the Fourier transform. We treat continuous and dense immersions of some subspaces of P^j.
Finally, we give some comments and applications.
KEYWORDS: Fourier transform, Hilbert space, periodic distributional space, continuous immersions, existence of solution.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos al espacio distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$, como completamiento del espacio P de las funciones infinitamente diferenciables y periódicas con periodo 2π. Probaremos que este espacio infinito dimensional es un es- pacio de Hilbert. Este espacio es importante pues al ser de Hilbert permitirá generar una familia de espacios infinito dimensionales de Hilbert, conocidos como los espacios de Sobolev periódicos: $\left\{H^s_{per}\right\}_{s\in\mathbb{R}}$. Para visualizar esto citamos Iorio [1] y Santiago [8]. Estos espacios son útiles en el análisis de existencia de solución de ecuaciones diferenciales, citamos [1], [2], [3], [4], [5], [6] y [9].

Probaremos en detalle que $L^2([-\pi, \pi])$ está completamente caracterizado con $l^2(\mathbb{Z})$ v´ıa la Teor´ıa de Fourier y también se obtendr´a inmersiones estrictas, continuas y densas de algunos subespacios de P^j.

Como referencia para este estudio citamos a Iorio [1].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en cinco subsecciones. Así, en la subsección 3.1 probamos que P es normado con $\|\cdot\|_2$ pero no completo. En la subsección 3.2, estudiamos las sucesiones de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ versus convergencias en P^j. En la subsección 3.3, introducimos un subespacio distribucional periódico y probaremos que este es un espacio de Hilbert. En la subsección 3.4, estudiaremos la caracterización de $L^2([-\pi, \pi])$ vía la transformada de Fourier. En la subsección 3.5, estudiaremos a la distribución Delta de Dirac e inmersiones continuas y densas de subespacios.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2 | METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

Definición 2.1 *Sea*

$$P := C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi]),$$

el espacio de las funciones $f : IR \to \mathbb{C}$ *infinitamente diferenciable y periódica con periodo* 2π.

Ahora, introducimos lo siguiente.

Definición 2.2 *Definimos la aplicación*

$$\begin{aligned} d : P \times P &\to [0, +\infty) \\ (f, g) &\to d(f, g), \end{aligned}$$

donde

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\|f^k - g^k\|_\infty}{1 + \|f^k - g^k\|_\infty} \right)$$

aquí, estamos denotando por $f^0 := f$ y f^n representa la derivada de f de orden n o simplemente la n-ésima derivada de f. También, estamos usando $\|F\|_\infty := \max_{x\in[-\pi,\pi]} |F(x)|$, $\forall F \in P$.

Así, el par (P, d) es un espacio métrico completo y además la métrica d no viene de una norma.

También,

$$P^j := \{T : P \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineal tal que } \exists \psi_n \in P \text{ y}$$

$$< T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\, dx\,, \forall \varphi \in P \Big\}$$

$$= \quad (P)'\,.$$

Esto es, P^j es el dual topológico de P . Así, P^j es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

Definición 2.3 *Denotamos por $S(\mathbb{Z})$ al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por*

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\,,\ \alpha_k \in \mathbb{C} \,/\, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \ y \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty \ , \ \forall n \geq 1 \right\}$$

y $S^j(\mathbb{Z})$ es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por $S^j(\mathbb{Z}) := \{\alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\,,\ \alpha_k \in \mathbb{C} \,/\, \exists\ C > 0\,,\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ *con* $|\alpha_k| \leq C|k|^N\,,\ \forall k \neq 0\}$.

Para ver propiedades de P , P^j, $S(\mathbb{Z})$ y $S^j(\mathbb{Z})$ citamos [1].

3 | PRINCIPALES RESULTADOS

Sabemos que P es un espacio métrico completo. A seguir veremos que este espacio vectorial llega a ser normado pero no completo. Así, determinaremos el espacio completo donde se sumerge de modo denso.

3.1 P es normado con $\|\cdot\|_2$ pero no completo

Definición 3.1 *Definimos la siguiente aplicación:*

$\|\cdot\|_2 : P \to \mathbb{R}$

$$f \to \|f\|_2 := \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

que está bien definida desde que $f \in C([-\pi, \pi])$ y además satisface:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \\
&\leq \left[\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|\right]^2 \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= 2\pi\|f\|_\infty^2 .
\end{aligned}
$$

Así, hemos probado:

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_\infty\ ,\ \forall f\in P\ . \tag{3.1}$$

Proposición 3.1 *La aplicacion* $\|\cdot\|_2$ *satisface en P:*

1. $\|\varphi\|_2 \geq 0$, $\forall\varphi\in P$.

2. $\|\alpha\varphi\|_2 = |\alpha|\|\varphi\|_2$, $\forall\varphi\in P$ *y* $\forall\alpha\in\not\subset$.

3. $\varphi = 0$ *si y solo si* $\|\varphi\|_2 = 0$.

Prueba.- En efecto, la aplicación $\|\cdot\|_2$ satisface:

1. Esto se obtiene desde que $|\varphi|^2\geq 0$ y la integral mantiene la desigualdad.
2. Se consigue esto debido a la linealidad de la integral.
3. Es evidente que si $\varphi = 0$ entonces $\|\varphi\|_2 = 0$. Ahora, probaremos que si $\|\varphi\|_2 = 0$ entonces $\varphi = 0$. En efecto, si $\|\varphi\|_2 = 0$ entonces $\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|^2dx = 0$ y como $|\varphi|^2\geq 0$ y continua, obtenemos $|\varphi(x)|^2 = 0$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$, i.e. $\varphi(x) = 0$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$, i.e. $\varphi = 0$ en P .

Proposición 3.2 (La Desigualdad de Hölder) ***Si*** $\varphi,\psi\in P$ ***entonces***

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)\psi(x)|\ dx \leq \|\varphi\|_2\|\psi\|_2\ . \tag{3.2}$$

Prueba.- Si $\varphi = 0$ o $\psi = 0$, se cumple (3.2). Supongamos que $\|\varphi\|_2 > 0$ y $\|\psi\|_2 > 0$. Usando que $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ tenemos

$$\frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_2}\frac{|\psi(x)|}{\|\psi\|_2} \leq \frac{1}{2}\frac{|\varphi(x)|^2}{\|\varphi\|_2^2} + \frac{1}{2}\frac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|_2^2}\,. \tag{3.3}$$

Integrando la desigualdad (3.3), obtenemos

$$\frac{1}{\|\varphi\|_2\|\psi\|_2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)\psi(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 \ = \ 0\,. \tag{3.4}$$

De (3.4) se concluye.

Proposición 3.3 (La Desigualdad de Minkowski)

$$\|\varphi + \psi\|_2 \leq \|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2 \ , \ \forall \varphi, \psi \in P . \tag{3.5}$$

Prueba.- Si $\varphi = 0$ o $\psi = 0$, se cumple (3.5). Supongamos que $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$. *Sea* $x \in [-\pi, \pi]$, usando la desigualdad triangular del modulo tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(x) + \psi(x)|^2 &= |\varphi(x) + \psi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \\ &\leq \{|\varphi(x)| + |\psi(x)|\}|\varphi(x) + \psi(x)| \\ &= |\varphi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| + |\psi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Integrando (3.6) y usando la desigualdad de Hölder en los dos términos del lado derecho de (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) + \psi(x)|^2 \, dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \, dx \\ &\leq \|\varphi\|_2 \|\varphi + \psi\|_2 + \|\psi\|_2 \|\varphi + \psi\|_2 \\ &= \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\} \|\varphi + \psi\|_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.7) se tiene Esto es,

$$\|\varphi + \psi\|_2^2 \leq \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\}\|\varphi + \psi\|_2 \ .$$

Esto es,

$$\|\varphi + \psi\|_2 \left(\|\varphi + \psi\|_2 - \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\}\right) \leq 0 \ ,$$

de donde concluimos $\|\varphi + \psi\|_2 - \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\} \leq 0$.

Proposición 3.4 *Se satisface* $|\|\varphi\|_2 - \|\psi\|_2| \leq \|\varphi - \psi\|_2, \forall \varphi, \psi \in P$.

Prueba.- Sale de usar la desigualdad de Minkowski.

Proposición 3.5 *La aplicación* $\| \cdot \|_2$ *es una norma en el* ₵ *- espacio vectorial P.*

Prueba.- Se sigue de la Proposición 3.1 y desigualdad de Minkowski: Proposición 3.3.

Así, hemos probado que $(P, \| \cdot \|_2)$ es un ₵ - espacio normado.

Proposición 3.6 *El espacio normado* $(P, \| \cdot \|_2)$ *no es completo.*

Prueba.- Aquí, evidenciamos a una sucesión de Cauchy en P con norma $\| \cdot \|_2$, que no es convergente en P . Para esto, definimos la función

$$H(x) := \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & \pi < x \leq 2\pi \\ H(x+2\pi) = H(x)\,, & \forall x \in I\!R\,. \end{cases}$$

Se observa que H es periódica y de periodo 2π y que H no es continua en $\{k\pi\}_{k\in}Z$. Así, $H \notin C_{per}([-\pi, \pi])$, y por consiguiente $H \notin P$.

Ahora, a partir de H definimos T_H:

$$< T_H, \varphi > := \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\pi} \varphi(x)dx\,,\ \forall \varphi \in P\,.$$

Evidentemente $T_H : P \to ¢$ es $¢$ -lineal, desde que la integral es lineal.

Para cada $n \in IN$, definimos:

$$\psi_n(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{nx}e^{\frac{-1}{1-nx}}} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq \pi \\ e^{\frac{-1}{1-n(x-\pi)}e^{\frac{-1}{n(x-\pi)}}} & \pi < x < \pi + \frac{1}{n} \\ 0 & \pi + \frac{1}{n} \leq x \leq 2\pi \\ \psi_n(x+2\pi) = \psi_n(x)\,, & \forall x \in I\!R\,. \end{cases}$$

Así, ψ_n satisface:

1. $\psi_n \in P$, $\forall_n \in IN$.
2. $0 \leq \psi_n(x) \leq 1$, $\forall x \in IR$.
3. $\psi_n(x) \to H(x)$ cuando $n \to +\infty$, $\forall x \in IR$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi n\,(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\pi}\ \varphi(x)dx$.
5. $T_H \in P'$ y $T\psi_n \xrightarrow{P'} T_H$.

Ahora, nos interesa probar que

$$\|\psi_n - H\|_2 \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty\,. \qquad (3.8)$$

Antes de probar (3.8) queremos indicar que de (3.8) se deducen rápidamente:

1. La sucesión (ψ_n) es de Cauchy en P con norma $\|\cdot\|_2$.

2. $P \ni \psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} H \notin P$.

3. $T_H \in L^2([-\pi, \pi])$ y $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} T_H$, donde el espacio $(L^2([-\pi, \pi]), |||\cdot|||_2)$ será introducido más adelante.

Ahora demostraremos (3.8):

$$
\begin{aligned}
\|\psi_n - H\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n(x) - H(x)|^2\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{-\pi+\frac{1}{n}} \left| e^{\frac{-1}{1-n(x-\pi)}} e^{\frac{-1}{n(x-\pi)}} \right|^2 dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \left| e^{\frac{-1}{nx}} e^{\frac{-1}{1-nx}} - 1 \right|^2 dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\pi+\frac{1}{n}} dx + 4 \int_0^{\frac{1}{n}} dx \longrightarrow 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

cuando $n \to +\infty$.

Observación 3.1 *Los resultados obtenidos: desigualdad (3.1), Proposiciones: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 son también válidos en* $C_{per}([-\pi, \pi])$.

3.2 Sucesiones de Cauchy en *P* versus convergencias en *P'*

Lema 3.1 *Si* (φ_n) *es una sucesion de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$. *Entonces* $\exists f \in P'$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *cuando* $n \to +\infty$ *(i.e.* $< T_{\varphi n}, \varphi > \to < f, \varphi >$ *cuando* $n \to +\infty$, $\forall \varphi \in P$*), donde* $< T_{\varphi n}, \varphi > = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\varphi(x)\, dx$.

Prueba.- Como $\varphi_n \in P$ entonces $T_{\varphi n} \in P'$. Sea $\varphi \in P$ arbitrario, afirmamos que $(< T_{\varphi n}, \varphi >)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$. En efecto, usando la Desigualdad de Hölder tenemos

$$
\begin{aligned}
| < T_{\varphi_n}, \varphi > - < T_{\varphi_m}, \varphi > | &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - \varphi_m(x))\varphi(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)||\varphi(x)|\, dx \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \|\varphi\|_2 \longrightarrow 0 \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

cuando $n, m \to +\infty$. Desde que $\mathbb{C}$ es completo, la sucesión $(< T_{\varphi n}, \varphi >)_{n=1}^{\infty}$ es convergente para cada $\varphi \in P$, luego

$$
\exists \lim_{n\to+\infty} < T_{\varphi_n}, \varphi >= \mathcal{X}_\varphi .
$$

Definimos

$$
\begin{aligned}
f &: P \to \mathbb{C} \\
\varphi &\to < f, \varphi >: = \chi_\varphi .
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $f \in P'$. En efecto, como fue definida vale:

$$
< f, \varphi >:= \mathcal{X}_\varphi = \lim_{n\to+\infty} < T_{\varphi_n}, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\varphi(x)\, dx . \qquad (3.10)
$$

Resta probar que f es $\mathbb{C}$ -lineal. En efecto, sean φ_1 y φ_2 elementos arbitrarios de P y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\begin{aligned} < f, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 > &= \lim_{n\to+\infty} < T_{\varphi_n}, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 > \\ &= \lim_{n\to+\infty} \{< T_{\varphi_n}, \varphi_1 > +\alpha < T_{\varphi_n}, \varphi_2 >\} \\ &= \mathcal{X}_{\varphi_1} + \alpha\mathcal{X}_{\varphi_2} \\ &= < f, \varphi_1 > +\alpha < f, \varphi_2 > . \end{aligned}$$

Proposición 3.7 *Sean* (φ_n) *y* (ψ_n) *sucesiones de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$. *Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y* $\psi_n \xrightarrow{P'} f$ *cuando* $n \to +\infty$.
2. $\|\varphi_n - \psi_n\|_2 \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$.

Prueba.- Primero probaremos que 2) implia 1). De la hipótesis, tenemos que

$$\exists f \in P' \text{ tal que } \varphi_n \xrightarrow{P'} f$$
$$\exists g \in P' \text{ tal que } \psi \xrightarrow{P'} g\,,$$

luego $\varphi_n - \psi_n \xrightarrow{P'} f - g$. Así, probaremos que $f = g$. Esto es, basta demostrar que $\varphi_n - \psi_n \xrightarrow{P'} 0$ (i.e. $< \varphi_n - \psi_n, \varphi > \to 0$ cuando $n \to +\infty$). En efecto, usando la Desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} |< \varphi_n - \psi_n, \varphi >| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_n(x) - \psi_n(x)\}\varphi(x)\,dx \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \psi_n(x)||\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|\varphi_n - \psi_n\|_2\|\varphi\|_2 \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Así, $< f - g, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in P$. Esto es, $f = g$ en P'. Recíprocamente, sabemos que $\exists f \in P'$ tal que .

$$\varphi_n \xrightarrow{P'} f \text{ (i.e. } < \varphi_n, \varphi > \to < f, \varphi >, \forall \varphi \in P)$$
$$\psi_n \xrightarrow{P'} f \text{ (i.e. } < \psi_n, \psi > \to < f, \psi >, \forall \psi \in P)$$

Ahora, definimos

$$\theta_n := \varphi_n - \psi_n \in P\,.$$

Afirmamos que $\theta_n \xrightarrow{P'} 0$ (i.e. $\forall \varphi \in P$, $<\theta_n, \varphi> \to 0$ cuando $n \to +\infty$). En efecto, esto es evidente pues

$$
\begin{aligned}
|<\theta_n, \varphi>| &= |<\varphi_n - \psi_n, \varphi>| \\
&= |<\varphi_n, \varphi> - <\psi_n, \varphi> \pm <f, \varphi>| \\
&\leq |<\varphi_n, \varphi> - <f, \varphi>| + |<f, \varphi> - <\psi_n, \varphi>| \to 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

cuando $n \to +\infty$.

También, afirmamos que (θ_n) es una sucesión de Cauchy con la norma $\| \cdot \|_2$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|\theta_n - \theta_m\|_2 &= \|\varphi_n - \psi_n - (\varphi_m - \psi_m)\|_2 \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 + \|\psi_m - \psi_n\|_2 \to 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

cuando $n, m \to +\infty$.

Ahora, como la sucesión (θ_n) es de Cauchy con la norma $\| \cdot \|_2$, tenemos dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in I\!N$ tal que $\|\theta_n - \theta_m\| < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$. (3.11)

Sea $m \geq N$, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 \leq ||\theta_m||_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_m(x)}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)(\overline{\theta_m(x)} - \overline{\theta_n(x)})\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_n(x)}\,dx \\
&= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)(\overline{\theta_m(x)} - \overline{\theta_n(x)})\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_n(x)}\,dx\right| \\
&\leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)(\overline{\theta_m(x)} - \overline{\theta_n(x)})\,dx\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_n(x)}\,dx\right| \\
&\leq ||\theta_m||_2||\theta_m - \theta_n||_2 + \left|\overline{\int_{-\pi}^{\pi} \theta_n(x)\overline{\theta_m(x)}dx}\right| \\
&< \epsilon||\theta_m||_2 + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \theta_n(x)\overline{\theta_m(x)}\,dx\right| \\
&< \epsilon||\theta_m||_2 + |<\theta_n, \overline{\theta_m}>|\,. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Fijando el m y haciendo tender n al infinito, de la primera afirmación obtenemos que $<\theta_n, \overline{\theta_m}>$ tiende a cero y por consiguiente $|<\theta_n, \overline{\theta_m}>|$ también tiende a cero. Así, de (3.12) tenemos

$$\|\theta_m\|_2^2 < \epsilon\|\theta_m\|_2\,,\ \forall m \geq N\,.$$

i.e.

$$\|\theta_m\|_2(\|\theta_m\|_2 - \epsilon) < 0\,.$$

Entonces $\|\theta_m\|_2 - \epsilon < 0$, i.e. Dado $\epsilon > 0$, $\|\theta_m\|_2 < \epsilon$ para todo $m \geq N$, esto nos permite concluir que $\theta_m \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$ cuando $m \to +\infty$.

3.3 $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert

Ahora introducimos el siguiente conjunto en P^j.

Definición 3.2

$L^2([-\pi, \pi]) := \{f \in P^j,\ \exists(\varphi_n)$ *sucesión de Cauchy en* P *con* $\|\cdot\|_2$ *y* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f\} \subset P^j$

Proposición 3.8 $L^2([-\pi, \pi])$ *es un* $\mathbb{C}$ *- espacio vectorial.*

Prueba.- En efecto, sean $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, probaremos que $f + g \in L^2([-\pi, \pi])$ y que $\alpha f \in L^2([-\pi, \pi])\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$. Así, tenemos que

$\exists(\varphi_n)$ sucesión de Cauchy en P con la norma $\|\cdot\|_2$ y $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ (3.13)

$\exists(\psi_n)$ sucesión de Cauchy en P con la norma $\|\cdot\|_2$ y $\psi_n \xrightarrow{P'} g$. (3.14)

Usando la desigualdad triangular de $\|\cdot\|_2$ obtenemos

$$\|(\varphi_n + \psi_n) - (\varphi_m + \psi_m)\|_2 \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 + \|\psi_n - \psi_m\|_2$$

y haciendo $n, m \to +\infty$ tenemos que $(\varphi_n + \psi_n)_n$ es una sucesion de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$. También, como

$$< T_{\varphi n}, \varphi > \to < f, \varphi >, \forall \varphi \in P \quad (3.15)$$

$$< T_{\psi n}, \varphi > \to < g, \varphi >, \forall \varphi \in P \quad (3.16)$$

entonces

$$\begin{aligned} < T_{\varphi_n+\psi_n}, \varphi > &= < T_{\varphi_n} + T_{\psi_n}, \varphi > \\ &= < T_{\varphi_n}, \varphi > + < T_{\psi_n}, \varphi > \\ & \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \\ & \qquad < f, \varphi > \ + \ < g, \varphi > = < f + g, \varphi > \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, $\forall \varphi \in P$. Esto es,

$$\varphi_n + \psi_n \xrightarrow{P'} f + g.$$

Fácilmente, para $\alpha \in \mathbb{C}$ la sucesión $(\alpha_{\varphi n})_n$ es de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$, pues

$$\|\alpha\varphi_n - \alpha\varphi_m\|_2 = |\alpha| \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$$

y haciendo $n, m \to +\infty$ tenemos que $(\alpha_{\varphi n})_n$ es una sucesión de Cauchy en P con norma $\| \cdot \|_2$.

También,

$$< T_{\alpha\varphi n}, \varphi > = < \alpha T_{\varphi n}, \varphi > = \alpha < T_{\varphi n}, \varphi > \to \alpha < f, \varphi > = < \alpha f, \varphi >$$

cuando $n \to +\infty$, $\forall \varphi \in P$. Esto es,

$$\alpha_{\varphi n} \xrightarrow{P'} \alpha f \,, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \,.$$

Proposición 3.9 *Si (φ_n) es una sucesion de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$ entonces*

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n\|_2 \,.$$

Prueba.- Como

$$| \|\varphi_n\|_2 - \|\varphi_m\|_2 | \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$$

entonces $(\|\varphi_n\|_2)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y desde que $\mathbb{C}$ es completo se tiene que la sucesión $(\|\varphi_n\|_2)_n$ es convergente.

Observacion 3.2 *La proposicion 3.9 también es válida para sucesiones de Cauchy en $C_{per}([-\pi, \pi])$ con $\| \cdot \|_2$.*

Proposición 3.10 *Si (φ_n) y (ψ_n) son sucesiones de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ entonces*

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx \,.$$

Prueba.- Usando la desigualdad de Hölder y la proposición 3.9, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\overline{\psi_m(x)}\, dx \right| \\
&\quad = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_n(x)(\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_m(x)}) + (\varphi_n(x) - \varphi_m(x))\overline{\psi_m(x)}\}\, dx \right| \\
&\quad \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)(\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_m(x)})\, dx \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - \varphi_m(x))\overline{\psi_m(x)}\, dx \right| \\
&\quad \leq \|\varphi_n\|_2 \|\psi_n - \psi_m\|_2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \|\psi_m\|_2 \\
&\quad \leq C_1 \|\psi_n - \psi_m\|_2 + C_2 \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

cuando $n, m \to +\infty$; luego $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx\right)_n$ es una sucesión de Cauchy en ₵, y desde que ₵ es completo se tiene que la sucesión $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx\right)_n$ es convergente en ₵ .

La siguiente observación es una consecuencia inmediata de la proposición 3.10.

Observación 3.3 *Si f, g* $\in L^2([-\pi, \pi])$ *(i.e.* $\exists(\varphi_n)$ *sucesión de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *verificando* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y* $\exists(\psi_n)$ *sucesión de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *satisfaciendo* $\psi_n \xrightarrow{P'} g$*), entonces*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx\,.$$

Proposición 3.11 *Si f, g* $\in L^2([-\pi, \pi])$ *(i.e.* $\exists(\varphi_n)$ *sucesion de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *verificando* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y* $\exists(\psi_n)$ *sucesión de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *satisfaciendo* $\psi_n \xrightarrow{P'} g$*), entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^*(x)\overline{\psi_n^*(x)}\,dx\,.$$

siempre que $\varphi_n^* \xrightarrow{P'} f$ *y* $\psi_n^* \xrightarrow{P'} g$*, con* (φ_n^*) *y* (ψ_n^*) *sucesiones de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *. Así,*

"El valor del límite es independiente de la sucesión de Cauchy considerada".

Prueba.- En efecto, usando la desigualdad de Hölder, la acotación de las sucesiones de Cauchy en $\|\cdot\|_2$ y las proposiciones 3.9 y 3.7, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^*(x)\overline{\psi_n^*(x)}\,dx\right| \\
&\quad= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left\{\varphi_n(x)\{\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_n^*(x)}\} + \{\varphi_n(x) - \varphi_n^*(x)\}\overline{\psi_n^*(x)}\right\}\,dx\right| \\
&\quad\le \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\{\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_n^*(x)}\}\,dx\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_n(x) - \varphi_n^*(x)\}\overline{\psi_n^*(x)}\,dx\right| \\
&\quad\le \|\varphi_n\|_2\|\psi_n - \psi_n^*\|_2 + \|\varphi_n - \varphi_n^*\|_2\|\psi_n^*\|_2 \\
&\quad\le C_1\|\psi_n - \psi_n^*\|_2 + C_3\|\varphi_n - \varphi_n^*\|_2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Ahora, estamos listos para introducir la siguiente definición.

Definición 3.3 *Sean f, g* $\in L^2([-\pi, \pi])$ *(i.e.* $\exists(\varphi_n)$ *sucesion de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *verificando* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y* $\exists(\psi_n)$ *sucesión de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *satisfaciendo* $\psi_n \xrightarrow{P'} g$*) podemos definir*

$$(f, g) := \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx\,.$$

Por los resultados previos vemos que el número (f, g) existe y es independiente de las sucesiones de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$, consideradas para f y g.

Proposición 3.12 *La aplicacion* $(\cdot,\cdot)$ *es un producto interno en el* $\mathbb{C}$ *-espacio vectorial* $L^2([-\pi, \pi])$.

Prueba.- En efecto, fácilmente verificamos

1. $(f_1 + \lambda f_2, g) = (f_1, g) + \lambda(f_2, g)$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f_1, f_2, g \in L^2([-\pi, \pi])$.
2. $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$, $\forall f, g_1, g_2 \in L^2([-\pi, \pi])$.
3. $(f, \lambda g) = \overline{\lambda}(f, g)$, $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f, g \in L^2([-\pi, \pi])$.

También, obtenemos

$$\begin{aligned}
\overline{(g, f)} &= \overline{\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_n(x)}\varphi_n(x)\, dx \\
&= (f, g)\,.
\end{aligned}$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned}
(f, f) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2\, dx \;\geq\; 0\,.
\end{aligned}$$

Ahora, probaremos que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$ con $(f, f) = 0$ implica $f = 0$. En efecto, sea (φ_n) una sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$, tenemos

$$0 = (f, f) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2\, dx = \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2^2\,.$$

Luego, $\|\varphi_n\|_2 \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Sea $\varphi \in P$,

$$\begin{aligned}
0 \leq |< f, \varphi >| &\leq |< f, \varphi > - < T_{\varphi n}, \varphi >| + |< T_{\varphi n}, \varphi >| \\
&\leq |< f, \varphi > - < T_{\varphi n}, - >| + \|\varphi_n\|_2\|\varphi\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

cuando, $n \to +\infty$.

Así, $< f, \varphi > = 0$, $\forall\varphi \in P$, i.e. $f = 0$ en P^j.

A seguir probaremos que si $f = 0$ en $L^2([-\pi, \pi])$ entonces $(f, f) = 0$. En efecto, existe (φ_n) sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$, i.e.

$$< \varphi_n, \varphi > \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty \,, \ \forall \varphi \in P \,. \tag{3.17}$$

Sabemos que para la sucesión (φ_n) se verifica que $\exists \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2 = M$, por lo tanto $\exists \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2^2 = M^2$, desde que $|\|\varphi_n\|_2^2 - M^2| = |(\|\varphi_n\|_2 - M)(\|\varphi_n\|_2 + M)| \leq |\|\varphi_n\|_2 - M|(C + M)$.

Afirmamos que $M = 0$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe N_2 tal que

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 < \frac{\epsilon}{2C} \,, \ \forall n, m \geq N_2 \,. \tag{3.18}$$

De (3.17) para $\varphi := \overline{\varphi_N}$, con $N \geq N_2$ fijado, existe $N_1 > 0$ tal que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_N(x)}\, dx \right| = | < \varphi_n, \overline{\varphi_N} > | < \frac{\epsilon}{2} \,, \ \forall n \geq N_1 \,. \tag{3.19}$$

Para $n \geq N_3 := \max\{N_1, N_2\}$, usando (3.18) y (3.19) tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\{\overline{\varphi_n(x)} - \overline{\varphi_N(x)}\}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_N(x)}\, dx \\ &\leq \|\varphi_n\|_2 \|\varphi_n - \varphi_N\|_2 + | < \varphi_n, \overline{\varphi_N} > | \\ &< C\frac{\epsilon}{2C} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \,. \end{aligned}$$

Así, $\|\varphi_n\|_2^2 \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Luego $\|\varphi_n\|_2 \to 0$, cuando $n \to +\infty$, i.e. $M = 0$ y $(f, f) = M^2 = 0$.

Observacion 3.4 *El producto interno* $(\cdot, \cdot)$ *en* $L^2([-\pi, \pi])$ *induce una norma, que denotaremos por* $|\|\cdot\||_2$, *así, en dicho espacio se tiene*

$$|\|f\||_2 := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2^2} = \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2 \,, \quad \textit{para } f \in L^2([-\pi, \pi]) \,,$$

donde (φ_n) *es una sucesión de Cauchy en* P *con* $\|\cdot\|$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$.

Previamente, antes de probar que $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert queremos introducir tres importantes resultados:

Proposición 3.13 *Se verifica las siguientes inclusiones*

$$P \subset C_{per}([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi]) \subset P'$$

Prueba.- En efecto, si $\varphi \in C_{per}([-\pi, \pi])$, entonces

$$P \ni S_n(\varphi) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \varphi. \tag{3.20}$$

Afirmamos que $T_{Sn}(\varphi) \xrightarrow{P'} T_\varphi$. En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} S_n(\varphi)(x)\psi(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(\varphi)(x) - \varphi(x)||\psi(x)|\,dx \\ &\leq \|S_n(\varphi) - \varphi\|_2\|\psi\|_2 \to 0 \qquad (3.21)\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Así, de (3.20) y (3.21) se tiene que la sucesión $(S_n(\varphi))_n$ es de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$ y $T_{Sn(\varphi)} \xrightarrow{P'} T_\varphi$. Luego, $T_\varphi \in L([-\pi, \pi])$.

Ahora, desde que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T : C_{per}([-\pi, \pi]) &\to L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi &\to T_\varphi \end{aligned}$$

es inyectiva, concluimos que

$$C_{per}([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi]) .$$

Las otras dos inclusiones son evidentes.

Ahora, queremos rescatar lo siguiente

Observación 3.5 *La aplicación*

$$\begin{aligned} T : C_{per}([-\pi, \pi]) &\to L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi &\to T_\varphi \end{aligned}$$

es lineal, inyectiva y continua.

Observación 3.6 $\forall \varphi \in C_{per}([-\pi, \pi])$ *vale:*

$$|||T_\varphi|||_2 = \lim_{n\to+\infty} \|S_n(\varphi)\|_2 = \|\varphi\|_2 \,,$$

que es lo mismo decir que $||| \cdot |||_2$ *reestricto a* $C_{per}([-\pi, \pi])$ *es* $\| \cdot \|_2$, *que denotamos por*

$$||| \cdot |||_2 \,|C_{per}([-\pi,\pi]) = \| \cdot \|_2 \,,$$

y por consiguiente también vale que $|||\cdot|||_2$ *reestricto a P es* $\|\cdot\|_2$*, esto es,*

$$|||\cdot|||_2\,|_P = \|\cdot\|_2\ .$$

Proposición 3.14 *Sea* φ_n *una sucesion de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$*, entonces* $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *.*

Prueba.- En efecto, sea n fijo, tenemos

$$|||T_\varphi n - f|||_2 := \lim_{n\to+\infty} \|S_m(\varphi_n) - \varphi_m\|_2\ ,$$

y tomando límite a la desigualdad:

$$\|S_m(\varphi_n) - \varphi_m\|_2 \leq \|S_m(\varphi_n) - \varphi_n\|_2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$$

cuando n, m tienden a $+\infty$, concluimos.

Proposición 3.15 *Sea* φ_n *una sucesion de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$*. Si f es una función (seccionalmente continua o continua, por ejemplo) periódica, entonces* $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *.*

Prueba.- En efecto, supongamos que f es continua periódica, siguiendo las ideas de la prueba de la proposición 3.7 conseguiremos probarlo.

Afirmamos que $\varphi_n - f$ es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_2$. En efecto,

$$\|(\varphi_n - f) - (\varphi_m - f)\|_2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \to 0$$

cuando $n, m \to +\infty$.

Ahora como $\varphi_n - f$ es una sucesión de Cauchy en $C_{per}([-\pi, \pi])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ tenemos

dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in IN$ tal que $\|(\varphi_n - f) - (\varphi_m - f)\|_2 < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$. (3.22)

Sea $m \geq N$,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|\varphi_m - f\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_m(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) \pm (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) - (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \\
&= \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) - (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \Big| \\
&\leq \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) - (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \Big| \\
&\quad + \Big| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\, dx \Big| \\
&\leq \|(\varphi_m - f) - (\varphi_n - f)\|_2 \|\varphi_m - f\|_2 + | < \varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f} > | \\
&< \epsilon \|\varphi_m - f\|_2 + | < \varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f} > | . \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Fijando m y haciendo tender n al infinito, tenemos que $< \varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f} >$ tiende a cero y por consiguiente $| < \varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f} > |$ también tiende a cero. Así de (3.23) tenemos

$$0 \leq \|\varphi_m - f\|_2^2 < \epsilon \|\varphi_m - f\|_2 \ , \ \forall m \geq N$$

i.e. $\|\varphi_m - f\|_2(\|\varphi_m - f\|_2 - \epsilon) < 0$.

Entonces $\|\varphi_m - f\|_2 - \epsilon < 0$. Esto es, dado $\epsilon > 0$, $\|\varphi_m - f\|_2 < \epsilon \ \forall m \geq N$. Esto nos permite cocluir que $\varphi_m - f \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$ cuando $m \to +\infty$.

Proposición 3.16 $L^2([-\pi, \pi])$ *es un* ₵- *espacio de Hilbert.*

Prueba.- Ya probamos que $L^2([-\pi, \pi])$ es un ₵ - espacio vectorial con producto interno. Ahora probaremos que $L^2([-\pi, \pi])$ es completo. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^2([-\pi, \pi])$ con $||| \cdot |||_2$.

Para cada f_n existe una sucesión φ_{nm} sucesión de Cauchy en P con la norma $\| \cdot \|_2$ tal que $\varphi_{nm} \xrightarrow{P'} f_n$, cuando $m \to +\infty$ entonces $\varphi_{nm} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f_n$, cuando $m \to +\infty$.

Así, dado $\epsilon_1 = 1$, existe N_1 tal que $|||\varphi_{1m} - f_1|||_2 < \frac{1}{j}$, $\forall m \geq N_1$. Luego escojo um m de esa familia no acotada, denotandolo como m_1^* y fijandolo. Ahora denoto a $\varphi_{1m_1^*}$ como ψ_1 y tenemos que

$$\exists \psi_1 \in P \text{ tal que } |||f_1 - \psi_1|||_2 < 1 \ .$$

Así, procedemos, dado $\epsilon_j = \frac{1}{j}$, existe N_j tal que $|||\varphi_{jm} - f_j|||_2 < \frac{1}{j}$ $\forall m \geq N_j$. Luego escojo um m de esa familia no acotada, denotandolo como m_j^* y fijandolo. Así, es conveniente denotar a $\varphi_{jm_j^*}$ como ψ_j. Luego, tenemos que

$$\exists \psi_j \in P \text{ tal que } |||f_j - \psi_j|||_2 < \frac{1}{j}\,. \tag{3.24}$$

Afirmamos que ψ_j es una sucesión de Cauchy en $L^2([-\pi, \pi])$ con la norma $||| \cdot |||_2$. En efecto, usando la desigualdad triangular y la desigualdad (3.24) tenemos:

$$\begin{aligned} |||\psi_j - \psi_k|||_2 &\leq |||\psi_j - f_j|||_2 + |||f_k - \psi_k|||_2 + |||f_j - f_k|||_2 \\ &< \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + |||f_j - f_k|||_2 \to 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

cuando $j, k \to +\infty$.

Como $\|\psi_j - \psi_k\|_2 = |||\psi_j - \psi_k|||_2$, usando (3.25) tenemos que ψ_j es una sucesión de Cauchy en P con la norma $\| \cdot \|_2$, luego por el Lema 3.1 y la proposición 3.14 tenemos

$$\exists f \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } \psi_j \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,. \tag{3.26}$$

Usando (3.24) y (3.26)

$$\begin{aligned} |||f_n - f|||_2 &\leq |||f_n - \psi_n|||_2 + |||\psi_n - f|||_2 \\ &< \frac{1}{n} + |||\psi_n - f|||_2 \to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$. Así, hemos probado que $\exists f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

3.4 Caracterización de $L^2([-\pi, \pi])$ vía Fourier

Sabemos que $P^j \xrightarrow{\widehat{\ }} S^j$. A continuación daremos una caracterización de $L^2([-\pi, \pi])$, vía Fourier en P^j.

Teorema 3.1 (Caracterización) *La transformada de Fourier restricta a* $L^2([-\pi, \pi])$ *es biyectiva entre* $L^2([-\pi, \pi])$ *y* $l^2(\mathbb{Z})$. *Además:*

1. *Denotando por* $S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, \phi k$ *vale*

$$S(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,, \qquad \forall f \in L^2([-\pi, \pi])\,. \tag{3.27}$$

i.e. la serie de Fourier de f es f en $L^2([-\pi, \pi])$ *con* $||| \cdot |||_2$.

2. Se satisface la Identidad de Parseval:

$$|||f|||_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = 2\pi\|\hat{f}\|_2^2 \,, \forall f \in L^2([-\pi, \pi]). \tag{3.28}$$

Además, (3.28) es equivalente a 3.29:

$$(f, g) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = 2\pi(\hat{f}, \hat{g})_l^2 \,, \forall f \in L^2([-\pi, \pi]), \tag{3.29}$$

con $(f, g) = \lim_{n\to+\infty} < \varphi_n, \psi_n >_2$, *donde* (φ_n) *es una sucesión de Cauchy en* P *con* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y también* (ψ_n) *es sucesion de Cauchy en* P *con* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\psi \xrightarrow{P'} g$ *, y* $< \varphi, \psi > = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, dx$ *.*

Prueba.- La prueba la hemos organizado de la siguiente forma.

Probaremos que ˆes sobreyectiva. Así, sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in}Z \in l^2(Z)$, definimos

$$\psi_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \underbrace{e^{ikx}}_{\phi_k(x):=} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \phi_k(x)$$

luego observamos que $\psi_n \in P$.

Además observamos que si $n < m$ se tiene

$$\psi_m - \psi_n = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \alpha_k\phi_k = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k + \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{-k}\phi_{-k} \,. \tag{3.30}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k \right\|_2^2 &= < \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k, \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j\phi_j > \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k \sum_{j=n+1}^{m} \overline{\alpha_j} \underbrace{< \phi_k, \phi_j >}_{=2\pi\delta_{kj}} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\overline{\alpha_k}2\pi \\
&= 2\pi \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2 \,. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{-k}\phi_{-k} \right\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_{-k}|^2 \,. \tag{3.32}$$

También como $k \neq j$, tenemos

$$\begin{aligned} < \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k, \sum_{j=-m}^{-(n+1)} \alpha_j\phi_j > &= \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k \sum_{j=-m}^{-(n+1)} \overline{\alpha_j} \underbrace{< \phi_k, \phi_j >}_{=0} \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora, como $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ $|\alpha_k|^2 < \infty$, luego la sucesión $\sum_{k=-n}^{n}$ $|\alpha_k|^2$ es de Cauchy en ₵ . Así, para $n < m$ se satisface

$$\underbrace{\sum_{k=-m}^{m} |\alpha_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\alpha_k|^2}_{= \sum_{n+1\le|k|\le m} |\alpha_k|^2} \longrightarrow 0 \tag{3.34}$$

cuando $n, m \to +\infty$.

De (3.30), (3.31), (3.32) y (3.33) tenemos para $n < m$,

$$\begin{aligned} \|\psi_m - \psi_n\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k + \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_{-j}\phi_{-j} \right\|_2^2 \\ &= 2\pi \sum_{n+1\le|k|\le m} |\alpha_k|^2\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Usando (3.34) cuando tomamos límite a la expresión (3.35) cuando $n, m \to +\infty$, obtenemos que la sucesión (ψ_n) es de Cauchy en P con la norma $\|\cdot\|_2$. Luego usando el Lema 3.1 y proposición 3.14, tenemos que

$$\exists f \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } \psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,.$$

Desde que ^ es único en P^j tenemos que $\hat{f} = \alpha$. También, se tiene

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &:= \frac{1}{2\pi} < f, \phi_{-k} > \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} < \psi_m, \phi_{-k} > \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j\phi_j(x)\phi_{-k}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \phi_j(x)\phi_{-k}(x)\,dx}_{2\pi\delta_{kj}} \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j\delta_{kj} \\ &= \alpha_k \end{aligned}$$

i.e. $\hat{f} = \alpha$. Osea ^: $L^2([-\pi, \pi]) \to l^2$ es sobreyectiva.

2. Ahora probaremos que si $g \in L^2([-\pi, \pi])$ entonces $\hat{g} \in l^2(\mathbb{Z})$. En efecto, sea $g \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces $\exists\psi_n$ sucesión de Cauchy en P con norma $\|\cdot\|_2$ 2 tal que

$\psi_n \xrightarrow{P'} g$ y también $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$. Así,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) : &= \frac{1}{2\pi} < g, \phi_{-k} > \\ &= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2\pi} < T_{\psi_m}, \phi_{-k} > \\ &= \lim_{m\to+\infty} \widehat{T_{\psi_m}}(k) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \widehat{\psi_m}(k)\,. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Aplicando la identidad de Parseval en *P* tenemos

$$\|\psi_n - \psi_m\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{\psi_n} - \widehat{\psi_m}\|_2^2$$

y usando que (ψ_n) es de Cauchy en *P* con $\|\cdot\|_2$, tenemos que la sucesión $\left(\widehat{\psi_n}\right)$ es de Cauchy en l (Z). Luego $\exists \alpha \in l^2$ (Z) tal que $\widehat{\psi_n} \xrightarrow{l^2(\mathbb{Z})} \alpha$.

Como

$$|\alpha_k - \widehat{\psi_m}(k)|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j - \widehat{\psi_m}(j)|^2 = \|\alpha - \widehat{\psi_m}\|_2^2 \to 0$$

cuando $m \to +\infty$, tenemos

$$\alpha_k = \lim_{m\to+\infty} \widehat{\psi_m}(k)\,. \tag{3.37}$$

De (3.36) y (3.37) tenemos que $\hat{g}(k) = \alpha k$, $\forall_k \in$ Z, i.e. $\hat{g} = \alpha \in l^2$ (Z).

3. La inyectividad de ^ en $L^2([-\pi, \pi])$ se tiene de la inyectividad de ^ en P^j. Esto es inmediato debido a la Identidad de Parseval Generalizado. Supongamos que para $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, $\hat{f} = \hat{g}$,

$$< f - g, \varphi >= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\widehat{f-g}(k)}_{=0}\, \widehat{\varphi}(-k) = 0\,, \ \forall \varphi \in P\,.$$

Luego $f = g$.

4. Luego de haber demostrado que ^ es biyectivo de $L^2([-\pi, \pi])$ en l^2(Z), estamos listos para probar:

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,, \quad \forall f \in L^2([-\pi, \pi])\,.$$

En efecto, Como $S_n(f) \in P$ y $\hat{f} \in l^2$(Z) tenemos para $n < m$

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_2^2 = 2\pi \sum_{n+1\leq|k|\leq m} |\hat{f}(k)|^2 \to 0$$

cuando $n, m \to +\infty$. Por lo tanto $(S_n(f))$ es una sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$. Usando el lema 3.1 y proposición 3.14, tenemos

$$\exists s \in P^j \text{ tal que } S(f) \xrightarrow{P'} s$$

i.e

$$s \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } S(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} s\,.$$

Afirmamos que $\hat{s}(k) = \hat{f}(k)$, $\forall k \in Z$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\widehat{s}(k) &:= \frac{1}{2\pi} < s, \phi_{-k} > \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} < S_m(f), \phi_{-k} > \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-m}^{m} \widehat{f}(j)\phi_j\phi_{-k}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \widehat{f}(j) \int_{-\pi}^{\pi} \phi_j\phi_{-k}\, dx \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \widehat{f}(j)\delta_{kj} \\
&= \widehat{f}(k)
\end{aligned}$$

i.e. $\hat{s} = \hat{f}$. Por la inyectividad de ^ en P^j (por consiguiente en $L^2([-\pi, \pi])$), concluimos que $s = f$ y por lo tanto

$$S(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,.$$

5. Previamente, sabemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{S_n(f)}(j) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\phi_k}(j) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\delta_{kj}\,,
\end{aligned}$$

luego

$$\widehat{S_n(f)}(j) = \begin{cases} \widehat{f}(j) & \text{si } j \in \{-n, \ldots, n\} \\ 0 & \text{si } j \notin \{-n, \ldots, n\}\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

Usando la Identidad de Parseval en P y (3.38), tenemos

$$\|S_n(f)\|_2^2 = 2\pi \left\|\widehat{S_n(f)}\right\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 . \tag{3.39}$$

Tomando límite a la igualdad (3.39), cuando $n \to +\infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_2^2 &= \lim_{n\to+\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \left\|\widehat{f}\right\|_2^2 . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Como $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ cuando $n \to +\infty$, entonces $|||S_n(f)|||_2 \to |||f|||_2$ cuando $n \to +\infty$. En consecuencia,

$$\underbrace{|||S_n(f)|||_2^2}_{=\|S_n(f)\|_2^2} \longrightarrow |||f|||_2^2 \text{ cuando } n \to +\infty . \tag{3.41}$$

Usando (3.41) en la igualdad (3.40) obtenemos

$$|||f|||_2^2 = 2\pi\, |||\hat{f}|||_2^2.$$

6. La equivalencia de la Identidad de Parseval con $(f, g) = 2\pi(\hat{f}, \hat{g})$, es consecuencia de la identidad de Polaridad.

Corolario 3.1 *La biyección lineal*

$$\wedge : L^2([-\pi, \pi]) \to l^2(\mathbb{Z})$$

es continua con inversa continua.

Prueba.- Es consecuencia de la Identidad de Parseval en $L^2([-\pi, \pi])$, que acabamos de demostrar.

3.5 La Distribución Periódica Delta de Dirac

Ahora, para

$$H(x) := \begin{cases} 1 & 0 < x \le \pi \\ 0 & \pi < x \le 2\pi \\ H(x+2\pi) = H(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

debemos recordar que $T_H \in L^2([-\pi, \pi])$ pero $H \notin C_{per}([-\pi, \pi])$; esto nos permite deducir que la siguiente inclusión es propia

$$C_{per}([-\pi, \pi]) \;\subsetneq\; L^2([-\pi, \pi]) \;.$$

Por otro lado, también es evidente que la siguiente inclusión es propia

$$P \;\subsetneq\; C_{per}([-\pi, \pi]) \;.$$

Por ejemplo, basta considerar la función

$$f(x) := \begin{cases} |x| & \text{si } x \in (-\pi, \pi] \\ \text{con } f(x+2\pi) = f(x)\,, & \forall x \in I\!R\,, \end{cases}$$

de donde se tiene que $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ pero $f \notin P$.

A seguir, introduciremos una aplicación y probaremos que ella es una distribución periódica que no está en $L^2([-\pi, \pi])$.

Definición 3.4 *Definimos* $< \delta_x, \varphi >= \varphi(x)$ *,* $\forall \varphi \in P$.

Proposición 3.17 *La aplicación* $\delta_x : P \to ¢$ *es* $¢$ *- lineal y además* $\delta_x \in P^j$.
"δ_x *es conocida como la distribuci´ on Delta de Dirac".*

Prueba.- En efecto,

$$< \delta_x, \varphi + c\psi >= (\varphi + c\psi)(x) = \varphi(x) + c\psi(x) =< \delta_x, \varphi > +c < \delta_x, \psi > \forall \varphi, \psi \in P\,, \forall\, c \in ¢\;.$$

Ahora, consideremos el núcleo de Fejér de orden n,

$$K_n := \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \phi_k$$

y recordemos que este núcleo es una identidad aproximada. Ahora, denotemos por $\Psi_n(\cdot) := \frac{1}{2\pi} K_n(x - \cdot) \in P$ entonces vale

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(y)\varphi(y)dy = \lim_{n\to+\infty} (K_n * \varphi)(x) = \varphi(x) =< \delta_x, \varphi >\,,$$

$\forall \varphi \in P$.

Así tenemos que $\delta_x \in P^j$.

H

Proposición 3.18 $\delta_x \notin L^2([-\pi, \pi])$, $\forall x \in IR$.

Prueba.- De la proposición previa tenemos que $\delta_x \in P^j$, ahora probaremos que δ_x

$\notin L^2([-\pi, \pi])$.

Vemos que

$$\widehat{\delta_x}(k) \;=\; \frac{1}{2\pi} < \delta_x, \phi_{-k} >= \frac{1}{2\pi}\phi_{-k}(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-ikx}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Luego

$$|\widehat{\delta_x}(k)| = \frac{1}{2\pi}|e^{-ikx}| = \frac{1}{2\pi}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Por lo tanto $\hat{\delta}_x \notin l^2(\mathbb{Z})$, desde que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}|\widehat{\delta_x}(k)|^2 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}(2n+1) = +\infty\,.$$

Así, $\delta_x \notin L^2([-\pi, \pi])$.

Observacion 3.7 *De la proposición 3.18, tenemos $\delta_x \in P' - L^2([-\pi, \pi])$, $\forall x \in IR$. Así,*

$$\{\delta_x\}_{x\in IR} \subset P' - L^2([-\pi, \pi]) \neq \emptyset$$

Esto es, la siguiente inclusión es propia

$$L^2([-\pi, \pi]) \;\underset{\neq}{\subset}\; P'\,.$$

Observación 3.8 *Resumiendo tenemos que las siguientes inclusiones son propias*

$$P \;\underset{\neq}{\subset}\; C_{per}([-\pi, \pi]) \;\underset{\neq}{\subset}\; L^2([-\pi, \pi]) \;\underset{\neq}{\subset}\; P'\,.$$

Observación 3.9 *Las siguientes inclusiones son continuas y con imagen densa respectivamente.*

$$\begin{array}{ccccc} P & \hookrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & P' \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ S(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & S'(\mathbb{Z}) \end{array}$$

En efecto, la densidad es en el sentido: todo elemento del espacio mayor es aproximado por una sucesion de elementos del espacio menor con la topología del espacio mayor.

Finalmente,

Observación 3.10 *Cabe resaltar que $L^2([-\pi, \pi])$ es el caso $s = 0$ de los espacios de Sobolev periódico H^s_{per}, donde H^r_{per} es Hilbert para todo $r \in IR$. Para ver esto* citamos [1] y [8].

Podemos citar algunos trabajos, donde se usan los resultados obtenidos, que abordan problemas de existencia de solución de algunas ecuaciones, por ejemplo [1], [4], [5], [6] y [7].

CONCLUSIONES

En nuestro estudio del espacio $L^2([-\pi, \pi])$ hemos realizado lo siguiente:

1. Introducimos la aplicación $\|\cdot\|_2$ en P y haciendo cálculos simples probamos que es una norma en P que no es completa.
2. Para introducir el espacio $L^2([-\pi, \pi])$, estudiamos a las sucesiones de Cauchy en P y lo conectamos con convergencia de sucesiones en su dual topológico: P^j. Los resultados obtenidos nos permitieron introducir un producto interno y probar que $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert.
3. Probamos importantes propiedades del espacio infinito dimensional $L^2([-\pi, \pi])$ resaltando su conexi´on con $l^2(\mathbb{Z})$ mediante la transformada de Fourier.
4. Estudiamos inmersiones estrictas, continuas y densas de subespacios en P^j.
5. Las propiedades del espacio distribucional $L^2([-\pi, \pi])$ permiten generalizar y generar los espacios de Sobolev periódico H^s_{per} para todo $s \in IR$; y aplicarlo en el estudio de la existencia de solución de ecuaciones diferenciales.
6. Finalmente, este estudio también es válido cuando sustituimos π por $l > 0$ y consideramos $P := C^\infty_{per}([-l, l])$ funciones infinitamente diferenciables y periódicas con periodo $2l$.

REFERENCIAS

1. Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.

2. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

3. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuaci´on de Schr¨odinger no homogénea en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01): 37-51.

4. Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02): 348-359.

5. Santiago Ayala, Y. Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuacĩon de Schrödinger generalizada. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(01): 91-101.

6. Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger type homogeneous model. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 919-932.

7. Santiago Ayala, Y. Semigroup of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger equation. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 1061-1076.

8. Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.

9. Terence, T. Nonlinear dispersive equations: Local and Global Analysis. Regional Conference Series in Mathematics, No. 106. American Mathematical Society; 2006.