

ESTUDO CONFIABILÍSTICO DE CHAPAS PERFURADAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Data de submissão: 29/06/2023

Data de aceite: 01/09/2023

Luís Philipe Ribeiro Almeida

Universidade de São Paulo, Escola de
Engenharia de São Carlos, Departamento
de Engenharia de Estruturas
São Carlos – SP
<http://lattes.cnpq.br/4965036934315787>

Herbert Medeiros Torres Lopes

Universidade de São Paulo, Escola de
Engenharia de São Carlos, Departamento
de Engenharia de Estruturas
São Carlos – SP
<http://lattes.cnpq.br/7034927727844327>

Lucas da Mata Rocha Menezes

Pontifícia Universidade Católica do Rio
(PUC-Rio), Departamento de Engenharia
de Estruturas
Rio de Janeiro - RJ
<http://lattes.cnpq.br/8177329687046734>

Ray Calazans dos Santos Silva

Universidade de São Paulo, Escola de
Engenharia de São Carlos, Departamento
de Engenharia de Estruturas
São Carlos – SP
<http://lattes.cnpq.br/5372629655559184>

Lucas Henrique Oliveira Muniz

Universidade Federal de Alagoas,
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil,
Maceió-AL
<http://lattes.cnpq.br/6213188972538616>

Francisco de Assis V. B. Júnior

Universidade Federal de Alagoas,
Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil,
Maceió-AL
<http://lattes.cnpq.br/1862904417576730>

RESUMO: Neste trabalho, é desenvolvido uma análise da redução do custo computacional no cálculo da probabilidade de falha de conexões metálicas, utilizando-se de fundamentos da computação paralela. Na análise, dimensionamento e manutenção de estruturas de aço, verificações no que diz respeito a requisitos mínimos para um bom funcionamento estrutural se traduzem em critérios quase sempre definidos como eventos estatísticos, ou seja, as variáveis envolvidas nesses eventos traduzem incertezas inerentes a fatores presentes em todas as etapas do projeto. O método de simulação de Monte Carlo surge como uma ferramenta a quantificar essas incertezas presentes, considerando os parâmetros estatísticos presentes no processo. Inicialmente foi desenvolvido um estudo referente à computação de alto desempenho, analisando os conceitos da programação paralela, bem como os seus

principais padrões. Dentre eles, destaca-se o MPI o qual se baseia no conceito de comunicação entre máquinas paralelas com memória distribuída por meio da troca de mensagens, e foi escolhido como foco para desenvolver o estudo proposto neste trabalho. Posteriormente, é elaborado a formulação linear do Método dos Elementos de Contorno (MEC), desenvolvendo suas equações integrais e apresentando a discretização utilizada no contorno do problema, através de elementos isoparamétricos com aproximação linear. Em seguida, são formulados os conceitos da confiabilidade estrutural, com foco no método de simulação de Monte Carlo. Por fim, é realizado a validação da teoria apresentada com uma aplicação referente à ligação metálica de uma chapa perfurada. Exemplos foram desenvolvidos e uma significativa melhoria em termos de custo computacional foi observada quando a computação de alto desempenho (MPI) foi utilizado em associação com o método de simulação de Monte Carlo. A principal contribuição deste trabalho é fornecer resultados que apontam as contribuições benéficas da utilização da computação de alto desempenho em problemas de engenharia. Auxiliando engenheiros e estudantes no desenvolvimento deste tema, contribuindo para a disseminação e avanço da sua análise.

PALAVRAS-CHAVE: Confiabilidade Estrutural, Método dos Elementos de Contorno, Computação de alto desempenho.

1 | INTRODUÇÃO

Conexões metálicas são detalhes construtivos que promovem a união de partes da estrutura consigo mesma ou com elementos externos a ela. Elas são estabelecidas de duas formas: (a) por elementos de ligação; (b) pelos meios de ligação. Os elementos são descritos como chapas, enrijecedores, placas de base, cantoneiras consolo e talas de emenda. Estes têm a função de permitir ou a facilitar a transmissão dos esforços entre os elementos estruturais. Já os meios de ligação são utilizados para promover a união entre os elementos de ligação e os elementos estruturais, garantindo assim formação completa da ligação. Esses componentes devem ser dimensionados de forma que sua resistência de cálculo a um determinado estado-limite último seja igual ou superior à solicitação de cálculo, determinada pela análise da estrutura sujeita às combinações de cálculo das ações e pela porcentagem especificada da resistência da barra ligada.

A análise estrutural de diversos problemas de engenharia, incluindo o estudo de conexões metálicas, normalmente se utiliza de métodos numéricos, pois solução analíticas pode ser de difícil obtenção ou impossível de ser alcançada. Os métodos numéricos mais utilizados são o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método sem malha, entre outros. Esses métodos procuram fornecer uma solução aproximada para o problema, a qual, dependendo da complexidade do estudo, pode demandar um alto custo computacional para a obtenção de respostas mais precisas. Neste contexto, dentre os métodos numéricos mais usuais, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido utilizado como uma importante ferramenta na análise de problemas da engenharia, com destaque para casos onde se tem

elevados gradientes de tensão, além de problemas que tenham seu domínio estendido ao infinito ou semi-infinito.

O processamento paralelo realiza uma divisão de uma aplicação específica de tal maneira que suas partes possam ser distribuídas e executadas por vários elementos de processamento simultaneamente. Esses elementos irão cooperar entre si e trabalhar na busca da solução desejada. Dentre as estratégias de paralelização mais usuais, destaca-se aquela baseada no paradigma de troca de mensagens. Neste padrão, a aplicação é construída de forma a possuir funções de envio e recebimento de mensagens entre os processadores utilizados. A biblioteca de comunicação MPI normalmente é a ferramenta mais usual para implementação computacional deste procedimento. O conceito de processamento paralelo acoplado ao MEC é um caminho de redução dos requisitos computacionais de problemas com uma maior complexidade matemática. Este acoplamento na maioria das vezes é realizado nas sub-rotinas internas do MEC, e geralmente se mostra eficaz na proposta que é idealizado. Alguns trabalhos utilizam o conceito de máquinas paralelas acoplado com o MEC, pode-se citar: Merta e Zapletal (2015), Mammoli e Ingber (2000), Ingber e Tanskin (2005) e Ataseven et al. (2008).

Neste trabalho, a implementação utilizada para resolução de problemas de conexões metálicas pode ser dividida em três etapas; 1) utiliza-se a formulação linear do MEC para determinação de parâmetros mecânicos relacionados a deslocamentos e tensões; 2) a confiabilidade estrutural é acoplada ao modelo mecânico para fins de avaliação da probabilidade de violação de certos modos de falha. Nesse contexto, o processo exaustivo de Monte Carlo para avaliação da probabilidade de falha pode ser altamente custoso, o que conduz a utilização da computação de alto desempenho com o conceito de troca de mensagens (MPI); 3) A utilização do conceito de máquinas paralelas é integrado diretamente na rotina de confiabilidade objetivando-se a redução do custo computacional para cada chamada do modelo mecânico. Para fins de validação do programa elástico e do acoplamento entre a rotina de confiabilidade e o procedimento de comunicação entre máquinas paralelas com memória distribuída, utiliza-se o caso de uma conexão simples como estratégia de validação de todas as etapas implementadas.

2 | APLICAÇÃO DO MPI NO CASO DE ESTUDO

A aplicação do MPI no estudo analisado segue o apresentado na Fig. 1, o uso do MPI permite uma grande escalabilidade no processo de cálculo, pois o MPI pode ser utilizado em clusters que possuem centenas de processadores, assim como em rede interna de computadores de modo a utilizar os processadores de todos os computadores conectados à rede, ou até mesmo o uso em um único computador, onde o custo de transporte de informações é bem inferior.

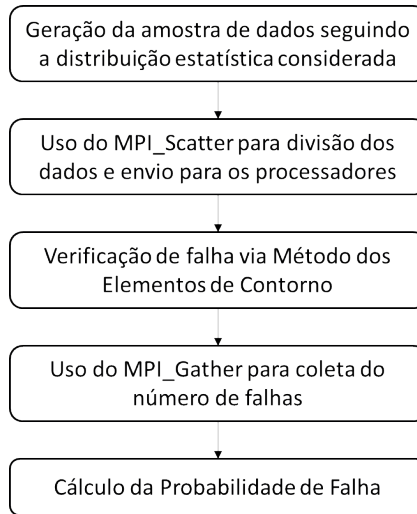


Figura 1. Fluxograma da aplicação do MPI no estudo de caso

A Fig. 2 exemplifica a diferença entre o cálculo utilizando o MPI e sem o seu uso. Não se pode afirmar que com o dobro de processadores o custo computacional será reduzido pela metade, uma vez que com o uso do processamento paralelo insere-se um custo associado ao processo de comunicação entre os processadores.

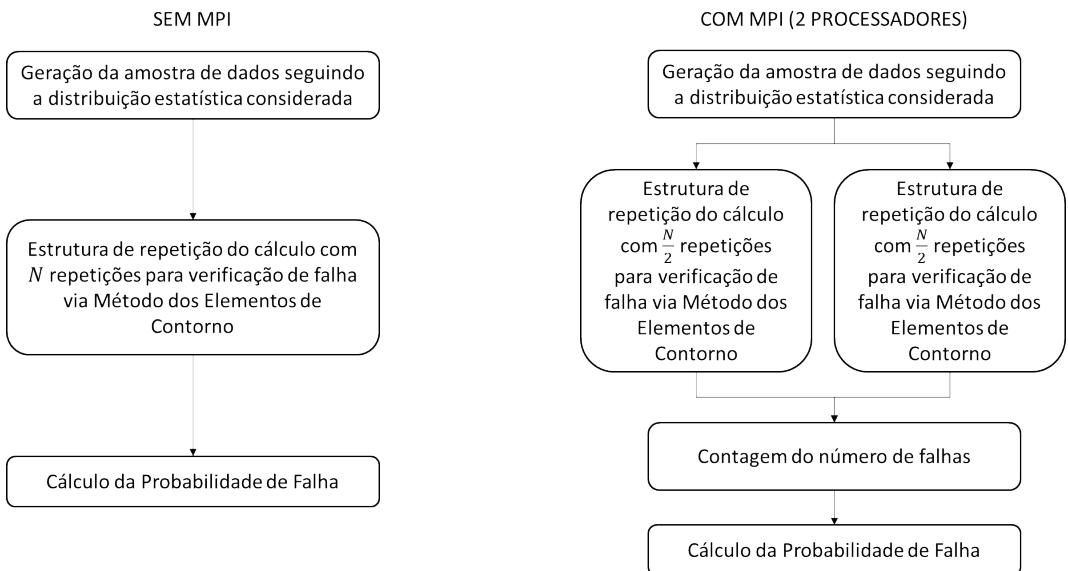


Figura 2. Comparativo do fluxo de cálculo com processamento serial e paralelo

3.1 FORMULAÇÃO LINEAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O MEC é uma ferramenta numérica que se caracteriza pela não necessidade de definição de malhas sobre o domínio de interesse. Tal estratégia torna-se uma elegante e econômica alternativa às técnicas chamadas de métodos de “domínio”. Algumas áreas de atuação podem ser citadas: Mecânica dos fluidos, elasticidade linear ou não linear, mecânica da fratura, dinâmica das estruturas, eletromagnetismo, acústica, dentre outras. A discretização da geometria do contorno através de elementos unidimensionais é apresentada na Fig. 3.

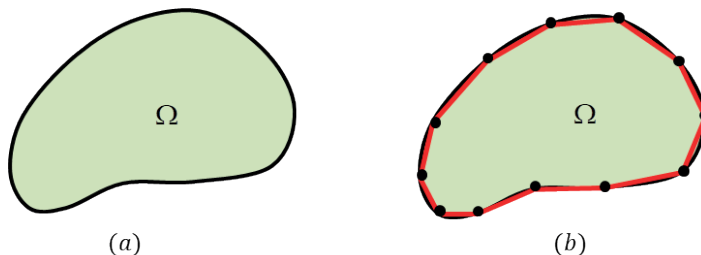


Figura 3. Geometria real (a) Discretização por elementos de contorno lineares (b).

3.1 Equações integrais de contorno

Existem três principais maneiras de obter a formulação do MEC, seja por meio do método dos resíduos ponderados, através do teorema da reciprocidade de Betti ou até mesmo utilizando uma formulação variacional semelhante à utilizada no MEF. Embora o procedimento via resíduos ponderados seja amplamente utilizado no meio acadêmico, adota-se aqui a formulação baseada no teorema da reciprocidade de Betti, proposto por Somigliana (1986). Seja um domínio Ω , limitado por um contorno Γ , submetido a dois estados de carregamento: o primeiro representa o problema em estudo e o segundo, o problema de Kelvin. A partir do teorema da reciprocidade de Betti, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) \varepsilon_{ijk}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \varepsilon_{jk}(q) d\Omega \quad (1)$$

em que σ_{jk} e ε_{jk} são as componentes de tensão e deformação e σ_{jk}^* e ε_{jk}^* são as componentes do problema de Kelvin. Após sucessivas manipulações matemáticas, sabendo que $\delta_{ij} u_j = u_i$ e lembrando-se que para , chega-se à Eq.(2):

$$u_i(s) = -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (2)$$

A equação de Somigliana, definida na Eq. (2), representa o campo de deslocamentos em um ponto de colocação s . Com auxílio da Lei de Hooke, obtém-se a equação integral de tensões para pontos internos, a seguir:

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} P_{ik,i}^* + G(P_{ik,j}^* + P_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \\ \sigma_{ij}(s) = & +\int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,i}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] P_k d\Gamma \\ & +\int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,i}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

A identidade de Somigliana (2) permite a obtenção dos valores de deslocamentos em qualquer ponto do domínio, a partir de valores de forças e deslocamentos no contorno, das forças que atuam no domínio (caso existam) e da solução fundamental. Como a identidade de Somigliana é válida apenas para pontos no domínio, esta é manipulada de forma a obter a representação integral dos deslocamentos no contorno, Eq. (4).

$$c_{ij}(s)u_j(s) = -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(s,q)u_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,q)P_j(q)d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q)u_{ij}^*(s,q)d\Omega \quad (4)$$

Para contorno suave $c_{ij}(s)$ assume o valor,

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(s) \quad (5)$$

Já para contorno com angulosidade, $c_{ij}(s)$ é definido pela Eq. (6), a seguir.

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} u_j(s) \quad (6)$$

4 | MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Um dos principais objetivos da confiabilidade refere-se a avaliação da probabilidade de falha, o que na prática depende da quantidade de variáveis aleatórias dependentes e com distribuições não normais. Por este motivo, o método de simulação de Monte Carlo surge como uma técnica alternativa, envolvendo exaustivas repetições do problema em estudo, utilizando em cada processo uma realização particular de variáveis aleatórias do problema. Estas repetições fornecem um conjunto de soluções, uma para cada realização, representando a saída simulada do problema. Melchers e Beck (2018) retratam o método de Monte Carlo como uma técnica que envolve simular artificialmente um grande número de elementos e observar o resultado encontrado. No caso da análise da confiabilidade em estruturas, isto significa do modo mais simples, que cada variável aleatória X_i pode fornecer aleatoriamente um determinado valor. Basicamente, a técnica consiste em produzir N eventos aleatórios a serem avaliados na equação do estado limite $G(X)$, Fig. 4. Assim, a probabilidade de falha é estimada como a razão entre o número de eventos de falha (N_f) e o número total de eventos (N),

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (7)$$

A precisão do método está relacionada com o tamanho da amostragem, e pode ser avaliado pelo coeficiente de variação (*COV*) da probabilidade de falha. Com o objetivo de obter uniformidade na resposta, para diferentes execuções do método, estima-se um número de cenários mínimos para que uma probabilidade de falha P_f seja determinada com um almejado coeficiente de variação δ ,

$$N_{\min} = \frac{1}{\delta^2} \frac{1 - P_f}{P_f} \quad (8)$$

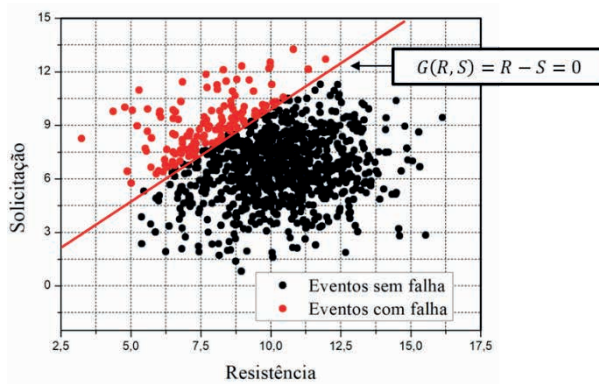


Figura 4. Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo.

5 | APLICAÇÃO

Esta seção apresenta um exemplo para fins de validação e aplicação da formulação do MEC linear acoplada à análise de confiabilidade por Monte Carlo, onde MPI é utilizado para reduzir o custo computacional das simulações numéricas realizadas no estudo. Trata-se de uma chapa de aço (aço SAE 1045) com furo circular central, a qual simula a conexão simples entre uma seção do elemento de ligação de cantoneira e um parafuso, Na Fig. 5 é possível visualizar as propriedades físicas e geométricas.

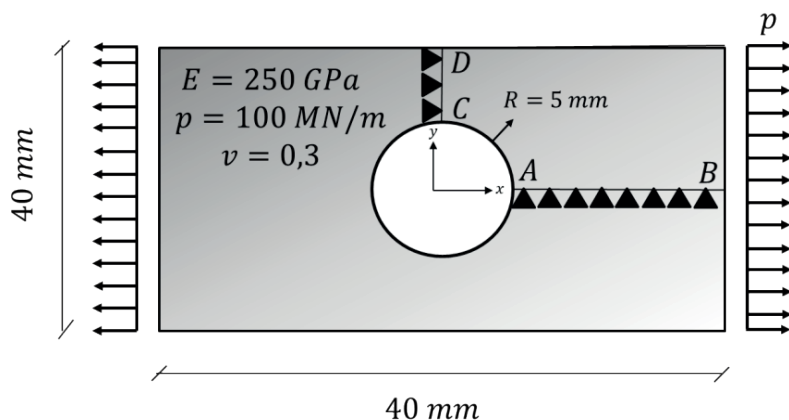


Figura 5. Chapa de aço com furo circular tracionada.

Etapa 1: Análise mecânica

A etapa 1 tem como objetivo avaliar a eficiência da formulação do MEC linear para o problema proposto. Valendo-se da simetria do carregamento, o exemplo numérico é modelado considerando-se apenas 1/4 da geometria real do problema e considerando-se estado plano de tensão, conforme ilustrado na Fig. 5.

Utiliza-se uma malha de elementos de contorno com cerca de 50 elementos lineares, sendo 31 nós no contorno da cavidade. O problema é analisado e o resultado é comparado a uma solução de referência representada por uma malha de 12000 elementos finitos triangulares lineares obtida no *software* ABAQUS. Na Fig. 6a é apresentado o comportamento mecânico do trecho AB em termos de deslocamento. Já na Fig. 6b é avaliado a tensão de von Mises ao longo do trecho CD. Percebe-se uma boa convergência da solução obtida pelo MEC quando comparado com a resposta numérica do ABAQUS, podendo-se observar uma maior concentração de tensões próxima ao entorno do furo circular.

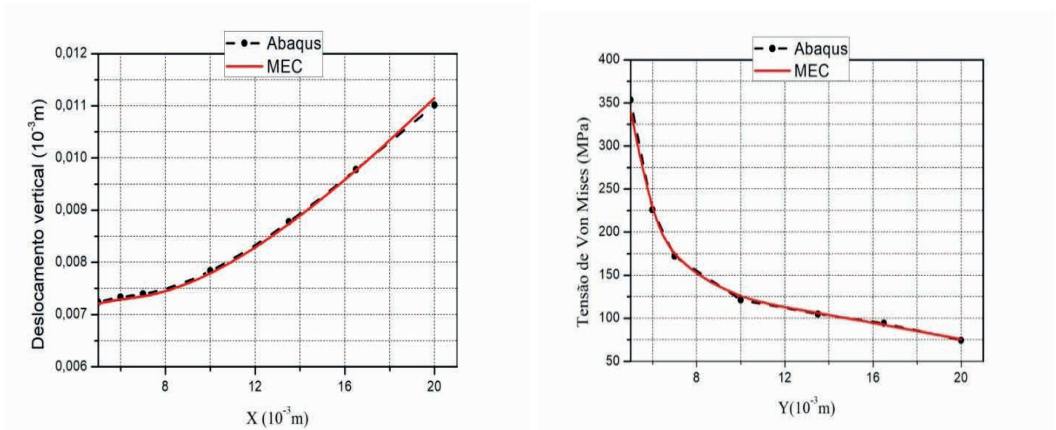


Figura 6. (a) Deslocamento vertical do trecho AB (b) Tensão de Von mises no trecho (CD).

Etapa 2 : Análise probabilística utilizando MPI

O problema apresentado na Fig. 5 é revisitado, para ilustrar a influência da aleatoriedade das variáveis envolvidas, as quais são indicadas na Tabela 1. As mesmas propriedades geométricas (Fig. 5) e de condições de contorno são impostas. Considera-se estado plano de tensão, e realiza-se um estudo confiabilístico através da violação da função de falha, Eq. (9):

$$G_1 = u_L - \frac{(e_v - d_0)}{d_0} \quad (9)$$

Nesta equação, o limite do deslocamento relativo diametral u_L é avaliado em 0,2% do diâmetro inicial d_0 do furo. A variável e_v é a dimensão do eixo vertical do furo no estado deformado. A seguir são apresentados os dados estatísticos das variáveis aleatórias que compõem o problema:

	Média	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
E (GPa)	250	10%	Normal
Poisson	0,3	10%	Normal
σ_y (Tensão de escoamento, MPa)	310	15%	Normal

Tabela 1. Parâmetros estatísticos da análise

A avaliação da probabilidade de ocorrência do modo de falha analisado, indicado na Eq.(9), é apresentado na Tabela 2. O número mínimo de simulações é estimado considerando um coeficiente de variação de 5 %, conforme Eq. (8).

P.f. (Monte Carlo)	Número de simulações
--------------------	----------------------

Tabela 2. Avaliação da probabilidade de falha do problema.

Nota-se que o valor de probabilidade de falha obtido é significativo, o que pode ser explicado pela alta dispersão das v.a. envolvidas, e pelo fato de que esse modo de falha representa um deslocamento excessivo, uma tendência de rasgamento, mas não necessariamente a ruína da peça. Na Fig. 7 é apresentado um estudo de convergência da probabilidade de falha à medida que o número de simulações é aumentado. Como era esperado, percebe-se de fato que há uma estabilização do valor com o aumento do número de simulações, onde essa estabilização ocorre em valores próximos ao número mínimo estimado, vide Tabela 2.

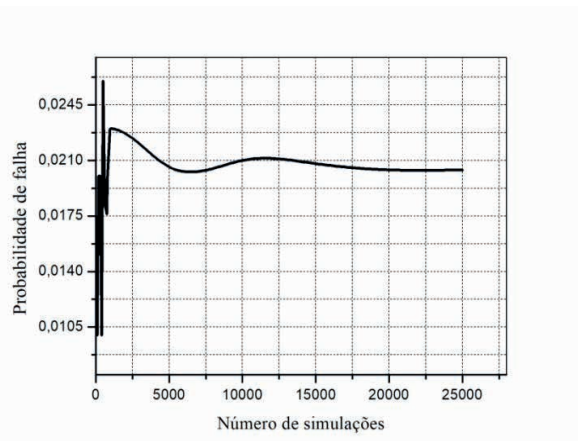


Figura 7. Estudo de convergência da probabilidade de falha.

A segunda análise confiabilística tem como base um estudo da probabilidade de ocorrência da função de falha:

$$G_2 = \sigma_y - \sigma_{mises} \quad (10)$$

No qual, σ_y é a tensão de escoamento do aço SAE 1045 e σ_{mises} a tensão de Von mises, a qual foi estimada em todo o contorno do furo. As propriedades geométricas e dados estatísticos foram apresentados na Fig. 5 e Tabela 1 respectivamente. Na Tabela 3, é apresentado a probabilidade de falha para os pontos C e A (Fig. 5). Percebe-se uma considerável P.f. no ponto C e uma menor P.f. no ponto A, isso é explicado pela tensão crítica de Von mises acontecer no ponto C. Isto indica que a consideração de incertezas não modifica significativamente o valor da tensão crítica de von Mises, havendo 62 % de chances de que o valor determinístico seja maior ou igual ao valor avaliado de forma probabilística. É importante ressaltar que esta análise é meramente ilustrativa e o alto valor de probabilidade de falha obtido deve-se ao alto valor de dispersão dos valores estatísticos

envolvidos na análise, além das propriedades físicas e condições de contorno adotadas.

	P.f.
Ponto A	1,90E-04
Ponto C	6,21E-01

Tabela 3. Avaliação da probabilidade de falha do problema.

Na Figura 8, é apresentada a análise confiabilística em torno de pontos no contorno do furo circular. O estudo se inicia no ponto A (5,0) e continua até valores próximos a C (0,5). Nota-se que para os pontos próximos ao ponto A, a probabilidade de falha é maior do que em pontos pertencentes a região intermediária da cavidade. Entretanto, a P.f. volta a ter um aumento considerável quando se aproxima de pontos próximos a região do ponto C. Isto indica que a maior falha acontece nos extremos do furo circular, e o seu valor crítico acontece na região próxima ao ponto C.

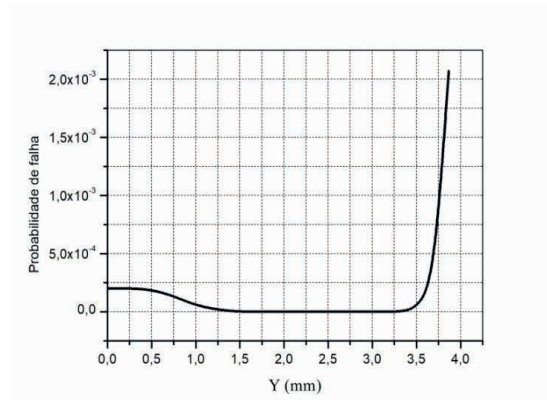


Figura 8. Probabilidade de falha pra pontos no contorno do furo.

O uso do MPI como ferramenta de apoio na análise realizada, se dá na resolução do problema exaustivo de simulações de Monte Carlo para avaliação de um valor adequado de probabilidade de falha. Com o objetivo de avaliar o custo computacional em termos de tempo da CPU, a análise numérica foi realizada na linguagem Python, com uma máquina Intel® Core™ i7-6500U CPU, 2.5GHz com 4 Núcleos e 8 GB de RAM. Com base nos resultados encontrados, é possível observar uma considerável redução do custo computacional ao se utilizar quatro processadores em vez de apenas um (Fig. 9). Além disso, percebe-se que o custo computacional aumenta em uma taxa linear quando se utiliza um único processador. Já a utilização de quatro processadores leva a um aumento ligeiramente não linear desse custo. De maneira quantitativa, é apresentada a avaliação do custo computacional para o número de processadores utilizados na análise, conforme mostrado na Tabela 4. A taxa de redução do tempo computacional é próxima de 60 %.

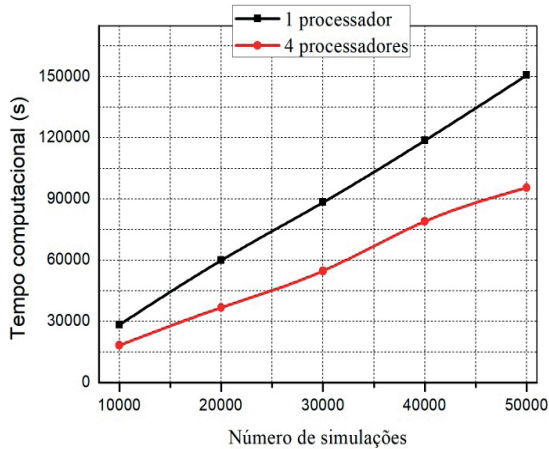


Figura 9. Custo computacional considerando diferentes números de processadores.

Número de simulações	Tempo (s) 1 Processador	Tempo (s) 4 Processadores	Redução (%)
10000	28337,65	18213,03	64,27
20000	59875,65	36692,01	61,28
30000	88366,66	54764,85	61,97
40000	118659,6	78987,56	66,56
50000	150658,99	95478,65	63,37

Tabela 4. Redução do custo computacional ao utilizar quatro processadores.

6 | CONCLUSÃO

As técnicas de computação de alto desempenho, notadamente aquelas que tornam possível coordenar eficientemente vários processadores para executar um software computacionalmente intensivo, têm tido um importante papel para viabilizar um grande número de aplicações de interesse de instituições acadêmico-científicas e indústrias, notadamente oriundas das engenharias. Tradicionalmente, os avanços nesta área têm sido alavancados devido ao interesse da indústria de hardware, em cooperação com instituições de pesquisa e universidades, resultando em um conhecido fosso entre o desempenho do hardware aplicado a computação de alto desempenho e a capacidade do software de explorá-lo de forma compatível com os princípios da engenharia de software. Entende-se que o uso de técnicas probabilísticas, como a simulação de Monte Carlo, contribuiu com o melhor entendimento dos níveis de segurança aos quais a estrutura está sujeita, subsidiando a tomada de decisão do projetista/analista. O estudo desenvolvido permitiu a aplicação dos conceitos de computação paralela para o cálculo da probabilidade de falha

utilizando o método dos elementos de contorno. No qual, o resultado apresentado pelo uso de computação paralela no processo de Monte Carlo permitiu visualizar a redução no custo computacional envolvido para a obtenção da solução requerida.

REFERÊNCIAS

Aliabadi, M. H. **The boundary element method. Applications in solids and structures.** v. 2, New York: J. Wiley, 2002.

Ataseven, Y., Akalin-Acar, Z., Acar, C. E., & Gençer, N. G. **Parallel implementation of the accelerated BEM approach for EMSI of the human brain.** Medical & Biological Engineering & Computing, 46(7), 671–679, 2008

Brebbia, C. A.; Telles, J. C. F.; Wrobel, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering.** Berlin: Springer-Verlag, 1984.

Brebbia, C.A. **The Boundary Element Method for Engineers,** London: Pentech Press, 1978.

Merta, M., Zapletal, J. **Acceleration of boundary element method by explicit vectorization.** Advances in Engineering Software, 86, 70–79, 2015.

Mammoli, A. A., Ingber, M. S. **Parallel multipole BEM simulation of two-dimensional suspension flows.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 24(1), 65–73, 2000

Melchers R.E., Beck. A.T. **Structural Reliability Analysis and Prediction,** John Wiley & Sons, Chichester, 2018.

Ingber, M. S., & Tanskin, J. A. **A parallel domain decomposition BEM for diffusion problems with surface reactions.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 29(9), 878–885, 2005

Ignácio A., A. V. Ferreira Filho. V.J.M. **MPI: uma ferramenta para implementação paralela. Pesquisa Operacional,** v. 22, n. 1, p. 105-116, 2015.

Mader, G., Uhlmann, F. H. (1997). **A parallel implementation of a 3D-BEM-algorithm using distributed memory algorithms.** IEEE Transactions on Magnetics, 33(2), 1796–1799.

Somigliana. C., **Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope,** Il Nuovo Cimento, p.17-19, 1886.

Zaccone, G. **Python Parallel Programming Cookbook.** Packt Publishing Ltd, 2015.