EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN DISTRIBUCIONES PERIÓDICAS

Data de aceite: 02/08/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este artículo probamos la existencia y unicidad de solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en el espacio distribucional periódico P'. Además, probamos que la solución depende continuamente respecto al dato inicial en P'. Introduciendo una familia de operadores lineales débilmente continuos, probamos que esta familia es un grupo en P'. Luego, con esta familia de operadores, conseguimos una versión fina del Teorema de existencia y dependencia continua obtenido.
Finalmente, damos las generalizaciones, conclusiones y observaciones derivados de este estudio.
PALABRAS CLAVE: Teoría de grupos, existencia de solución, ecuación de Schrödinger, espacio distribucional periódico, operadores débilmente continuos.

EXISTENCE OF SOLUTION OF A SCHRÖDINGER EQUATION IN PERIODIC DISTRIBUTIONS

ABSTRACT: In this article, we prove the existence and uniqueness solution of the homogeneous Schrödinger equation in the periodic distributional space P'. Furthermore, we prove that the solution depends continuously respect to the initial data in P'. Introducing a family of weakly continuous linear operators, we prove that this family is a group in P'. Then, with this family of operators, we get a fine version of the existence and dependency continuous theorem obtained.
Finally, we give the generalizations, conclusions and remarks derived from this study.
KEYWORDS: Groups theory, existence of solution, Schrödinger equation, periodic distributional space, continuous weakly operators.
MSC 2010: 47D03, 35J10, 81Q05, 46T30, 46F10.

1 I INTRODUCCIÓN

Primero queremos comentar que de [3] se tiene probado la existencia de solución de la ecuación de Schrödinger en el espacio de Hilbert H^s_{per}. También en [3] se introduce una familia de operadores acotados en el espacio de Hilbert H^s_{per} se prueba que forma un grupo unitario. Así, motivados por esas ideas resolveremos el problema (P_1) en el dual topológico de P : P', que no es un espacio de Banach.

En este artículo, probaremos la existencia y unicidad de solución de (P_1) en P', y además demostraremos la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en P', considerando la convergencia débil en P'. Y probaremos que la familia de operadores introducida forma un grupo de operadores lineales débilmente continuos. Así, con esta familia reescribimos nuestro resultado en una version fina.

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en tres sub-secciones. Así, en la subsección 3.1 probamos que el problema (P_1) posee una única solución y además demostramos que la solución depende continuamente del dato inicial. En la subsección 3.2, introducimos una familia de operadores lineales débilmente continuas en P' que logran formar un grupo. En la subsección 3.3 mejoramos el Teorema 3.1. En la subsección 3.4 comentamos algunas generalizaciones.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2 | METODOLOGÍA

Como marco teórico en este artículo usamos las referencias [1], [2], [3], [4] y [6] para la Teoría de Fourier en el espacio distribucional periódico, espacios de Sobolev periódico, espacios vectoriales topológicos, operadores débilmente continuos y existencia de solución de una ecuación diferencial distribucional.

3 | PRINCIPALES RESULTADOS

La presentación de los resultados obtenidos lo hemos organizado en subsecciones y es del siguiente modo.

3.1 Solución de la Ecuación de Schrödinger (P_1)

En esta subsección estudiaremos la existencia de solución del problema (P_1) y la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en P'.

Teorema 3.1 *Sea* $\mu > 0$ *y el problema distribucional homogéneo*

$$(P_1) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C(I\!R, P') \\ \partial_t u - i\mu\partial_x^2 u = 0 \ \in P' \\ u(0) = f \in P' . \end{array} \right.$$

entonces (P_1) posee una única solución $u \in C^1(IR, P^j)$. Además, la solución depende continuamente del dato inicial. Esto es, dados f_n, $f \in P^j$ tal que $f_n \xrightarrow{P'} f$ implica $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in IR$, donde u_n es solución de (P_1) con dato inicial f_n y u es solución de (P_1) con dato inicial f.

Prueba.- La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma.

1. Supongamos que existe $u \in C(IR, P^j)$ satisfaciendo (P_1), entonces tomando la transformada de Fourier a la ecuación

$$\partial_t u - i\mu\partial_x^2 u \ = \ 0$$

conseguimos

$$0 \ = \ \partial_t \hat{u} - i\mu(ik)^2\hat{u} \ = \ \partial_t \hat{u} + i\mu k^2 \hat{u}$$

que para cada $k \in Z$ es una EDO con dato inicial $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$.

Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Omega_k) \left| \begin{array}{l} \hat{u} \in C(I\!R, S'(Z)) \\ \partial_t \hat{u}(k,t) + i\mu k^2 \hat{u}(k,t) = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \text{ con } \hat{f} \in S'(Z) \end{array} \right.$$

$\forall k \in Z$ y conseguimos

$$\hat{u}(k,t) = e^{-i\mu k^2 t}\hat{f}(k)$$

de donde obtenemos la expresión de u, candidato a solución:

$$\begin{aligned} u(t) \ &= \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\phi_k \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^2 t}\hat{f}(k)\phi_k \,, && (3.1) \\ &= \ \left[\left(\hat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \right]^{\vee} . && (3.2) \end{aligned}$$

Como $f \in P^j$ entonces $\hat{f} \in S^j(Z)$, afirmamos que

$$\left(\hat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \in S'(Z) \,, \quad \forall t \in I\!R \,. \qquad (3.3)$$

En efecto, sea $t \in IR$, como $\hat{f} \in S^j(Z)$ entonces satisface: $\exists C > 0$, $N \in IN$ tal que $|\hat{f}(k)| \le C|k|^N$, $\forall k \in Z - \{0\}$, usando esto obtenemos

$$|\hat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}| = |\hat{f}(k)||e^{-i\mu k^2 t}| = |\hat{f}(k)| \le C|k|^N \,.$$

Luego,

$$\left(\hat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \in S'(Z) \,.$$

Si definimos

$$u(t) := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \qquad \text{para todo } t\in I\!R\,, \tag{3.4}$$

vemos que $u(t) \in P'$, $\forall t \in IR$, pues aplicamos la transformada inversa de Fourier a

$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)$

2. Probaremos que u definido en (3.4) es solución de (P_1).

Evaluando (3.2) en $t = 0$, obtenemos

$$u(0) = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\widehat{f}\right]^{\vee} = f\,.$$

Además, se verifican

a. $\partial_t\, u(t) = i\mu\, \partial_x^2\, u(t)$ en P', $\forall t \in I\!R$. Esto es, probaremos que se satisface:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} < \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi >}_{<\partial_t u(t),\varphi>:=} = i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi >\,, \ \forall \varphi \in P\,, \quad t\in I\!R\,.$$

En efecto, sea $t \in IR$, $\varphi \in P$ y $h \in IR - \{0\}$, denotamos

$$I_{h,t} :=< \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi >$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{h,t} &= \frac{1}{h}\{< u(t+h),\varphi > - < u(t),\varphi >\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{\lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2(t+h)}\phi_k, \varphi > \right.\\
&\qquad \left. - \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{\lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\left(e^{-i\mu k^2 h}-1\right)\phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\left(\frac{e^{-i\mu k^2 h}-1}{h}\right)\phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\left(\frac{e^{-i\mu k^2 h}-1}{h}\right)\underbrace{< \phi_k, \varphi >}_{=2\pi\widehat{\varphi}(-k)}\right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\pi\left\{\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\left(\frac{e^{-i\mu k^2 h}-1}{h}\right)\widehat{\varphi}(-k)\right\} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\left(\frac{e^{-i\mu k^2 h}-1}{h}\right)\widehat{\varphi}(-k)\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Sea $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{-i\mu k^2 h} - 1 &= \int_0^h [e^{-i\mu k^2 s}]' \, ds \\ &= \int_0^h (-i\mu k^2) e^{-i\mu k^2 s} \, ds \, . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tomando norma a la igualdad (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} |e^{-i\mu k^2 h} - 1| &\leq \int_0^h \mu k^2 \underbrace{|e^{-i\mu k^2 s}|}_{=1} \, ds \\ &= \mu k^2 \underbrace{\int_0^h ds}_{=h} = \mu k^2 h \, . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Esto es, de (3.7) conseguimos

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| \leq \mu k^2 \, . \tag{3.8}$$

Si $h < 0$, procedemos análogamente al caso h positivo, obteniendo:

$$\begin{aligned} |1 - e^{-i\mu k^2 h}| &\leq \int_h^0 \mu k^2 \underbrace{|e^{-i\mu k^2 s}|}_{=1} \, ds \\ &= \mu k^2 \underbrace{\int_h^0 ds}_{=-h} = \mu k^2 (\underbrace{-h}_{=|h|}) \, . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Esto es,

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| \leq \mu k^2 \, . \tag{3.10}$$

Sea $h \in IR - \{0\}$, de (3.8) y (3.10) tenemos

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| \leq \mu k^2 \, . \tag{3.11}$$

Usando la desigualdad (3.11) y que $\hat{f} \in S' (Z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} |\widehat{\varphi}(-k)| \left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| &\leq \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| |\widehat{\varphi}(-k)| k^2 \\ &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\ &= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| < \infty \end{aligned}$$

pues $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Usando el M-Test de Weierstrass, la serie $I_{h,t}$ converge absoluta y uniformemente. Luego, podemos tomar límite y obtener

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{e^{-i\mu k^2 h}-1}{h}\right\}}_{=-i\mu k^2} \\ &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\varphi}(-k)k^2 \,. \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Usando (3.12) tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi}<\varphi,\phi_k>} k^2 \\ &= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} < \varphi, \underbrace{-k^2\phi_k}_{=(ik)^2\phi_k} > \\ &= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} \underbrace{< \varphi, \phi_k'' >}_{=<\varphi'',\phi_k>} \\ &= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} < \phi_k, \varphi'' > \\ &= i\mu \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} < \phi_k, \varphi'' > \\ &= i\mu \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\phi_k, \varphi'' > \\ &= i\mu < u(t), \varphi'' > \qquad (3.13) \\ &= i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > \,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$< \partial_t u(t), \varphi > \; = \; i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi >, \quad \forall \varphi \in P, \quad \forall t \in I\!R.$$

i.e.

$$\partial_t \, u(t) = i\mu \, \partial_x^2 \, u(t) \qquad \text{en } P', \quad \forall t \in I\!R.$$

b. $u \in C(IR, P')$. Esto es, probaremos que

$$u(t+h) \xrightarrow{P'} u(t) \text{ cuando } h \to 0 \,, \forall t \in IR \,.$$

En efecto, sea $t \in IR$ y $\varphi \in P$, probaremos que

$$H_{t,h} := < u(t+h) - u(t), \varphi > \to 0 \,, \text{ cuando } h \to 0 \,.$$

Sabemos que si $\varphi \in P$ entonces $\hat{\varphi} \in S(Z)$. Usando (3.5) tenemos

$$H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(e^{-i\mu k^2 h} - 1\right) \widehat{\varphi}(-k)\,.$$

Sea $h \in IR - \{0\}$ tal que $|h| < 1$, de (3.11) conseguimos

$$\left|e^{-i\mu k^2 h} - 1\right| \leq \mu k^2 |h| < \mu k^2\,. \tag{3.14}$$

Usando (3.14) y que $\hat{f} \in S'(Z)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} \left|e^{-i\mu k^2 h} - 1\right| |\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\
&= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| < \infty
\end{aligned}$$

pues $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Usando el M-Test de Weierstrass concluimos que la serie $H_{t,h}$ converge absoluta y uniformemente. Luego es posible tomar límite y obtener

$$\lim_{h\to 0} H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h\to 0} \left\{e^{-i\mu k^2 h} - 1\right\}}_{=0} = 0\,.$$

Como $t \in IR$ fue tomado arbitrariamente, entonces podemos concluir que

$$u \in C(IR, P').$$

c. $\partial_t u \in C(IR, P')$. Esto es, probaremos que

$$\partial_t u(t+h) \xrightarrow{P'} \partial_t u(t) \ \text{ cuando } h \to 0\,, \ \forall t \in I\!R\,.$$

En efecto, sea $t \in IR$ y $\varphi \in P$, usando el item a) tenemos

$$\begin{aligned}
&< \partial_t u(t+h), \varphi > - < \partial_t u(t), \varphi > \\
&\quad = i\mu\{< \partial_x^2 u(t+h), \varphi > - < \partial_x^2 u(t), \varphi >\} \\
&\quad = i\mu \underbrace{\{< u(t+h), \varphi'' > - < u(t), \varphi'' >\}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

cuando $h \to 0$, desde que vale el item b) con $\varphi^{jj} \in P$.

De b) y c) tenemos que $u \in C^1(IR, Pj)$.

d. Ahora, para $t \in IR$ fijo y arbitrario, si $f_n \xrightarrow{P'} f$ probaremos que:

$$u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)\,, \quad \forall t \in I\!R\,.$$

Sabemos que si $f_n \xrightarrow{P'} f$ entonces $\widehat{f_n} \xrightarrow{S'(Z)} \widehat{f}$, i.e.

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \beta > \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \beta \in S(Z)\,. \tag{3.16}$$

Queremos probar que:

$$< u_n(t), \psi > \longrightarrow < u(t), \psi > \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Así, sea $t \in IR$ fijo y $\psi \in P$, usando la identidad de Parseval generalizada, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} < u_n(t), \psi > &= 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > && (3.17)\\ < u(t), \psi > &= 2\pi < \left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > . && (3.18) \end{aligned}$$

De (3.17) y (3.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} &< u_n(t), \psi > - < u(t), \psi > \\ &\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\beta_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando n $\to \infty+$, desde que $\beta := (\beta_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ pusto que vale (3.16).

Corolario 3.1 *La única solución de (P_1) es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \phi_k = \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}$$

donde $\phi_k(x) = e^{ikx}$, $x \in IR$.

3.2 Grupo de Operadores en P^j

En esta subsección, introduciremos una familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ en P^j y probaremos que son lineales, continuas en el sentido d´ebil y que satisfacen las propiedades de grupo.

Teorema 3.2 *Sea* $t \in IR$*, definimos:*

$T(t) : Pj \quad \to P^j$

$f \to T(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P^j$

entonces $\{T(t)\}_{t\in IR}$ *satisface los siguientes enunciados:*

1. $T(0) = I$.
2. $T(t)$ *es* $\not\subset$ *- lineal y continua* $\forall t \in IR$. *Esto es, para cada* $t \in IR$, *si* $f_n \xrightarrow{P'} f$ *entonces* $T(t)f_n \xrightarrow{P'} T(t)f$.
3. $T(t+r) = T(t) \circ T(r)$, $\forall t, r \in IR$.
4. $T(t)f \xrightarrow{P'} f$ *cuando* $t \to 0$, $\forall f \in P^j$.

Esto es, para todo $f \in P^j$ *fijado, se cumple:*

$$< T(t)f, \psi \to < f, \psi >, \text{ cuando } t \to 0, \ \forall \psi \in P.$$

Prueba.- Primero debemos probar que $T(t)$ está bien definida para todo $t \in IR$. En efecto, sea $f \in P^j$ entonces $\hat{f} \in S^j(Z)$. Luego, de (3.3) tenemos

$$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z} \in S'(Z);$$

tomando la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$\underbrace{\left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}}_{=T(t)f} \in P', \quad \forall t \in I\!R.$$

Esto es, $T(t)$ está bien definida para todo $t \in IR$.

1. Fácilmente obtenemos:

$$T(0)f = \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 0}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\widehat{f}\right]^{\vee} = f, \quad \forall f \in P'.$$

2. Sea $t \in IR$, probaremos que $T(t) : P^j \to P^j$ es $\not\subset$ -lineal. En efecto, sean $a \in \not\subset$, $(\phi, \psi) \in P^j \times P^j$, tenemos

$$\begin{aligned}
T(t)(a\phi + \psi) &= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}[a\phi + \psi]^{\wedge}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}[a\widehat{\phi}(k) + \widehat{\psi}(k)]\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[a\left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} + \left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= a\left[\left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} + \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= a\,T(t)\phi + T(t)\psi.
\end{aligned}$$

Ahora, para $t \in IR$ probaremos que $T(t) : P^{j} \to P^{j}$ es continua. Esto es, si $f_n \xrightarrow{P'} f$ probaremos que $T(t) f_n \xrightarrow{P'} T(t) f$.

Sabemos que si $f_n \xrightarrow{P'} f$ entonces $\hat{f}_n \xrightarrow{S'} \hat{f}$, i.e.

$$< \hat{f}_n, \beta > \to < \hat{f}, \beta >, \text{ cuando } n \to +\infty \text{ , } \forall \beta \in S(Z) \text{ .}$$

i.e.

$$< \hat{f}_n - \hat{f}, \beta > \to 0 \text{ , cuando } n \to +\infty \text{ , } \forall \beta \in S(Z) \text{ . (3.19)}$$

Queremos probar que:

$$< T(t) f_n, \psi > \to < T(t) f, \psi > \text{ cuando } n \to +\infty \text{ , } \forall \psi \in P \text{ .}$$

Así, sea $t \in IR$ fijo y $\psi \in P$, usando la identidad de Parseval generalizada, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} < T(t) f_n, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > . \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} < T(t) f, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > . \end{aligned} \tag{3.21}$$

De (3.20) y (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned} & < T(t) f_n, \psi > - < T(t) f, \psi > \\ &\quad = 2\pi \left\{ < \left(\widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > - < \left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \right\} \\ &\quad = 2\pi \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^2 t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k) \right\} \\ &\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k) \right\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\beta_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, desde que $\beta := (\beta_k)_{k \in Z} \in S(Z)$ y puesto que vale (3.19), esto es $< \hat{f}_n - \hat{f}, \beta > \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$.

3. Sean $t, r \in IR - \{0\}$, probaremos que $T(t) \circ T(r) = T(t + r)$. En efecto, sea $\phi \in P^{j}$,

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2(t+r)}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(\underbrace{\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}}\cdot e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $\phi \in P^j$, usando (3.3) tenemos que

$$\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,, \quad \forall r \in I\!R\,. \tag{3.23}$$

Luego, tomando la transformada inversa de Fourier obtenemos:

$$\left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,, \quad \forall r \in I\!R\,.$$

Así, definimos:

$$g_r := \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,.$$

Esto es,

$$g_r := T(r)\phi\,. \tag{3.24}$$

Tomando la transformada de Fourier a g_r conseguimos:

$$\widehat{g_r} = \left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}$$

esto es

$$\widehat{g_r}(k) = \widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\,, \quad \forall k \in Z\,. \tag{3.25}$$

Usando (3.25) en (3.22) y de (3.24) tenemos:

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{g_r}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' \\ &= T(t)g_r \\ &= T(t)(T(r)\phi) \\ &= [T(t)\circ T(r)](\phi)\,, \quad \forall t, r \in I\!R - \{0\}\,. \end{aligned}$$

Así,

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,,\ \forall t,\ r \in I\!R - \{0\}\,. \tag{3.26}$$

Si $t = 0$ o $r = 0$ entonces la igualdad (3.26) también es verdadera. En efecto, si $t = 0$ tenemos

$$T(0+r) = T(r) = I \circ T(r) = T(0) \circ T(r)\,.$$

Así, con esto concluimos la prueba de

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,, \qquad \forall t,\ r \in I\!R\,. \tag{3.27}$$

4. Sea $f \in P^j$, probaremos que:

$$T(t)f \xrightarrow{P'} f \text{ cuando } t \to 0\,.$$

Esto es, probaremos que:

$$< T(t)f, \varphi > \longrightarrow < f, \varphi > \text{cuando } t \to 0\,,\ \forall \varphi \in P\,.$$

En efecto, sea $\varphi \in P$, tenemos

$$\begin{aligned}
H_t &:= < T(t)f, \varphi > - < f, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{ < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \phi_k, \varphi > - < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) < \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k)\,. \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Sea $t > 0$, de (3.7) obtenemos

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 t\,. \qquad (3.29)$$

Sea $t < 0$, de (3.9) tenemos

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 |t|\,. \qquad (3.30)$$

De (3.29) y (3.30) conseguimos

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 |t|\,, \quad \forall t \in I\!R\,. \qquad (3.31)$$

De (3.31) con $|t| < 1$, tenemos:

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2\,. \qquad (3.32)$$

Luego, usando (3.32) y que $f \in P^j$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)| &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\
&= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| \ < \ \infty
\end{aligned}$$

pues $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Usando el M-Test de Weierstrass concluimos que la serie H_t converge absoluta y uniformemente. Luego,

$$\lim_{t\to 0} H_t \;=\; 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{t\to 0}\{e^{-i\mu k^2 t} - 1\}}_{=0} \;=\; 0 \ .$$

Así, hemos probado

$$\lim_{t\to 0} < T(t)f, \varphi > \,=\, < f, \varphi > \ .$$

Teorema 3.3 *Para todo $f \in P'$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ del Teorema 3.2, tenemos que la aplicación*

$$\begin{aligned} \xi : IR &\to P' \\ t &\to T(t)f \end{aligned}$$

es continua en IR. Esto es,

$$T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)\, f \text{ cuando } h \to 0,\ \forall t \in IR \qquad (3.33)$$

(es la continuidad en t).

La convergencia (3.33) nos dice que para cada $t \in IR$ fijado, vale

$$< T(t+h)f, \psi > \longrightarrow\, < T(t)f, \psi >, \text{ cuando } h \to 0\ ,\ \forall\ \psi \in P\ .$$

Si $t = 0$, se tiene la continuidad de ξ en 0, que es el item 4) del Teorema 3.2.

Prueba.- Sea $t \in R - \{0\}$, fijo arbitrario y $f \in P'$, entonces $g := T(t)f \in P'$. Usando el item 4) del Teorema 3.2, tenemos que $T(h)g \xrightarrow{P'} g$ cuando $h \to 0$. Esto es

$$\underbrace{\underbrace{T(h)(T(t)f)}_{=[T(h)\circ T(t)]f}}_{=T(h+t)f} \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ cuando } h \to 0\,,$$

donde usamos el item 3) del Teorema 3.2.

Observacion 3.1 *Los resultados obtenidos en los Teoremas 3.2 y 3.3 también son v́alidos para la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\in IR}$ definida como*

$$\begin{aligned} S(t) : P' &\longrightarrow P' \\ f &\rightarrow S(t)f := \left[\left(e^{i\mu k^2 t}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \end{aligned}$$

para $t \in IR$. Su prueba es similar.

3.3 Versión del Teorema 3.1 mediante la Familia $\{T(t)\}_{t\in IR}$

Mejoraremos el enunciado del Teorema 3.1, usando la familia de Operadores débilmente continuos $\{T(t)\}_{t\in IR}$.

Teorema 3.4 *Sea $f \in P'$ y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ del Teorema 3.2, definiendo $u(t) := T(t)f \in P'$, $\forall t \in IR$, entonces $u \in C(IR, P')$ es la única solución de (P_1). Además, u depende continuamente de f. Esto es, dados f_n, $f \in P'$ tal que $f_n \xrightarrow{P'} f$ implica $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in IR$, donde $u_n(t) := T(t)f_n$, $\forall t \in IR$ (i.e. u_n es solución de (P_1) con dato inicial f_n).*

Prueba.- La prueba es análoga a la prueba del Teorema 3.1.

Corolario 3.2 *Sea $f \in P'$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ del Teorema 3.4, entonces $\exists\ \partial_t T(t)f$, $\forall t \in IR$ y la aplicacion*

$$\begin{aligned} : \mathbb{R} &\rightarrow P' \\ t &\rightarrow \partial_t T(t) f = i\mu\partial_x^2 T(t) f \end{aligned}$$

es continua en IR. Esto es,

$$\partial_t T(t+h) f \xrightarrow{P'} \partial_t T(t) f \quad cuando\ h \rightarrow 0\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,. \tag{3.34}$$

(3.34) nos dice que para cada $t \in IR$ fijado, vale:

$$< \partial_t T(t+h)f, \varphi > \longrightarrow < \partial_t T(t)f, \varphi > \text{cuando } h \rightarrow 0\ ,\ \forall \varphi \in P\,.$$

Prueba.- Tenemos

$$\begin{aligned} &< \partial_t T(t+h) f, \varphi > \; - \; < \partial_t T(t) f, \varphi > \\ &\quad = i\mu\{< \partial_x^2 T(t+h) f, \varphi > - < \partial_x^2 T(t) f, \varphi >\} \\ &\quad = i\mu\{\underbrace{< T(t+h) f, \varphi'' > - < T(t) f, \varphi'' >}_{\longrightarrow 0}\} \;\longrightarrow\; 0 \end{aligned}$$

cuando $h \rightarrow 0$, debido al Teorema 3.3 con $\psi := \varphi''$, desde que $\varphi'' \in P$.

Corolario 3.3 *Sea $f \in P'$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ del Teorema 3.4, entonces la solución de (P_1): $u(t) := T(t)f$, $\forall t \in IR$, satisface $u \in C^1(IR, P')$.*

Prueba.- Sale como consecuencia del Corolario 3.2.

3.4 Comentarios de generalización

A continuación daremos algunas importantes observaciones de generalización.

Observación 3.2 *Este estudio nos permite generalizar el problema (P_1) y obtener resultados de existencia de solución en P' para el problema:*

$$(\mathcal{W}_m)\quad\left|\begin{array}{l} u\in C^1(I\!R,P')\\ \partial_t u - i\mu\partial_x^m u = 0 \ \in P'\\ u(0)=f\in P'\,. \end{array}\right.$$

cuando m es un número par no múltiplo de cuatro. Además, introduciendo una familia de operadores débilmente continuos $\{T_m(t)\}_{t\in IR}$*, definidas por*

$$\begin{array}{rccl} T_m(t):\ P' & \longrightarrow & P' & \\ f & \longrightarrow & T_m(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,, \end{array}$$

se consigue mejorar los resultados para (W_m)*. Para esto podemos citar [5].*

Observación 3.3 *Cuando m es par múltiplo de cuatro, el problema* (W_m) *también posee solución en* P^j*, y en este caso se debe introducir una familia de operadores débilmente continuos* $\{S_m(t)\}_{t\in IR}$*, definidas por*

$$\begin{array}{rccl} S_m(t):\ P' & \longrightarrow & P' & \\ f & \longrightarrow & S_m(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{i\mu k^m t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,, \end{array}$$

para mejorar los resultados. Para esto, seguir ideas expuestas en esta sección, considerando que $(ik)^m = k^m$ *para todo* $k\in Z$*.*

Observación 3.4 *Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Para cada* $m\in IN$ *se tiene que la familia* $\{T_m(t)\}_{t\in IR}$ *es un grupo de oper- adores en* P^j*. Así, nosotros usamos el caso m par no múltiplo de cuatro en la observación 3.2.*

2. *Para cada* $m\in IN$ *se tiene que la familia* $\{S_m(t)\}_{t\in IR}$ *es un grupo de operadores en* P^j*. Así, nosotros usamos el caso m par múltiplo de cuatro en la observación 3.3.*

CONCLUSIONES

En nuestro estudio de la ecuación de Schrödinger en el espacio distribucional periódico P^j, para el caso homogéneo (P_1) hemos obtenido los siguientes resultados:

1. Probamos la existencia, unicidad y regularidad de solución del problema (P_1). Así también probamos la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

2. Introducimos una familia de operadores en P^j: $\{T(t)\}_{t\in IR}$ y probamos que estas son lineales y débilmente continuos en P^j. Además demostramos que forman un grupo de operadores lineales débilmente continuos en P^j.

3. Con la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ mejoramos el Teorema 3.1.

4. En contraste a lo obtenido en P^j con lo que fue estudiado en H^s_{per} vemos que los operadores $T(t)$ no son unitarios debido a la topología de P^j.

5. Está matemáticamente enriquecido desde que generamos familias de operadores.

6. Tratamos su generalización y damos algunas observaciones.
7. Finalmente, debemos indicar que esta técnica puede ser aplicada a otras ecuaciones de evolución en P^j.

REFERENCIAS

1. Iorio, R. and Iorio V. (2001) Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University.

2. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

3. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación de Schrödinger no homogénea en espacios de Sobolev Periódico. Se- lecciones Matem´atica. 2021; 08(01): 37-51.

4. Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02): 348-359.

5. Santiago Ayala, Y. Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuación de Schrödinger generalizada. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(01): 91-101.

6. Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger type homogeneous model. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 919-932.