INMERSIONES Y PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE SOBOLEV PERIÓDICO

Data de aceite: 02/06/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este trabajo estudiamos los espacios de Sobolev modelados en L^2 caso periódico. Probamos importantes resultados de este espacio, su conexión con los $l^2(\mathbb{Z})$-con peso, mediante la transformada de Fourier generalizada; tratamos sus inmersiones densas e inmersiones de Sobolev cuando $s>\frac{1}{2}$ y se evidencia una operación producto que lo hace un álgebra de Banach. Finalmente, damos algunos comentarios y aplicaciones a ecuaciones de evolución.
PALABRAS CLAVE: Espacios de Sobolev periódico, inmersiones de Sobolev, álgebra de Banach, transformada de Fourier, Distribuciones peródicas.

IMMERSIONS AND PROPERTIES OF THE PERIODIC SOBOLEV SPACES

ABSTRACT: In this work we study the Sobolev spaces modeled in L^2 periodic case. We prove important results of this space, its connection with the $l^2(\mathbb{Z})$-with weight, through the generalized Fourier transform; we treat its dense immersions and Sobolev immersions when $s>\frac{1}{2}$ and a product operation is evidenced, which makes it a Banach algebra. Finally, we give some comments and applications to equations of evolution.
KEYWORDS: Periodic Sobolev spaces, Sobolev immersions, Banach algebra, Fourier transform, periodic distributions.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artítulo estudiaremos los espacios de Sobolev modelados en L^2 caso periódico. Para obtener información general de espacios de Sobolev modelados en L^p, podemos citar Adams [1]. Estos espacios son sumamente útiles en el análisis de las ecuaciones diferenciales parciales. Para visualizar su riqueza en el análisis de algunas ecuaciones de evolución, citamos [2], [3], [5], [6], [7], [8]-[13].

Es importante enfatizar que estos espacios permiten hacer una clasificación de las distribuciones periódicas, en función de sus regularidades. Como referencia para este artículo, citamos a Iorio [3].

Queremos resaltar que Iorio [3] es fuente teórica, de ideas y problemas propuestos. No podemos dejar de mencionar la riqueza de información de Terence [15] y Kato [4]. Y para el caso periódico también es importante mencionar a Linares and Ponce [5].

Nuestro trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, damos los resultados preliminares necesarios para la comprensión de este artículo. Así, tratamos intuitivamente la convergencia en *IR* de la función Zeta de Riemann, estudiamos los espacios l^p con peso: l_s^p, introducimos la desigualdad de Young para la convolución de sucesiones numéricas, estudiamos desigualdades tipo potencias en *IR*, damos la definición de Álgebra de Banach y finalmente presentamos un diagrama que resume las inclusiones continuas e inmersiones densas en las distribuciones periódicas. En la sección 3, intoducimos los espacios de Sobolev periódico: H^s_{per} y sus propiedades. En la sección 4, estudiamos las inclusiones densas de H^s_{per}. En la sección 5, caracterizamos los espacios H^s_{per} cuando *s* es un número natural. En la sección 6, estudiamos los espacios H^s_{per} cuando s>$\frac{1}{2}$, probando el importante Lema de

Inmersión de Sobolev. En la sección 7, obtenemos una operación producto en H^s_{per} cuando s>$\frac{1}{2}$, que lo hace a H^s_{per} un Álgebra de Banach.

En la sección 8 presentamos un diagrama que resume las inclusiones continuas e inmersiones densas en H^s_{per}. Y comentamos de su aplicación en las ecuaciones de evolución.

Finalmente, en la sección 9, damos las conclusiones de nuestro estudio.

2 I PRELIMINARES

2.1 La función Zeta de Riemann: Convergencia

Introducimos la función Zeta de Riemann ζ(*r*), que está definida por la serie de Dirichlet

$$\zeta(r) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$$

y que probaremos su convergencia cuando $r > 1$.

También, introducimos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1 *Se verifca la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx \,,$$

desde que la función f, $f(x) := \frac{1}{x^r}$ *es decreciente, continua y positiva en* [1,+∞).

Luego, de la igualdad previa se obtiene:

Proposición 2.2 *La serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$ *converge si y solo si la intengral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx$ *existe.*

Finalmente, todo se reduce a querer saber ¿para que valores *r* la integral existe? La respuesta es la siguiente:

Proposición 2.3 *La integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx$ *existe si y solamente si r* > 1.

Prueba.- Esto se deduce rápidamente de los siguientes casos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}dx = \frac{1}{r-1} \lim_{M\to+\infty} \{1 - M^{-r+1}\} = \begin{cases} \frac{1}{r-1}\,, & \text{si } \; r > 1 \\ +\infty\,, & \text{si } \; r < 1 \end{cases}$$

y

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to+\infty} \{Ln(M) - Ln(1)\} = +\infty\,, \quad \text{si } \; r = 1\,.$$

Finalmente, de estas proposiciones podemos concluir con la prueba del siguiente importante resultado.

Proposición 2.4 *La función Zeta de Riemann está bien definida. i.e. La serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$$

es convergente si r > 1.

Proposición 2.5 *si* $s > \frac{1}{2}$ *entonces*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+k^2)^s} < \infty\,.$$

Prueba.- De la Proposición previa haciendo 2*s* = *r* > 1, se tiene la convergencia de ζ(2*s*).

2.2 Los espacios $l^p_s(Z)$

Definición 2.1 *Sea s* ∈ *IR y* 1 ≤ *p* < ∞, *definimos el conjunto:*

$$l^p_s(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C}\,;\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p < \infty \right\}$$

con dos operaciones:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n)\,, \quad (x_n), (y_n) \in l^p_s(Z) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,, \quad (x_n) \in l^p_s(Z)\,. \end{aligned}$$

Así, $l_s^p(Z)$ con esas operaciones es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Introducimos la aplicación

$$\|(x_n)\|_{s,p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

que hace de $l_s^p(Z)$ un espacio normado y completo, esto es $(l_s^p(Z), \|\cdot\|_{s,p})$ es un espacio de Banach.

Vemos que si $s = 0$ entonces $l_0^p(Z) = l^p(Z)$.

A continuación se obtienen los siguientes resultados, cuya prueba puede ser encontrada en [14].

Proposición 2.6 *La norma $\|\cdot\|_{s,p}$ viene de un producto interno siy solamente si p = 2. Esto es, si $p \neq 2$, la norma $\|\cdot\|_{s,p}$ no viene de un producto interno. El caso $p = 2$, $\|\cdot\|_{s,2}$ es la norma inducida del producto interno $<\cdot,\cdot>_s$ definido en $l_s^2(Z)$ por*

$$< x, y >_s := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k}$$

para $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Esto es,

$$\|x\|_{s,2} = \|x\|_{<\cdot,\cdot>_s} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición 2.7 *l_s^2 (Z) es un espacio de Hilbert, Reflexivo con $(l_s^2(Z))' = l_s^2(Z)$ y Separable.*

2.3 Convolución de sucesiones numéricas. La desigualdad de Young y generalización

Definición 2.2 (Convolución de sucesiones numéricas) *Sean α y β sucesiones, la convolución de α y β es la sucesión $\alpha * \beta$* definida por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \beta_{k-j} \quad \textit{siempre que tenga sentido.}$$

Se satisface la siguiente importante desigualdad, que será usado en la demostración de que H^s_{per} es un álgebra de Banach si $s > \frac{1}{2}$.

Proposición 2.8 (Desigualdad de Young) *Sean $\alpha \in l^1$ y $\beta \in l^2$ entonces la convolución de α y β satisface: $\alpha * \beta \in l^2$ y*

$$\|\alpha * \beta\|_{l^2} \leq \|\alpha\|_{l^1} \|\beta\|_{l^2} .$$

En particular, para todo $\alpha \in l^1$ fijado, la aplicación L definida por

$$\begin{aligned} L : l^2 &\longrightarrow l^2 \\ \beta &\longmapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

es un operador lineal acotado de l^2 con cota: $\|L\| \leq \|\alpha\|_{l^1}$.

Prueba.- Tomando módulo a $(\alpha * \beta)_k$ y considerando $|\alpha_j| = |\alpha_j|^{\frac{1}{2}} |\alpha_j|^{\frac{1}{2}}$ e inmediatamente aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se consigue para todo $k \in Z$:

$$
\begin{aligned}
|(\alpha * \beta)_k| &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j \beta_{k-j}| \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^{\frac{1}{2}} (|\alpha_j|^{\frac{1}{2}} |\beta_{k-j}|) \\
&\leq \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| |\beta_{k-j}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\alpha\|_{l^1}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| |\beta_{k-j}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Elevando al cuadrado la desigualdada (2.1), sumando sobre k e intercambiando el orden de la suma obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|\alpha * \beta\|_{l^2}^2 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |(\alpha * \beta)_k|^2 \\
&\leq \|\alpha\|_{l^1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| |\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\beta_m|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1}^2 \|\beta\|_{l^2}^2 .
\end{aligned}
$$

A seguir introducimos una generalización de la Desigualdad de Young.

Proposición 2.9 *Sean* $\alpha \in l^p$ *y* $\beta \in l^q$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ *con* $1 \leq p,q,r \leq \infty$ *entonces la convolución de* α *y* β *satisface:* $\alpha * \beta \in l^r$ *y*

$$\|\alpha * \beta\|_r \leq \|\alpha\|_p \|\beta\|_q$$

2.4 Importantes Acotaciones

A continuación, tenemos un importante resultado, útil en la prueba de que H^s_{per} es álgebra de Banach si $s > \frac{1}{2}$.

Lema 2.1 *Sean* a *y* $b \in [0,\infty)$ *y* $s \geq 0$. *Entonces existen constantes positivas* m_s *y* M_s *dependiendo unicamente de s, tal que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a + b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \qquad (2.2)$$

Prueba.- Si $a = 0$, no hay nada que probar. Así, consideramos $a > 0$. Ahora, podemos observar que (2.2) es equivalente a

$$m_s \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^s \right) \leq \left(1 + \frac{b}{a} \right)^s \leq M_s \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^s \right) . \qquad (2.3)$$

Así, es suficiente probar que existen m_s y M_s tal que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1 + r)^s \leq M_s(1 + r^s)\ ,\ \forall r \in [0,\infty). \tag{2.4}$$

Observamos que para todo r, $s \geq 0$, tenemos

$$1 \leq (1 + r)^s \text{ y } r^s \leq (1 + r)^s\,,$$

y sumando ambas desigualdades se consigue:

$$1 < 1 + r^s \leq 2(1 + r)^s\,,$$

i.e.

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{m_s:=} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s}\,,\ \forall r, s \geq 0 \tag{2.5}$$

Ahora, para $r > 1$, tenemos

$$(1 + r)^s \leq (r + r)^s = (2r)^s = 2^s r^s \leq 2^s(1 + r^s),$$

i.e.

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s\,,\ \forall r > 1 \tag{2.6}$$

Observamos que la función $F(r) := \frac{(1+r)^s}{1+r^s} > 0$ es continua en el compacto $[0,1]$, luego ella alcanza máximo y mínimo en ese intervalo, i.e. $\exists r_i \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < F(r_1) &= \min_{r\in[0,1]} F(r) \text{ y} \\ 0 < F(r_2) &= \max_{r\in[0,1]} F(r)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observamos que F nunca se anula en $[0,1]$, entonces $F(r_i) > 0$. Ahora, de (2.6) y (2.7), basta tomar el máximo entre 2^s y $F(r_2)$, es decir

$$F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq M_s := \max\{2^s, F(r_2)\}\,,\ \forall r \geq 0. \tag{2.8}$$

De (2.5) y (2.8) se concluye.

2.5 Álgebra de Banach

Definición 2.3 *Un* **Álgebra de Banach** *es un espacio de Banach X, con un produto $(x,y) \in X \times X \to xy \in X$ tal que, $\forall x,y,z \in X$ y $\forall r \in \mathbb{C}$ se satisfacen*

a) $(xy)z = x(yz)$,

b) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,

c) $(x + y)z = xz + yz$,

d) $\|xy\|X \leq \|x\|X\|y\|X$.

2.6 Diagrama resumen de Distribuciones Periódicas

Definición 2.4 *Sea*

$$P :\ =\ C^{\infty}_{per}([-\pi,\pi]),$$

el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciable y periódica con *periodo* 2π.

Este espacio es un espacio métrico completo.

También,

$$\begin{aligned} P' \quad := \quad & \{T : P \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineal tal que } \exists \psi_n \in P \text{ y} \\ & \qquad < T, \varphi >= \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\, dx \,,\, \forall \varphi \in P \ \Big\} \\ = \quad & (P)' \,. \end{aligned}$$

Esto es, *P'* es el dual topológico de *P*. Así, *P'* es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

Ahora, queremos resumir mediante com diagrama las importantes ropriedades de las distribuciones periódicas *P'*.

Esto es, las siguientes inclusiones son continuas com imagen densa

$$\begin{array}{ccccc} P & \hookrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & P' \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ S(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & S'(Z) \end{array}$$

donde *S*(*Z*) es el espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por

$$S(Z) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \,,\, \alpha_k \in \mathbb{C} \,/\, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \text{ y } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty \;,\; \forall n \geq 1 \right\}$$

y *S'*(*Z*) es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por

$$S'(Z) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \,,\, \alpha_k \in \mathbb{C} \;/\, \exists\, C > 0 \,, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ con } |\alpha_k| \leq C|k|^N \,,\, \forall k \neq 0 \right\} .$$

3 | LOS ESPACIOS H^s_{per} Y PROPIEDADES

Empezamos esta sección introduciendo la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea s ∈ IR, definimos*

$$H^s_{per}([-\pi,\pi]) := \left\{ f \in P' \ tal\ que \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\} \subset P' \,.$$

Observación 3.1 *Sea s ∈ IR, se verifica que* $H^s_{per} := H^s_{per}([\pi,\pi])$ *es un espacio vectorial.* **Definición 3.2** *Sea s ∈ IR, definimos en* H^s_{per} *la aplicación* $\|\cdot\|_s$

$$\|f\|_s := \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;,\; f \in H^s_{per}.$$

Observación 3.2 *La aplicación* $\|\cdot\|_s$ *es una norma en* H^s_{per}*. Así,* $(H^s_{per}\|\cdot\|_s)$ *es un espacio normado.*

Observación 3.3 *Para* $s \in IR$*, se verifican las siguientes equivalencias:*

$$f \in H^s_{per} \Leftrightarrow \left((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2(Z) \Leftrightarrow (\widehat{f}(k))_{k=-\infty}^{+\infty} = \widehat{f} \in l^2_s(Z)$$

donde $l^2_s(Z) = \left\{\alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \ tal\ que \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\alpha_k|^2 < \infty\right\}$ $y\ (l^2_s(Z), \|\cdot\|_{l^2_s})$ *es un espacio normado, con la norma*

$$\|\alpha\|_{l^2_s} = \left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Así, $\|f\|_s = \|\widehat{f}\|_{l^2_s}$.

Observe que $\|\cdot\|_{l^2_s} = \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_{s,2}$.

Definición 3.3 *Para* $s \in IR$*, definimos en* H^s_{per} *la aplicación* $<\cdot,\cdot>_s$

$$< f, g >_s := 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Observación 3.4 *Para* $s \in IR$*, se verifica que* $(H^s_{per}, <\cdot,\cdot>_s)$ *es un espacio de Hilbert, i.e. el espacio* H^s_{per} *es completo.*

Observación 3.5 *Para* $s = 0$*, tenemos*

$$f \in H^0_{per} \Leftrightarrow \widehat{f} \in l^2(Z) \Leftrightarrow f \in L^2_{per}([-\pi,\pi]),$$

i.e.

$$\|f\|_{H^0_{per}} = \sqrt{2\pi}\|\widehat{f}\|_{l^2} = \|f\|_{L^2([-\pi,\pi])}.$$

4 I INCLUSIONES DENSAS

Proposición 4.1 *Se satisface la siguiente inclusión*

$$P \subset H^s_{per}, \ \forall s \in I\!R$$

y además dicha inclusión es densa, i.e. $\overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}} = H^s_{per}, \ \forall s \in I\!R.$

Prueba.- En efecto, primero probaremos que $P \subset H^s_{per}$, pues esto implica $\overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}} \subset H^s_{per}$.

Recordemos que $P \subset P'$, vía $T_u \equiv u$, donde $< Tu, \phi > = \int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)u(x)dx, \forall\phi \in P$. También en P vale:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(k)e^{ikx}.$$

Así, para $u \in P$ valen las siguientes igualdades:

$$u' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u'}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\widehat{u}(k)e^{ikx}$$

$$u'' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u''}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-k^2)\widehat{u}(k)e^{ikx}$$

y así sucesivamente, se cumple para todas las derivadas de *u*, i.e.

$$u^{(j)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u^j}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^j)\widehat{u}(k)e^{ikx} .$$

Si $u \in P$ entonces vale la identidad de Parseval, y como las u^j también estan en P para $j = 1,2,...$, también vale la identidad de Parseval para estas funciones. Aplicamos esto a u y u' respectivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(k)|^2 < \infty \, , \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u'}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2|\widehat{u}(k)|^2 < \infty \, . \tag{4.2}$$

Sumando (4.1) y (4.2) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\}\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\widehat{u}(k)|^2 < \infty$$

i.e.$u \in H^1_{per}$ y $u \in H^1([-\pi,\pi])$.

Obviamente de (4.1) tenemos que $u \in H^0_{per}$.

Así, por la Identidad de Parseval aplicado a u^j, para $j = 1,2,...$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u^j(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u^j}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2j}|\widehat{u}(k)|^2 < \infty. \tag{4.3}$$

Usando la Fórmula del binomio de Newton, para $s \in Z^+$ obtenemos $(1 + |k|^2)^s = \sum_{j=0}^{s} C_j|k|^{2j}$, donde

$$C_j = \begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix} = \frac{1}{j!}\sum_{t=0}^{j-1}(s-t) = \frac{s!}{j!(s-j)!}$$

y de la afirmación (4.3) obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2 < \infty,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in Z^+$.

Para el caso $s \in IR^+$, sabemos que existe $m \in Z^+$ tal que $s \leq m$ y vale la desigualdad

$$(1 + |k|^2)^s \leq (1 + |k|^2)^m ,$$

luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^m|\widehat{u}(k)|^2 < \infty\,,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in IR^+$.

Para $s \in IR^-$ tenemos $s = -r$, con $r \in IR^+$ y vale $1 \leq (1 + |k|^2)$, de donde se obtiene $1 \leq (1 + |k|^2)^r$, esto es

$$(1+|k|^2)^s = \frac{1}{(1+|k|^2)^r} \leq 1$$

y usando (4.1) obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2 \leq \sum_{k=\infty}^{+\infty}|\widehat{u}(k)|^2 < \infty,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in IR^-$. Así, hemos probado que $P \subset H^s_{per},\ \forall s \in I\!R$.

Observe que también se puede usar la versión generalizada del binomio de Newton.

Ahora probaremos que $H^s_{per} \subseteq \overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}}$. Para esto, sea $g \in H^s_{per}$, definimos α_n tal que

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} \widehat{g}(k) & \text{si } |k| \leq n \\ 0 & \text{si } |k| > n\,. \end{cases}$$

Afirmamos que $\alpha_n \in S(Z)$. En efecto, para n fijo tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^j|\alpha_n(k)| = \sum_{k=-n}^{n}|k|^j|\widehat{g}(k)| \;<\; \infty\,,\ \forall j\,.$$

Luego, $g_n := \alpha_n^{\vee} = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(k)e^{ikx}$ con $g_n \in P$ y $\widehat{g_n} = \alpha_n$.

Además, se verifica

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_s^2 &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{g_n}(k)-\widehat{g}(k)|^2 \\ &= 2\pi\sum_{|k|>n}(1+|k|^2)^s|\widehat{g}(k)|^2 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, pues $g \in H^s_{per}$. Esto es, $\exists g_n \in P$ tal que $\|g_n - g\|_s \to 0$ cuando $n \to +\infty$, i.e. $g \in \overline{P}^{\|\cdot\|_s}$.

Proposición 4.2 *Sea $s,r \in IR$ tal que $s \geq r$ entonces $H^s_{per} \subset H^s_{per}$. i.e. H^s_{per} está inmerso continuamente y densamente en H^s_{per} y vale*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s\,,\ \forall f \in H^s_{per}.$$

En particular, tenemos que si $s \geq 0$, entonces

$$H^s_{per} \subset L^2([-\pi,\pi]).$$

Además , vale la identificación "isométricamente isomorfo"

$$(H^s_{per})' \equiv H^{-s}_{per}\,, \; \forall s \in I\!R\,,$$

donde la dualidad es implementada por el par

$$< f, g >_* = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\,, \quad \forall f \in H^{-s}_{per}\,, \; g \in H^s_{per}. \tag{4.4}$$

Prueba.- Como 1 ≤ (1 + |*k*|²) entonces $(1+|k|^2)^r \le (1+|k|^2)^s$ si $r \le s$. Así, se satisface

$$0 \le \frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s} \le 1 \;\; \text{si} \;\; r \le s\,. \tag{4.5}$$

Usando (4.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^r |\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s}}_{\le 1} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \; < \; \infty
\end{aligned} \tag{4.6}$$

siempre que $f \in H^s_{per}$. Multiplicando por 2π a ambos lados de la desigualdad (4.6) obtenemos que $f \in H^r_{per}$ si $f \in H^s_{per}$ (i.e. $H^s_{per} \subset H^r_{per}$) y además

$$\|f\|_r \le \|f\|_s\,.$$

Con esto se ha probado la inclusión continua.

A seguir probaremos que la inclusión es densa, i.e. $\overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r} = H^r_{per}$. En efecto, basta mostrar $H^r_{per} \subset \overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r}$.

Sea $g \in H^r_{per}$ entonces usando la densidad de P en H^r_{per} tenemos que existe $g_n \in P$ tal que $g_n \to g$ en H^r_{per}. Como también $P \subset H^s_{per}$, entonces $g_n \in H^s_{per}$ y $g_n \to g$ en la norma $\|\cdot\|_r$ entonces $g \in \overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r}$.

Si $f \in H_{per}^{-s}$, la igualdad (4.4) nos permite definir L_f como:

$$L_f(g) = < f, g >_*\,, \; \forall g \in H^s_{per}.$$

Esta L_f es un funcional lineal continuo en H^s_{per}. Esto es, L_f es lineal con $\|L_f\| \le \|f\|_{-s}$, i.e. $L_f \in (H^s_{per})'$.

Sea $\psi \in (H^s_{per})'$, utilizando el Teorema de Representación de Riesz tenemos que $\exists! \phi \in H^s_{per}$ tal que

$$\|\phi\|_s = \|\psi\|, \tag{4.7}$$

y

$$< \psi, g > \; = \; < g, \phi >_s\,, \; \forall g \in H^s_{per}. \tag{4.8}$$

Así, de (4.8) tenemos

$$\begin{aligned} < \psi, g > &= < g, \phi >_s \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{g}(k)\overline{\widehat{\phi}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)(1+|k|^2)^s\overline{\widehat{\phi}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\overline{(1+|k|^2)^s\widehat{\phi}(k)} \, . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sabemos que $\phi \in H^s_{per}$ entonces

$$\left((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2 \, . \tag{4.10}$$

Si definimos

$$\widehat{f}(k) := \overline{(1+|k|^2)^s\widehat{\phi}(k)} \, , \ \forall k \in Z \, , \tag{4.11}$$

tenemos que $f \in H_{per}^{-s}$. En efecto, de la definición (4.11) de $\hat{f}(k)$ y (4.10) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}|\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s}|\overline{(1+|k|^2)^s\widehat{\phi}(k)}|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty \, . \end{aligned} \tag{4.12}$$

De (4.9) tenemos que existe $f \in H^{-s}_{per}$ tal que

$$\begin{aligned} < \psi, g > &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\widehat{f}(k) \\ &= < f, g >_* \\ &= L_f(g) \, , \ \forall g \in H^s_{per} \, , \end{aligned} \tag{4.13}$$

i.e. para $\psi \in (H^s_{per})'$ existe $f \in H^{-s}_{per}$ tal que ψ = L_f

De (4.12) y (4.7) tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{-s} &= \|\phi\|^2_s \\ &= \|\psi\|^2 \, , \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\|f\|_{-s} = \|\psi\|$. Esto es $(H^s_{per})'$ es isométricamente isomorfo a H^s_{per}.

5 | CARACTERIZACIÓN DE $H^m_{per}, m \in IN$

Proposición 5.1 (Caracterización de H^m_{per}, con $m \in IN$) *Sea $m \in IN$ entonces*

$$f \in H^m_{per} \text{ sii } \partial^j f = f^j \in L^2_{per} \, , \quad \forall j \in \{0,1,\dots,m\},$$

donde la derivada es tomada en el sentido de P' y $f^0 = f$.

Además, las normas $\|\cdot\|_m$ y $|||\cdot|||_m$ son equivalentes, i.e. existen constantes positivas A_m y B_m tal que $A_m\|f\|_m \leq |||f|||_m \leq B_m\|f\|_m$, $\forall f \in H^m_{per}$, donde

$$|||f|||_m := \left[\sum_{j=0}^{m} \|\partial^j f\|^2_{L^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- Sea $f \in H^m_{per}$, entonces

$$\left((1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2. \tag{5.14}$$

Por otro lado, observamos que

$$|(ik)^j\widehat{f}(k)| = |ik|^j|\widehat{f}(k)| \leq (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}|\widehat{f}(k)|, \text{ para } j = 0,1,...,m. \tag{5.15}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
1 &\leq (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}} \\
|k| &\leq (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} \leq [(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}]^m \\
|k|^j &\leq [(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}]^j \leq [(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}]^m,
\end{aligned}$$

para *j* = 0,1,...,*m*.

Luego, de (5.14) y (5.15) tenemos que $\left((ik)^j\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2$ para j= 0,1, . . . , m. Como $|\widehat{f^j}(k)| = |(ik)^j\widehat{f}(k)|$ para j= 0,1, . . . , m, entonces $\left(\widehat{f^j}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2$ para $j =$0,1. . . , m y por lo tanto $f^j \in L^2([-\pi,\pi])$ para j= 0,1, . . . , m y así la Identidad de Parseval y (5.15) nos permite realizar la siguiente estimativa

$$\begin{aligned}
|||f|||^2_m &:= \sum_{j=0}^{m}\|f^j\|^2_{L^2} \\
&= 2\pi\sum_{j=0}^{m}\|\widehat{f^j}\|^2_{l^2} \\
&= 2\pi\sum_{j=0}^{m}\|(ik)^j\widehat{f}\|^2_{l^2} \\
&= 2\pi\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|(ik)^j\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^m|\widehat{f}(k)|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m}\|f\|^2_m \\
&= (m+1)\|f\|^2_m
\end{aligned} \tag{5.16}$$

i.e.k $|||f|||_m \leq \sqrt{m+1}\|f\|_m$.

Recíprocamente, si $f^j \in L^2([-\pi,\pi])\ \forall j = 0, 1, \ldots m,$ entonces $\widehat{f^j} \in l^2$, i.e.

$$\left((ik)^j \widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2 .$$

Ahora, recordemos que $|i^j| = 1$ y que $(1+|ik|^2)^m = \sum_{j=0}^{m} c_j |ik|^{2j}$ con $c_j = \binom{m}{j}$. Así, usando esto y la Identidad de Parseval obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_m^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^m |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} c_j |ik|^{2j}\right) |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^{m} c_j \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |(ik)^j \widehat{f}(k)|^2\right) \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^{m} c_j \|\widehat{f^j}\|_{l^2}^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m} c_j \|f^j\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\max_{j\in\{0,\ldots,m\}} c_j\right) |||f|||_m^2 < \infty .
\end{aligned}$$

Es decir, $\|f\|_m \leq \sqrt{\max_{j\in\{0,\ldots,m\}} c_j}\ |||f|||_m$ o mejor a ́un

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\max_{j\in\{0,\ldots,m\}} c_j}}\right) \|f\|_m \leq |||f|||_m .$$

6 I LEMA DE INMERSIÓN DE SOBOLEV

El siguiente lema es usado fundamentalmente en el estudio de ecuaciones de evolución no lineal.

Teorema 6.1 *Si* $s>\frac{1}{2}$ *entonces se verifican*

1. La serie de Fourier de $f \in H^s_{per}$ *converge absoluta y uniformemente en* $[-\pi,\pi]$*, i.e. la serie de Fourier de f*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

converge absoluta y uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

2. Lema de Inmersión de Sobolev: $H^s_{per} \subset C_{per}$ *con inclusión continua, i.e. a* $f \in$

H^s_{per} le hace corresponder la función $g \in Cper$, donde $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ y satisface $\widehat{f} \in l^1(Z)$ *y*

$$\|g\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C_s\|f\|_s\,,\ \forall f \in H^s_{per}, \tag{6.17}$$

donde

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- Recordemos previamente que si $s>\frac{1}{2}$ entonces

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{6.18}$$

Desde que $s>\frac{1}{2}$ usamos (6.18) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para conseguir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(k)|}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{s}|\widehat{f}(k)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_s\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{-s}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty\,.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Así, $\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^1$ y además debido al M-test de Wierstrass tenemos que la serie de Fourier de f

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en [−π, π]. Así, si definimos

$$g(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}\,,$$

tenemos que $g \in C_{per}([-\pi,\pi])$.

Afirmamos que $f = g$ en P'. En efecto,

$$\begin{aligned}
< g, \phi > &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}\phi(x)dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\phi(x)dx \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k) \\
&= < f, \phi > , \forall \phi \in P ,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la Generalización de la Identidad de Parseval. En conclusión, $f = g$ en P'.

De (6.19) conseguimos

$$|g(x)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_s \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} , \ \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

Tomando supremo obtenemos $\widehat{f} \in l^1(Z)$ y

$$\|g\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}}}_{C_s:=} \|f\|_s \quad . \tag{6.20}$$

La continuidad de la aplicación :$f \in H^s_{per} \mapsto g \in C_{per}$, es consecuencia de (6.20).

7 | H^s_{per} ES UN ALGEBRA DE BANACH PARÁ $s>\frac{1}{2}$

Introduciremos la siguiente operación en H^s_{per} cuando $s \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

Definición 7.1 *Sea* $f, g \in H^s_{per}$ *con* $s>\frac{1}{2}$*, debido al Lema de inmersión de Sobolev podemos definir* **el producto de** *f* **con** *g por*

$$< f.g, \phi >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\phi(x)\,dx\,, \quad \forall \phi \in P\,.$$

Vemos que $f.g \in C_{per} \subset P'$ y probaremos que con este producto H^s_{per} es un Álgebra de Banach siempre que $s>\frac{1}{2}$.

Teorema 7.1 *Si* $s>\frac{1}{2}$ *entonces* H^s_{per} *es un Álgebra de Banach. En particular, existe uma constante positiva* K_s *dependiendo unicamente de s tal que*

$$\|fg\|_s \leq K_s\|f\|_s\|g\|_s\,, \quad \forall f, g \in H^s_{per}.$$

Prueba.- Como $s>\frac{1}{2}$, usando el Lema de Inmersión de Sobolev, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\widehat{(fg)}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(k-j)x}dx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \\
&= (\widehat{f}*\widehat{g})(k)\,.
\end{aligned} \tag{7.21}
$$

Usando el Lema 2.1 con $a=1,\ b=|k|^2\ \mathrm{y}\ \frac{s}{2}$, tenemos que

$$
(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \leq M_s(1+|k|^s) \leq M_s(1+|k-j|^s+|j|^s)\,,\ \forall k,j\in Z\,, \tag{7.22}
$$

donde M_s es una constante positiva. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\left|(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=-n}^{n}\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\leq (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=-n}^{n}|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)| \\
&\leq M_s\sum_{j=-n}^{n}\left[1+|k-j|^s+|j|^s\right]|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)| \\
&= M_s\sum_{j=-n}^{n}\left\{|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|+|\widehat{f}(j)||k-j|^s|\widehat{g}(k-j)|+|j|^s|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|\right\} \\
&= M_s\left\{\sum_{j=-n}^{n}|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|+\sum_{j=-n}^{n}|\widehat{f}(j)||k-j|^s|\widehat{g}(k-j)|\right. \\
&\qquad\left.+\sum_{j=-n}^{n}|j|^s|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|\right\}
\end{aligned} \tag{7.23}
$$

Como I · I es continua, tomando límite a (7.23) cuando $n\to+\infty$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\leq M_s\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(j)||k-j|^s|\widehat{g}(k-j)|\right. \\
&\qquad\left.+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|j|^s|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|\right\} \\
&= M_s\left\{(F*G)(k)+(F*R)(k)+(S*G)(k)\right\}\,,
\end{aligned} \tag{7.24}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
G(k) &= |\widehat{g}(k)|\,, \forall k \in Z\,, \\
F(k) &= |\widehat{f}(k)|\,, \forall k \in Z\,, \\
R(k) &= |k|^s|\widehat{g}(k)|\,, \forall k \in Z\,, \\
S(k) &= |k|^s|\widehat{f}(k)|\,, \forall k \in Z\,.
\end{aligned}
$$

Observamos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |R_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ||k|^s|\widehat{g}(k)||^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s}|\widehat{g}(k)|^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{g}(k)|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\|g\|_s^2 < \infty,
\end{aligned}
$$

pues$g \in H^s_{per}$. Así,

$$
R = (R_k)_{k\in Z} \in l^2(Z) \ \text{ y } \ \|R\|_{l^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_s . \tag{7.25}
$$

Análogamente, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ||k|^s|\widehat{f}(k)||^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\|f\|_s^2 < \infty,
\end{aligned}
$$

pues$f \in H^s_{per}$. Así,

$$
S = (S_k)_{k\in Z} \in l^2(Z) \ \text{ y } \ \|S\|_{l^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_s . \tag{7.26}
$$

Para $f, g \in H^s_{per}$, $s > \frac{1}{2}$, usando el Lema de inmersión de Sobolev, obtenemos:

$$
F,\, \widehat{f} \in l^1(Z) \qquad \text{y} \qquad \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C_s\|f\|_s\,, \tag{7.27}
$$

$$
G,\, \widehat{g} \in l^1(Z) \qquad \text{y} \qquad \|\widehat{g}\|_{l^1} \leq C_s\|g\|_s\,. \tag{7.28}
$$

Por otro lado, como $s > \frac{1}{2}$ >0 entonces $H^s_{per} \subset L^2([-\pi,\pi])$. Así, si $f \in H^s_{per}$ entonces $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Luego,$\widehat{f} \in l^2(Z)$ y

$$
\underbrace{|\widehat{f}|}_{=F} \in l^2(Z)\,. \tag{7.29}
$$

Análogamente, para $g \in H^s_{per}$ se obtiene $g \in L^2([-\pi,\pi])$. Luego, $\hat{g} \in l^2(Z)$ y

$$\underbrace{|\widehat{g}|}_{=G} \in l^2(Z)\,. \tag{7.30}$$

Como $F \in l^1(Z)$ y $G \in l^2(Z)$, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$F * G \in l^2(Z) \ \text{ y } \ \|F * G\|_{l^2} \leq \|F\|_{l^1}\|G\|_{l^2}\,. \tag{7.31}$$

Tambien, como $F \in l^1(Z)$ y $R \in l^2(Z)$, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$F * R \in l^2(Z) \ \text{ y } \ \|F * R\|_{l^2} \leq \|F\|_{l^1}\|R\|_{l^2}\,. \tag{7.32}$$

Como $S \in l^2(Z)$ y $G \in l^1(Z)$, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$S * G \in l^2(Z) \ \text{ y } \ \|F * G\|_{l^2} \leq \|S\|_{l^2}\|G\|_{l^1}\,. \tag{7.33}$$

De (7.31), (7.32) y (7.33) obtenemos

$$w := F * G + F * R + S * G \in l^2(Z)\,. \tag{7.34}$$

Definiendo

$$u_k := (1+k^2)^{\frac{s}{2}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\,,\ \forall k \in Z\,.$$

De (7.24) tenemos

$$|u_k| \leq M_s\, w(k)\,, \ \ w(k) \geq 0\,,\ \forall k \in Z\,,$$

entonces

$$|u_k|^2 \leq M_s^2\, |w(k)|^2\,,\ \forall k \in Z\,.$$

Sumando, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^2 \leq M_s^2 \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |w(k)|^2}_{=\|w\|_{l^2}^2} < \infty\,,$$

pues w ∈ $l^2(Z)$.

Por lo tanto,

$$u = (u_k)_{k\in Z} \in l^2(Z) \ \text{ y } \ \|u\|_{l^2} \leq M_s\|w\|_{l^2}\,. \tag{7.35}$$

Usando (7.21) y (7.35) conseguimos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left|\widehat{fg}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\right|^2 \\
&= 2\pi\|u\|_{l^2}^2
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\pi M_s^2 \|w\|_{l^2}^2 \,.$$

i.e.

$$\|fg\|_s \leq \sqrt{2\pi} M_s \|w\|_{l^2} \,. \tag{7.36}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \|w\|_{l^2} &= \|F * G + F * R + S * G\|_{l^2} \\ &\leq \|F * G\|_{l^2} + \|F * R\|_{l^2} + \|S * G\|_{l^2} \,. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Observamos que $1 \leq (1+k^2)^s$ implica $|\hat{g}(k)|^2 \leq (1+k^2)^s |\hat{g}(k)|^2$, y que sumando obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{g}(k)|^2 \; < \; \infty \,,$$

desde que $g \in H^s_{per}$. Luego

$$\|\widehat{g}\|_{l^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_s \,, \tag{7.38}$$

De (7.31), (7.27), (7.30) y (7.38) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|F * G\|_{l^2} &\leq \|F\|_{l^1} \|G\|_{l^2} \\ &= \|\widehat{f}\|_{l^1} \|\widehat{g}\|_{l^2} \\ &\leq C_s \|f\|_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_s \|f\|_s \|g\|_s \,. \end{aligned} \tag{7.39}$$

De (7.32), (7.25) y (7.27) tenemos

$$\begin{aligned} \|F * R\|_{l^2} &\leq \|F\|_{l^1} \|R\|_{l^2} \\ &= \|\widehat{f}\|_{l^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_s \\ &\leq C_s \|f\|_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_s \|f\|_s \|g\|_s \,. \end{aligned} \tag{7.40}$$

De (7.33), (7.26) y (7.28) obtenemos

$$\begin{aligned} \|S * G\|_{l^2} &\leq \|S\|_{l^2} \|G\|_{l^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \|\widehat{g}\|_{l^1} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s C_s \|g\|_s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_s \|f\|_s \|g\|_s \,. \end{aligned} \tag{7.41}$$

Usando (7.39), (7.40) y (7.41) en (7.37) tenemos

$$\|w\|_{l^2} \leq \frac{3C_s}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \|g\|_s \,. \tag{7.42}$$

Usando (7.42) en (7.36) conseguimos

$$\|fg\|_s \leq \underbrace{3M_s C_s}_{K_s:=} \|f\|_s \|g\|_s \,.$$

Corolario 7.1 *Si* $s > \frac{1}{2}$ *entonces* $\widehat{fg} \in l^2(Z), \ \forall f, \, g \in H^s_{per}$.

8 I DIAGRAMA RESUMEN DE LOS ESPACIOS H^s_{per}

Finalmente, queremos resumir mediante un diagrama, las importantes propiedades de los espacios de Sobolev H^s_{per}.

Esto es, cuando *s* > 0, las siguientes inclusiones son continuas con imagen densa

$$\begin{array}{ccccc} H^s_{per} & \hookrightarrow & H^0_{per} = L^2([-\pi, \pi]) & \hookrightarrow & H^{-s}_{per} \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ l^2_s(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & l^2_{-s} \end{array}$$

Todo lo estudiado, lo usamos en el análisis de existencia y dependencia continua de la solución de una ecuación de evolución, realizando en el proceso una serie de cálculos y aproximaciones.

Podemos citar algunos artículos que usan los resultados obtenidos para estudiar la existencia de solución de la ecuación del calor, onda, Schr¨odinger, entre otras ecuaciones de evolución; así, por ejemplo: [2], [3], [5], [6], [7], [8]-[13] y [15].

9 I CONCLUSIONES

En nuestro estudio de los espacios de Sobolev modelados en L^2 caso periódico, hemos realizado lo siguiente:

1. Probamos importantes resultados de este espacio distribucional infinito dimensional, resaltando su conexión con los $l^2(Z)$ con peso, mediante la transformada de Fourier generalizada.

2. Probamos que las inmersiones son densas y la inmersion de Sobolev cuando $s > \frac{1}{2}$.

3. Evidenciamos una operación producto en H^s_{per} que lo hace un álgebra de Banach cuando $s > \frac{1}{2}$.

4. Finalmente, la riqueza de las propiedades de H^s_{per} permite aplicar a ecuaciones de evolución, en el estudio de existencia de solución, con la libertad de poder usar en otras aplicaciones.

REFERENCIAS

[1] Adams, R.A. Sobolev Spaces. Academic Press, New York; 1975.

[2] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existence of the solution of a Schr¨odinger type homogeneous model in Periodic Sobolev spaces. Selecciones Matemáticas. 2022; 9(02): 357-369.

[3] Iorio, R. and Iorio, V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University; 2002.

[4] Kato, T. On the Cauchy problem for the (generalized) KdV equations. *Studies in Applied Mathematics. Advances in Mathematics Supplementary Studies, 8*; 1983; 93-128.

[5] Linares, F. and Ponce, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer Verlag, New York; 2015.

[6] Milla García, L. and Santiago Ayala, Y. Buen planteamiento global de un modelo no lineal tipo Burgers. Pesquimat. 2022; 25(02): 1-15.

[7] Papuico Bernardo, V. and Santiago Ayala, Y. Existencia y dependencia continua de solución de la ecuación de Boussinesq de onda en espacios de Sobolev periódico. Selecciones Matemáticas. 2020; 7(01): 74-96.

[8] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.

[9] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01): 49-65.

[10] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existence and continuous dependence of the solution of non homogeneous wave equation in periodic Sobolev spaces. Selecciones Matemáticas. 2020; 7(01): 52-73.

[11] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y Regularidad de Solución de la Ecuación de Schr¨odinger No Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01):37-51.

[12] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existence and continuous dependence of the local solution of non-homogeneous KdV-K-S equation in periodic Sobolev spaces. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2021; 64(1): 1-19.

[13] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non-homogeneous third order equation and generalizations. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2022; 10(5): 43-56.

[14] Santiago Ayala, Y. $l^2(Z)$ spaces with weight: properties and its conection with the Sobolev spaces. To appear. 2023.

[15] Terence, T. *Nonlinear dispersive equations: Local and Global analysis*. Regional conference series in mathematics, No. 106. American Mathematical Society; 2006.