CAPÍTULO 7

LOS ESPACIOS $l^2(Z)$ CON PESO: PROPIEDADES Y SU CONEXIÓN CON LOS ESPACIOS DE SOBOLEV

Data de aceite: 02/06/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este artículo, estudiamos una generalización del espacio $l^2(Z)$. Aquí, se introduce un peso, que lo hace un espacio infinito dimensional de Hilbert y se evidencia un conjunto ortonormal que lo hace Separable. Damos pruebas a estas, inspiradas por el caso particular $l^2(Z)$. Finalmente, damos su conexión con los espacios de Sobolev y aplicaciones.

PALABRAS CLAVE: Espacio de Hilbert, espacio separable, base ortonormal, el Teorema de Fréchet-Jordan-Von Neumann, espacios de Sobolev.

$l^2(Z)$ SPACES WITH WEIGHT: PROPERTIES AND ITS CONECTION WITH THE SOBOLEV SPACES

ABSTRACT: In this article we study a generalization of the $l^2(Z)$ space. Here, a weight is introduced, which makes it an infinite dimensional Hilbert space and an orthonormal set is evidenced, which makes it Separable. We give proofs to these, inspired by the particular case $l^2(Z)$. Finally, we give its conection with the Sobolev spaces and applications.

KEYWORDS: Hilbert space, separable space, orthonormal basis, the Frechet-JordanVon Neumann Theorem, Sobolev spaces.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos los espacios $l^2(Z)$ con peso$w(k) = (1+k^2)^{\frac{s}{2}}$ que denotaremos por $l_s^2(Z)$ para $s \in IR$.

Estas sucesiones fueron introducidas en Iorio [1], lo que permitió identificarlo con los espacios de Sobolev periódico: H^s_{per}, vía la transformada de Fourier.

Primero, estudiaremos el espacio $l^2(Z)$ y sus propiedades. Luego, inspirados en la prueba de estos, demostraremos las propiedades de $l_s^2(Z)$, que sería su generalización.

En consecuencia, observamos también que si $s = 0$ entonces $l_0^2(Z) = l^2(Z)$ y todos los resultados obtenidos son válidos para $l^2(Z)$.

Elaboramos tablas y diagramas que resumen las propiedades de estos espacios. Finalmente, damos su conexión con los espacios de Sobolev periódico, aplicaciones y generalizaciones.

Nuestro trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, damos los resultados preliminares para el desarrollo del trabajo. En la sección 3, iniciamos introduciendo los espacios $l^p(Z)$. En la subsección 3.1, estudiamos al espacio $l^2(Z)$ probando sus principales propiedades. En la subsección 3.2, damos una tabla resumen de las propiedades de $l^2(Z)$. En la sección 4, iniciamos introduciendo los espacios $l^p(Z)$ con peso $w(k)=(1+k^2)^{\frac{s}{p}}$ que denotaremos por $l_s^p(Z)$. En la subsección 4.1, estudiamos los espacios $l_s^2(Z)$ probando sus principales propiedades. En la subsección 4.2 y 4.3, respectivamente, damos tablas resumen de las propiedades de $l_s^2(Z)$ y base ortonormal de los espacios de Hilbert estudiados. En la subsección 4.4, damos algunas aplicaciones.

Finalmente, en la sección 5, damos las conclusiones de nuestro estudio.

2 | PRELIMINARES

Usaremos los siguientes Teoremas:

Teorema 2.1 *[Fréchet-Jordan-Von Neumann] Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Son equivalentes_los_siguientes_enunciados:*

1. La norma $\|\cdot\|$ *satisface la Ley del Paralelogramo, i.e.* $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\{\|x\|^2+\|y\|^2\}$, $\forall x, y \in E$.

2. La norma $\|\cdot\|$ *"viene de un producto interno", i.e. existe un producto interno* $<\cdot,\cdot>$ *tal que* $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>}$, *donde* $\|y\|_{<\cdot,\cdot>}=<y,y>^{\frac{1}{2}}$, $\forall y \in E$.

Definición 2.1 *Un espacio métrico M es separable si posee un subconjunto enumerable y denso.*

Teorema 2.2 *Sea* $H \neq \{0\}$*, H un espacio de Hilbert. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. H es separable.

2. H posee una base ortonormal enumerable.

Teorema 2.3 *Sea H un espacio de Hilbert, A un conjunto de indices y* $B := \{u_\alpha, \alpha \in A\}$ *un conjunto ortonormal. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. B es base ortonormal.

2. El conjunto L(B) de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de B, es denso en H, i.e. $\overline{L(B)}=H$.

La prueba de estos resultados pueden ser vistas en [2] y [3].

3 | LOS ESPACIOS $L^P(Z)$

Definición 3.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$*, definimos el conjunto:*

$$l^p(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C} \,;\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

con dos operaciones:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n)\,, \quad (x_n), (y_n) \in l^p(Z) & (3.1)\\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,, \quad (x_n) \in l^p(Z)\,, & (3.2) \end{aligned}$$

que hace que $l^p(Z)$ sea un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Introduciendo la aplicación

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenemos que $l^p(Z)$ es un $\mathbb{C}$ - espacio normado y completo, esto es ($l^p(Z)$,$\|\cdot\|_p$) es un espacio de Banach.

Observación 3.1 *$l^p(Z) \neq \{0\}$ desde que existe* $e_i := (\ldots, 0, \overbrace{1}^{i-\acute{e}simo}, 0\ldots) \in l^p(Z)$, *para $i \in Z$, $\forall p \in [1,\infty)$.*

Además, $\|e_i\|_p = 1, \forall i \in Z$.

Definición 3.2 *Sea el conjunto*

$$l^\infty(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C};\, \sup_{n\in Z} |x_n| < \infty \right\}$$

que con las operaciones (3.1) y (3.2) definidas arriba es un $\mathbb{C}$ - espacio vectorial.

Introduciendo la aplicación

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup_{n\in Z} |x_n|$$

tenemos que $l^\infty(Z)$ es un $\mathbb{C}$ - espacio normado y completo, esto es, el par ($l^\infty(Z)$,$\|\cdot\|_\infty$) es un espacio de Banach.

Observación 3.2 *$l^\infty(Z) \neq \{0\}$ desde que existe $e_i \in l^\infty(Z)$, para $i \in Z$. Además, $\|e_i\|_\infty = 1$, $\forall i \in Z$.*

3.1 El espacio $l^2(Z)$

Proposición 3.1 *La norma $\|\cdot\|_p$ viene de un producto interno si y solamente si $p = 2$. Esto es,*

1. Si $p \neq 2$, la norma $\|\cdot\|_p$ no viene de un producto interno.

2. En el caso $p = 2$, $\|\cdot\|_2$ es la norma inducida del producto interno $<\cdot,\cdot>$ definido en $l^2(Z)$ por

$$< x, y > := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

para $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l^2(Z)$. Esto es,

$$\|x\|_2 = \|x\|_{<\cdot,\cdot>} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- 2) La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

A).- Sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l^2(Z)$. Para $l \in IN$, usando la desigualdad triangular de la $p = 2$-norma en $\mathbb{C}^{2l+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=-l}^{l} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-l}^{l} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_{l^2} + \|y\|_{l^2}\,,\end{aligned}$$

y como la sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces existe el límite y satisface

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2} + \|y\|_{l^2}$$

i.e. $x + y \in l^2(Z)$ y $\|x + y\|_{l^2} \leq \|x\|_{l^2} + \|y\|_{l^2}$.

Para $l \in IN$, tenemos

$$\sum_{k=-l}^{l} |\lambda x_k|^2 = \sum_{k=-l}^{l} |\lambda|^2 |x_k|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{k=-l}^{l} |x_k|^2}_{Suc.\,convergente}.$$

Tomando límite cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda x_k|^2 = |\lambda|^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2\right).$$

Luego, $\lambda x \in l^2(Z)$ y $\|\lambda x\|_{l^2} = |\lambda| \|x\|_{l^2}$.

Así, las dos operaciones: + y $\cdot$, suma y producto por un escalar, respectivamente, están bien definidas en $l^2(Z)$. Se prueba fácilmente que $(l^2(Z),+,\cdot)$ es un $\mathbb{C}$- espacio vectorial.

B).- Ahora, queremos probar que la aplicación $< \cdot,\cdot >$ está bien definida. Esto es, probaremos que la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

es convergente siempre que $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ pertenezcan a $l^2(Z)$. En efecto, sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l^2(Z)$. Para $l < m$ tenemos

$$\sum_{k=-m}^{m} x_k\overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} x_k\overline{y_k} = \sum_{l<|k|\le m} x_k\overline{y_k} \quad . \tag{3.3}$$

Tomando módulo a la identidad (3.3) y usando la desigualdad de H¨older en $\mathbb{C}^{2(m-l)}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=-m}^{m} x_k\overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} x_k\overline{y_k}\right| &= \left|\sum_{l<|k|\le m} x_k\overline{y_k}\right| \\ &\le \left(\sum_{l<|k|\le m} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l<|k|\le m} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \end{aligned} ,$$

cuando $m,l \to +\infty$. Esto es, la sucesión $\left(\sum_{k=-l}^{l} x_k\overline{y_k}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Luego, como $\mathbb{C}$ es completo, existe el límite de la sucesión, i.e. la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\overline{y_k}$ es convergente.

C).- Desde que $\sum_{k=-l}^{l} |x_k|^2 \ge 0,\ \forall l \ge 0 \text{ con } x = (x_k) \in l^2(Z),$ tomando límite tenemos

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2}_{=<x,x>} \ge 0$$

D).- Si $x = (x_k) \in l^2(Z)$ y $< x,x >= 0$ tenemos

$$0 =< x,x >= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 \ge |x_j|^2\,,\ \forall j \in Z\,.$$

Entonces $|x_j| = 0$, i.e. $x_j = 0$, $\forall j \in Z$; esto es $x = 0$.

E).- Si $(x_j) = x = 0$, i.e. $x_j = 0$, $\forall j \in Z$. Luego, $< x,x >= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\underbrace{x_j}_{=0}|^2 = 0.$

F).- Rápidamente se comprueba que:

$$\begin{aligned} <\alpha x + y, z> &= \alpha < x,z > + < y,z >\,,\ \forall x,y,z \in l^2(Z)\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{C}\,. \\ < x, u+\beta v > &= < x,u > + \overline{\beta} < x,v >\,,\ \forall x,u,v \in l^2(Z)\,,\ \forall \beta \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

De B), C), D), E) y F) hemos probado que $< \cdot,\cdot >$ es un producto interno en $l^2(Z)$.

1).- Ahora, probaremos que si $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$ (i.e. $p \ne 2$) entonces la norma $\|\cdot\|_p$ no viene de un producto interno. En efecto, basta tomar $x = (x_k)_{k\in Z}$ tal que $x_1 = 1$ con $x_k = 0$, $\forall k \in Z - \{1\}$ e $y = (y_k)_{k\in Z}$ tal que $y_2 = 1$ con $y_k = 0$, $\forall k \in Z - \{2\}$. Entonces: $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_p = 1$ para $p \in [1,\infty]$, de ahí $\|x\pm y\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$ para $p \in [1,\infty)$ y $\|x\pm y\|_\infty = 1$.

Luego, para $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ tenemos

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2\cdot 2^{\frac{2}{p}} \overbrace{\ne}^{*} 2\cdot 2 = 2\{\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\}.$$

Luego, la igualdad no se cumple si $2 \ne p$. Esto es, si $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ entonces no se satisface la Ley del Paralelogramo. Usando el Teorema 2.1 de Fréchet-Jordan-Von Neumann concluimos que la norma $\|\cdot\|_p$ no viene de un producto interno.

Por otro lado, para $p = \infty$ vemos que:

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \overbrace{\neq}^{*} 4 = 2\cdot 2 = 2\{\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2\}.$$

Luego, la norma $\|\cdot\|_\infty$ no satisface la Ley del Paralelogramo y usando el Teorema 2.1, concluimos que la norma $\|\cdot\|_\infty$ no viene de un producto interno.

Proposición 3.2 l^2(Z) *es un espacio de Hilbert, Reflexivo con* $(l^2(Z))^* \equiv l^2(Z)$ *y Separable.*

Prueba.- Primero probaremos que $l^2(Z)$ es completo. En efecto, sea x_n una sucesión de Cauchy en $l^2(Z)$, que denotamos por $x_n = (x_{n,k})_{k\in Z}$. Entonces $\|x_n - x_m\|_2 \to 0$ cuando $n,m \to +\infty$. Esto es, existe $N_o > 0$ tal que

$$\epsilon > \|x_n - x_m\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq |x_{n,j} - x_{m,j}| \tag{3.4}$$

para todo $n,m > N_o$ y $\forall j \in Z$.

Para cada j fijado, usando (3.4) tenemos que $(x_{n,j})_{n\in N}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Así, como $\mathbb{C}$ es completo entonces existe $x_j \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n,j} = x_j$.

Definimos

$$x := (x_j)_{j\in Z}\,.$$

Probaremos _que $x \in l^2(Z)$ y que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$, cuando $n \to +\infty$.

De (3.4) y como $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$\epsilon > \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;,\; \forall m,n > N_o\,,\, \forall l > 0 \tag{3.5}$$

Tomando límite a (3.5) cuando $m \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_{n,k} - x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;,\; \forall n > N_o\,,\, \forall l > 0 \tag{3.6}$$

Tomando límite a (3.6) cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k} - x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|x_n - x\|_2} \;,\; \forall n > N_o \tag{3.7}$$

esto_es $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$, cuando n→+∞

La desigualdad (3.7) nos dice que $x_n - x \in l^2(Z)$, para $n > N_o$. Usando esto, con $n^* > N_o$ tenemos

$$x = \underbrace{x_{n^*}}_{\in l^2(Z)} - \underbrace{(x_{n^*} - x)}_{\in l^2(Z)}$$

entonces $x \in l^2(Z)$, con esto queda probado que $l^2(Z)$ es completo.

Por otro lado, sabemos que todo espacio de Hilbert es Reflexivo, por lo tanto $l^2(Z)$ es Reflexivo.

A su vez, debido al Teorema de Representación de Riesz para funcionales, el dual de um espacio de Hilbert es el mismo, así $(l^2(Z))^* \equiv l^2(Z)$.

Finalmente, probaremos que $l^2(Z)$ es Separable. Para esto, introducimos el siguiente conjunto

$$B := \{e_i = (\ldots, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ésima entrada}}, 0, \ldots, 0 \ldots), \quad i \in Z\} \subset l^2(Z).$$

Y podemos denotar $e_i = (e_{ik})$ donde $e_{ik} = \delta_{ik}$: vale 1 cuando $i = k$ y 0 cuando $i \neq k$. Rápidamente se observa que B es enumerable. Además, B es un conjunto ortogonal en $l^2(Z)$. Esto es,

$$< e_i, e_j >= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_{ik}\overline{e_{jk}} = 0 \text{ si } i \neq j\,.$$

Mejor aún, se observa que

$$< e_i, e_j >= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_{ik}\overline{e_{jk}} = \delta_{ij}$$

y $\|e_j\| = 1$, $\forall j \in Z$. Luego, B es un conjunto ortonormal en $l^2(Z)$.

Afirmamos que $\overline{L(B)} = l^2(Z)$, donde $L(B)$ es el conjunto cuyos elementos son combinaciones lineales finitas de elementos de B. Así,

$$L(B) = \{x = (x_k)_{k \in Z} \text{ tal que } \exists l, m \in Z,\ l < m,\ x_k = 0, \forall k \geq m, k \leq l\} \subset l^\infty(Z).$$

Obviamente $L(B) \subset l^2(Z)$ y la cerradura de $L(B)$ satisface $\overline{L(B)} \subset l^2(Z)$.

Sea $x = (x_i)_{i \in Z} \in l^2(Z)$, probaremos que $x \in \overline{L(B)}$. Así, definimos

$$y_i = (\ldots, 0, x_{-i}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots x_i, 0 \ldots) \in L(B).$$

Como $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 < \infty$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe $m^* \in IN$ tal que

$$\sum_{|k|>m^*} |x_k|^2 < \epsilon\,. \tag{3.8}$$

De (3.8) tenemos que $\exists m^* \in IN$ tal que

$$\epsilon > \|y_{m^*} - x\|_{l^2}^2 = \sum_{|k|>m^*} |x_k|^2 > \sum_{|k|>n} |x_k|^2 = \|y_n - x\|_{l^2}^2 \,, \ \ \forall n > m^* \,,$$

i.e. $x \in \overline{L(B)}$. Esto es, $\overline{L(B)} \subset l^2(Z)$ y com esto queda probando $\overline{L(B)} = l^2(Z)$.

Usando el Teorema 2.3, tenemos que B es base ortonormal enumerable. Así, siendo $l^2(Z)$ un espacio de Hilbert com $l^2(Z) \neq \{0\}$ usando el Teorema 2.2 concluimos que $l^2(Z)$ es separable.

3.2 Tabla resumen de $l^2(Z)$

En resumen, obtenemos:

PROPIEDADES DEL ESPACIO $l^2(Z)$

	REFLEXIVO	SEPARABLE	ESPACIO DUAL
$l^2(Z)$	SI	SI	$l^2(Z)$

4 I LOS ESPACIOS $L_s^p(Z)$

Definición 4.1 *Sea $s \in IR$ y $1 \leq p < \infty$, definimos el conjunto:*

$$l_s^p(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C} \,;\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p < \infty \right\}$$

con dos operaciones:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n)\,, \quad (x_n), (y_n) \in l_s^p(Z) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,, \quad (x_n) \in l_s^p(Z)\,, \end{aligned}$$

que hace que $l_s^p(Z)$ sea un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.

Introduciendo la aplicación

$$\|(x_n)\|_{s,p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenemos que $l_s^p(Z)$ es un $\mathbb{C}$ -espacio normado y completo, esto es $(l_s^p(Z), \|\cdot\|_{s,p})$ es un espacio de Banach.

Observación 4.1 *Si $s = 0$ entonces* $l_0^p(Z) = l^p(Z)$

Observación 4.2 $l_s^p(Z) \neq \{0\}$, *desde que existe* $e_i := (\ldots, 0, \overbrace{1}^{i-\acute{e}simo}, 0\ldots) \in l_s^p(Z)$, *para* $i \in Z$, $\forall p \in [1, \infty)$.

Además, $\|e_i\|_{s,p} = (1+i^2)^{\frac{s}{p}}$, $\forall i \in Z$.

Observación 4.3 *Si $s = 0$ entonces* $l_s^p(Z) \subset l^p(Z)$, $\forall p \in [1, \infty)$.

Observación 4.4 *Si $1 \leq p < q < \infty$ entonces $l_s^p(Z) \subset l_s^q(Z)$ y la inclusion es estricta.*

4.1 Los espacios $l_s^2(Z)$

Proposición 4.1 *La norma $\|\cdot\|_{s,p}$ viene de un producto interno si y solamente si $p = 2$. Esto es,*

1. Si $p \neq 2$, la norma $\|\cdot\|_{s,p}$ no viene de un producto interno.

2. En el caso $p = 2$, $\|\cdot\|_{s,2}$ es la norma inducida del producto interno $< \cdot,\cdot >_s$ definido en $l_s^2(Z)$ por

$$< x, y >_s := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k}$$

para $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Esto es,

$$\|x\|_{s,2} = \|x\|_{<\cdot,\cdot>_s} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- 2).- La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

A).- Sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Para $l \in IN$, usando la desigualdad triangular de la $p = 2$-norma em $\mathbb{C}^{2l+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k + y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|_{s,2} + \|y\|_{s,2} \,,
\end{aligned}$$

y como la sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces existe el límite y satisface

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k + y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{s,2} + \|y\|_{s,2}$$

i.e. $x + y \in l_s^2(Z)$ y $\|x + y\|_{s,2} \leq \|x\|_{s,2} + \|y\|_{s,2}$.

Para $l \in IN$, tenemos

$$\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |\lambda x_k|^2 = \sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |\lambda|^2 |x_k|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k|^2}_{Suc.\, convergente}.$$

Tomando límite cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\lambda x_k|^2 = |\lambda|^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right).$$

Luego,$\lambda x \in l_s^2(Z)$ y $\|\lambda x\|_{s,2} = |\lambda|\|x\|_{s,2}$.

Así, las dos operaciones: + y ·, suma y producto por un escalar, respectivamente, están bien definidas en $l_s^2(Z)$. Se prueba fácilmente que ($l_s^2(Z)$,+,·) es un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

B).- Ahora, queremos probar que la aplicación $< \cdot,\cdot >_s$ está bien definida. Esto es, probaremos que la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y}_k$$

es convergente siempre que $x = (x_k)_{k\in Z}$ e $y = (y_k)_{k\in Z}$ estén en $l_s^2(Z)$.

En efecto, sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Para $l < m$ tenemos

$$\sum_{k=-m}^{m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} = \sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \quad . \tag{4.1}$$

Tomando módulo a la identidad (4.1) y usando la desigualdad de Hölder en $\mathbb{C}^{2(m-l)}$ obtenemos

$$\left| \sum_{k=-m}^{m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \right|$$

$$= \left| \sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \right|$$

$$\le \left(\sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

cuando $m,l \rightarrow +\infty$. Esto es, la sucesión $\left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \right)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Luego, como $\mathbb{C}$ es completo, existe el límite de la sucesión, i.e. la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k}$ es convergente.

C).- Desde que $\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k|^2 \ge 0$, $\forall l \ge 0$ con $x = (x_k) \in l_s^2(Z)$, tomando límite tenemos

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2}_{=<x,x>_s} \ge 0 \quad .$$

D).- Si $x = (x_k) \in l_s^2(Z)$ y $< x,x >_s = 0$ tenemos

$$0=< x,x >_s=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|x_k|^2\geq\underbrace{(1+j^2)^s}_{\neq 0}|x_j|^2\,,\ \forall j\in Z\,.$$

Entonces $|x_j|=0$, i.e. $x_j=0$, $\forall j\in Z$; esto es $x=0$.

E).-Si $(x_j)=x=0$, i.e. $x_j=0$, $\forall j\in Z$.Luego $< x,x >_s=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\underbrace{x_j}_{=0}|^2=0.$

F).- Rápidamente se comprueba que:

$$\begin{aligned}< \alpha x+y,z >_s &= \alpha < x,z >_s + < y,z >_s\,,\ \forall x,y,z\in l_s^2(Z)\,,\ \forall\alpha\in\mathbb{C}\,,\\ < x,u+\beta v >_s &= < x,u >_s +\overline{\beta} < x,v >_s\,,\ \forall x,u,v\in l_s^2(Z)\,,\ \forall\beta\in\mathbb{C}\,.\end{aligned}$$

De B), C), D), E) y F) hemos probado que $<\cdot,\cdot>_s$ es un producto interno en $l_s^2(Z)$.

1).- Ahora, probaremos que si $p\in[1,2)\cup(2,\infty)$ (i.e. $p\neq 2$) entonces la norma $\|\cdot\|_{s,p}$ no viene de un producto interno. En efecto, basta tomar $x=(x_k)_{k\in Z}$ tal que $x_1=1$ con $x_k=0$, $\forall k\in Z-\{1\}$ e $y=(y_k)_{k\in Z}$ tal que $y_{-1}=1$ con $y_k=0$, $\forall k\in Z-\{-1\}$. Entonces: $\|x\|_{s,p}=2^{\frac{s}{p}}$, $\|y\|_{s,p}=2^{\frac{s}{p}}$ para $p\in[1,\infty)$, de ahí $\|x\pm y\|_{s,p}=2^{\frac{s+1}{p}}$ para $p\in[1,\infty)$.

Luego, para $p\in[1,2)\cup(2,\infty)$ tenemos

$$\|x+y\|_{s,p}^2+\|x-y\|_{s,p}^2=2\cdot 2^{\frac{2(s+1)}{p}}\overbrace{\neq}^{*}2^2\cdot 2^{\frac{2s}{p}}=2\{\|x\|_{s,p}^2+\|y\|_{s,p}^2\}.$$

Luego, la igualdad no se cumple si $2\neq p$. Esto es, si $p\in[1,2)\cup(2,\infty)$ entonces no se satisface la Ley del Paralelogramo. Usando el Teorema 2.1 de Fréchet-Jordan-Von Neumann concluimos que la norma $\|\cdot\|_{s,p}$ no viene de un producto interno.

Observación 4.5 *Si $s=0$ en la Proposición 4.1 entonces se obtiene la Proposición 3.1.*

Proposición 4.2 *$l_s^2(Z)$ es un espacio de Hilbert, Reflexivo con $l_s^2(Z))^*=l_s^2(Z)$ y Separable.*

Prueba.- Primero probaremos que $l_s^2(Z)$ es completo. En efecto, sea x_n una sucesión de Cauchy en $l_s^2(Z)$, que denotamos por $x_n=(x_{n,k})_{k\in Z}$. Entonces $\|x_n-x_m\|_{s,2}\to 0$ cuando $n,m\to+\infty$. Esto es, existe $N_o>0$ tal que

$$\begin{aligned}\epsilon>\|x_n-x_m\|_{s,2} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\geq (1+j^2)^{\frac{s}{2}}|x_{n,j}-x_{m,j}|\end{aligned}\tag{4.2}$$

para todo $n,m>N_o$ y $\forall j\in Z$.

Para cada j fijado, usando (4.2) tenemos que $((1+j^2)^{\frac{s}{2}}x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Así, como $\mathbb{C}$ es completo entonces existe $y_j\in\mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+j^2)^{\frac{s}{2}}x_{n,j}=y_j$.

Luego, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n,j}=\underbrace{(1+j^2)^{\frac{-s}{2}}y_j}_{x_j:=}$.

Definimos

$$x := (x_j)_{j\in Z}\,.$$

Probaremos que $x \in l_s^2(Z)$ y que $x_n \overset{\|\cdot\|_{s,2}}{\longrightarrow} x$, cuando $n \to +\infty$.

De (4.2) y como $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{k=-l}^{l}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$\epsilon > \left(\sum_{k=-l}^{l}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \forall m,n > N_o\,,\ \forall l > 0\,. \qquad (4.3)$$

Tomando límite a (4.3) cuando $m \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \left(\sum_{k=-l}^{l}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \forall n > N_o\,,\ \forall l > 0 \qquad (4.4)$$

Tomando límite a (4.4) cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|x_n-x\|_{s,2}}\ ,\ \forall n > N_o \qquad (4.5)$$

esto_es, $x_n \overset{\|\cdot\|_{s,2}}{\longrightarrow} x$, cuando $n \to +\infty$.

La desigualdad (4.5) nos dice que $x_n - x \in l_s^2(Z)$, para $n > N_o$. Usando esto, con $n^* > N_o$ tenemos

$$x = \underbrace{x_{n^*}}_{\in\, l_s^2(Z)} - \underbrace{(x_{n^*}-x)}_{\in\, l_s^2(Z)}$$

entonces x $\in l_s^2(Z)$; con esto queda demostrado que $l_s^2(Z)$ es completo.

Por otro lado, sabemos que todo espacio de Hilbert es Reflexivo, por lo tanto $l_s^2(Z)$ es Reflexivo.

A su vez, debido al Teorema de Representación de Riesz para funcionales, el dual de un espacio de Hilbert es el mismo. Así, $(l_s^2(Z))^* \equiv l_s^2(Z)$.

Finalmente, probaremos que $l_s^2(Z)$ es Separable. Para esto, introducimos el siguiente conjunto

$$B := \{e_i = (\ldots,0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{i-ésima entrada}},0,\ldots,0\ldots),\quad i \in Z\} \subset l_s^2(Z)\,.$$

Y podemos denotar $e_i = (e_{ik})_{k=-\infty}^{+\infty}$ donde $e_{ik} = \delta_{ik}$: vale 1 cuando $i = k$ y 0 cuando $i \neq k$.

Rápidamente, se observa que B es numerable. Además, B es un conjunto ortogonal en $l_s^2(Z)$. Esto es,

$$< e_i, e_j >_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \underbrace{e_{ik}\overline{e_{jk}}}_{=0} = 0 \text{ si } i \neq j\,.$$

Mejor aún, se observa que

$$< e_i, e_j >_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s e_{ik}\overline{e_{jk}} = (1+j^2)^s \delta_{ij}\,,$$

y $\|e_j\|_{s,2} = (1+j^2)^{\frac{s}{2}}$, $\forall j \in Z$.

A partir de e_j, normalizando podemos obtener un conjunto ortonormal enumerable:

$$\widetilde{B} \quad := \quad \left\{ v_j = \frac{e_j}{\|e_j\|_{s,2}} \right\}_{j \in Z}$$

$$= \quad \{ v_j = (\ldots, 0, \ldots, 0, \quad \underbrace{\frac{1}{(1+j^2)^{\frac{s}{2}}}} \quad , 0, \ldots, 0 \ldots), \quad j \in Z \} \subset l_s^2(Z)$$

j-ésima entrada

Y evidentemente satisface: $L(B) = L(\tilde{B})$ donde $L(B)$ es el conjunto cuyos elementos son combinaciones lineales finitas de elementos de B.

Afirmamos que $\overline{L(B)} = l_s^2(Z)$. En efecto, previamente observamos

$$L(B) = \{x = (x_k)_{k \in Z} \text{ tal que } \exists l, m \in Z,\ l < m,\ x_k = 0, \forall k \geq m, k \leq l\} \subset l^\infty(Z).$$

Obviamente $L(B) \subset l_s^2(Z)$ y la cerradura de $L(B)$ satisface $\overline{L(B)} \subset l_s^2(Z)$.

Sea $x = (x_i)_{i \in Z} \in l_s^2(Z)$, probaremos que $x \in \overline{L(B)}$. Así, definimos

$$y_i = (\ldots, 0, x_{-i} \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots x_i, 0 \ldots) \in L(B).$$

Como $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 < \infty$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe $m^* \in IN$ tal que

$$\sum_{|k| > m^*} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 < \epsilon\,. \tag{4.6}$$

De (4.6) tenemos que $\exists\ m^* \in IN$ tal que

$$\epsilon > \|y_{m^*} - x\|_{l_s^2}^2 = \sum_{|k| > m^*} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 > \sum_{|k| > n} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 = \|y_n - x\|_{l_s^2}^2\,,$$

$\forall n > m^*$, i.e. $x \in \overline{L(B)}$. Esto es, $l_s^2(Z) \subset \overline{L(B)}$ y con esto queda probado $\overline{L(B)} = l_s^2(Z)$. Ahora, como $L(\tilde{B}) = L(B)$, entonces $\overline{L(\tilde{B})} = \overline{L(B)} = l_s^2(Z)$.

Usando el teorema 2.3, tenemos que $\tilde{B}$ es base ortonormal enumerable. Así,siendo $l_s^2(Z)$ un espacio de Hilbert con $l_s^2(Z) \neq \{0\}$, usando el Teorema 2.2 concluimos que $l_s^2(Z)$ es separable.

Observación 4.6 *Si $s = 0$ en la Proposición 4.2 entonces se obtiene la Proposición 3.2.*

4.2 Tabla resumen de $l_s^2(Z)$

En resumen, obtenemos:

PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS $l_s^2(Z)$, $s \in IR$

	REFLEXIVO	SEPARABLE	ESPACIO DUAL
$l_s^2(Z)$	SI	SI	$l_s^2(Z)$

4.3 Tabla resumen de Base Ortonormal

En resumen, obtenemos

BASE ORTONORMAL EN ESPACIOS DE HILBERT

	$l^2(Z)$	$l_s^2(Z)$
Conjunto Ortogonal	$e_j := (\ldots, 0, \underbrace{1}_{j\uparrow}, 0, \ldots)$	$e_j := (\ldots, 0, \underbrace{1}_{j\uparrow}, 0, \ldots)$
Base Ortonornal	$\{e_j\}_{j \in Z}$	$\left\{\frac{e_j}{\|e_j\|_{s,2}}\right\}_{j \in Z}, \ \|e_j\|_{s,2} = (1+j^2)^{\frac{s}{2}}$
Separables	SI	SI

4.4 Aplicaciones

Los espacios $l_s^2(Z)$ son de mucha utilidad en el estudio de los espacios de Sobolev periódico H^s_{per} para $s \in IR$, principalmente en la construcción e identificación con estos espacios mediante la transformada de Fourier.

En resumen, sea $s > 0$ entonces las siguientes inclusiones son continuas con imagen densa

$$
\begin{array}{ccccc}
H^s_{per} & \hookrightarrow & H^0_{per} = L^2([-\pi, \pi]) & \hookrightarrow & H^{-s}_{per} \\
\wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\
l_s^2(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & l^2_{-s}
\end{array}
$$

Para esto, citamos Iorio [1].

Por consiguiente, se aplica en el análisis de la existencia de solución de ecuaciones de evolución. Así, podemos citar [1], [4], [5], [6], [7] y [8].

Finalmente, las ideas expuestas en la subsección 4.1 nos permite generalizar resultados para los $l_s^p(Z)$ vía $l^p(Z)$.

5 | CONCLUSIONES

En nuestro estudio de los espacios $l_s^2(Z)$ hemos obtenido importantes resultados, entre los cuales destacamos:

1. Probamos de modo intuitivo y en detalle las Proposiciones 3.1 y 3.2.

2. Motivados por las ideas consideradas en las pruebas de las Proposiciones 3.1 y 3.2, en ese sentido demostramos las Proposiciones 4.1 y 4.2 relativas a las propiedades de $l_s^2(Z)$.

3. De nuestro estudio elaboramos Tablas que resumen las propiedades fundamentales de los espacios tratados.

4. Damos algunas aplicaciones que justamente nos motivaron a realizar este artículo.

5. Finalmente, generalizando podemos estudiar a los espacios $l^p_s(Z)$ basándonos en los espacios $l^p(Z)$.

REFERENCIAS

[1] Iorio, R. and Iorio, V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University; 2001.

[2] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations. Springer; 2011.

[3] Santiago Ayala, Y. Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones. Alemania. Editorial Académica Espan˜ola; 2014.

[4] Santiago Ayala, Y. and Rojas S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.

[5] Santiago Ayala, Y. and Rojas S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01): 49-65.

[6] Santiago Ayala, Y and Rojas S. Existencia y Regularidad de Solución de la Ecuación de Schr¨odinger No Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01):37-51.

[7] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existence of the solution of a Schr¨odinger type homogeneous model in Periodic Sobolev Spaces. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(02):357-369.

[8] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non homogeneous third order equation and generalizations. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2022; 10(05): 43-56.