

Carlos Eduardo Sanches de Andrade
(Organizador)

ENGENHARIA DE PRODUÇÃO:

Desafios científicos e problemas aplicados 3



Carlos Eduardo Sanches de Andrade
(Organizador)

ENGENHARIA DE PRODUÇÃO:

Desafios científicos e problemas aplicados 3



Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Natália Sandrini de Azevedo

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição Creative Commons. Atribuição-Não-Comercial-Não-Derivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná



Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista



Engenharia de produção: desafios científicos e problemas aplicados 3

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Carlos Eduardo Sanches de Andrade

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

E57 Engenharia de produção: desafios científicos e problemas aplicados 3 / Organizador Carlos Eduardo Sanches de Andrade. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-258-0744-7

DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.447220411>

1. Engenharia de produção. I. Andrade, Carlos Eduardo Sanches de (Organizador). II. Título.

CDD 670

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br



DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.



DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.



APRESENTAÇÃO

A obra “Engenharia de Produção: Desafios científicos e problemas aplicados 3” publicada pela Atena Editora apresenta, em seus 5 capítulos, estudos sobre diversos aspectos que mostram como a Engenharia de Produção pode evoluir buscando novas soluções que possam atender, com elevado padrão de qualidade, as diferentes demandas da sociedade.

A linha de produção no chão das fábricas necessita de processos com maior produtividade, sendo a automação um elemento essencial a ser considerado e, portanto, abordado na obra aqui apresentada.

Os processos industriais envolvidos na Engenharia de Produção necessitam de máquinas e equipamentos projetados especificamente para diferentes finalidades. Um estudo teórico pertinente ao projeto dessas maquinarias é outro tópico abordado nessa compilação.

Outro tema apresentado nessa obra trata-se de um grande desafio para os profissionais que atuam na Engenharia de Produção, a gestão da demanda, que precisa levar em consideração a sua flutuação, que afeta o planejamento, programação e controle da produção, sendo, portanto, um tópico relevante e de grande valor.

Outras perspectivas abordadas nesta obra dizem respeito ao estudo da liderança e seu papel na fidelização de clientes, e a gestão de distribuição de produtos alimentícios.

Agradecemos aos autores dos capítulos desta obra e esperamos que essa compilação seja proveitosa para os leitores.

Carlos Eduardo Sanches de Andrade

SUMÁRIO


CAPÍTULO 1..... 1

AUTOMAÇÃO NA LINHA DE PRODUÇÃO INDUSTRIAL

Jonieder José de Oliveira Macedo

Tales da Silva Souza

Luis Carlos Spaziani

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4472204111>


CAPÍTULO 2..... 14

ECUACIÓN GENERAL DE ACELERACIÓN POR PARTICIONES APLICADA A MECANISMOS PLANOS CON COMPONENTE DE CORIOLIS

Jaime Eduardo Trejo Aguirre

Laura Isela Padilla Iracheta

Esteban Rubio Ochoa


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4472204112>

CAPÍTULO 3..... 27

O USO DO PPCP – PLANEJAMENTO, PROGRAMAÇÃO E CONTROLE DA PRODUÇÃO EM DEMANDAS OSCILANTES

Andréa Cristina da Silva

José Fernando Faro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4472204113>

CAPÍTULO 4..... 38

OS REFLEXOS DA LIDERANÇA NA FIDELIZAÇÃO DO CLIENTE

Marco Andre Matos Cutrim

Jéssica Pereira Alves

Andielle Martins Oliveira

Antonilton Serra Sousa Junior

Jean Weberth Magalhães Pinto

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4472204114>


CAPÍTULO 5..... 52

ANÁLISE DE DEVOLUÇÕES EM UM CENTRO DE DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS ALIMENTÍCIOS

Bruna Ludmyla Soares dos Santos

Carlos Eduardo Sanches de Andrade

Cintia Isabel de Campos

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.4472204115>

SOBRE O ORGANIZADOR..... 66

ÍNDICE REMISSIVO..... 67

ECUACIÓN GENERAL DE ACELERACIÓN POR PARTICIONES APLICADA A MECANISMOS PLANOS CON COMPONENTE DE CORIOLIS

Data de aceite: 01/11/2022

Data de submissão: 20/09/2022

Jaime Eduardo Trejo Aguirre

Instituto Tecnológico de Chihuahua
Departamento de Metal-Mecánica
Chihuahua, México
<https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0003-3989-8025>

Laura Isela Padilla Iracheta

Instituto Tecnológico de Chihuahua
Departamento de Metal-Mecánica
Chihuahua, México
<https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0002-9410-1691>

Esteban Rubio Ochoa

Instituto Tecnológico de Chihuahua
Departamento de Metal-Mecánica
Chihuahua, México
<https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0002-2422-5234>

RESÚMEN: El presente trabajo propone una ecuación general de aceleración para aplicarse a mecanismos planos y articulados con énfasis en la componente de Coriolis de la aceleración. La ecuación se aplica a mecanismos al cual se sabe con certeza que contiene la componente de Coriolis. Se desarrolla paso a paso hasta llegar al sistema lineal simultáneo y conocer las aceleraciones angulares del mecanismo. Dicha ecuación aplica tanto para mecanismos simples como para mecanismos complejos. Como una

ventaja, se tiene que el sistema resultante se genera a partir de la ecuación de cierre vectorial inicial y es independiente del proceso de análisis de posición y de velocidad.

PALABRAS CLAVE: Coriolis, mecanismos, aceleración, particiones.

GENERAL EQUATION OF ACCELERATION BY PARTITIONS APPLIED TO PLANE MECHANISMS WITH CORIOLIS COMPONENT

ABSTRACT: The present work proposes a general acceleration equation to be applied to planar and articulated mechanisms with emphasis on the Coriolis component of acceleration. The equation applies to mechanisms which is known with certainty to contain the Coriolis component. It is developed step by step until reaching the simultaneous linear system and knowing the angular accelerations of the mechanism. This equation applies to both simple and complex mechanisms. As an advantage, the resulting system is generated from the initial vector closure equation and is independent of the position and velocity analysis process.

KEYWORDS: Coriolis, linkages, acceleration, partitions.

1 | INTRODUCCIÓN

La mecánica de sólidos puede ramificarse en 3 partes: la *estática*, la *cinética* y la *cinemática*. Esta última trata del movimiento relativo de cuerpos rígidos y sus puntos específicos. Un

mecanismo es un dispositivo mecánico que transfiere movimientos y está compuesto de cuerpos rígidos denominados *eslabones*. Los *eslabones* se unen con otros por medio de *pares o juntas* por medio de pasadores, o pares *revoluta* (*R*), o pares *prismáticos* (*P*) que permiten un movimiento o deslizamiento lineal. A los mecanismos con articulaciones, o pares cinemáticos, se les estudia su movimiento por medio de 3 análisis principales: *posición*, *velocidad* y *aceleración*. Este trabajo se enfoca en el análisis de aceleración de mecanismos planos compuestos por eslabones rígidos, pares *R* y pares *P*, tanto con dirección constante como con dirección variable. Este estudio propone una ecuación general para el análisis de aceleración para mecanismos planos y articulados, que estén compuestos por pares *R* y pares *P*. Cuando el mecanismo contenga pares *P* con dirección variable, se les considera para su análisis, el uso de un sistema de referencia móvil, por lo que ésta característica de movimiento genera la *Componente de Coriolis* de la aceleración. La formulación propuesta contiene ésta componente. Por definición, la aceleración es el resultado de la segunda derivada de la posición del mecanismo. Como segunda derivada de orden superior, su análisis se incrementa en complejidad conforme aumenta el orden de la derivada. En (Nikravesh, 1988) se enumeran métodos para los 3 análisis de los mecanismos. Entre ellos, el *método de particiones* para aceleración y el *método de restricciones añadidas*. La ecuación de aceleración se expresa en notación vectorial y, de acuerdo a su formulación, no se expresa la *componente de Coriolis* de la aceleración. En (Erdman, Arthur G.; Sandor, George N.; 1998), se presenta un amplio estudio sobre la *aceleración de Coriolis*; se utiliza la notación relativa, tanto para expresar la velocidad como para la aceleración. Se ofrece también el desarrollo de la aceleración, incluyendo la componente de Coriolis, en notación polar compleja. En (Norton, 2013) ofrecen soluciones directas para diversos mecanismos específicos, tales como: mecanismo de 4 barras con juntas de pasador, mecanismo de cuatro barras manivela-corredera, mecanismo de cuatro barras manivela-corredera invertido. En éste último se contempla la *componente de Coriolis* de acuerdo a la teoría de eslabones con longitud variable en la forma tradicional, por desarrollo analítico, no por la utilización de una ecuación general, como la que este trabajo propone. En el estudio (Lopez-Custodio, 2012), aunque se enfoca en la tercer derivada superior, analiza el modelo matemático para un mecanismo de retorno rápido, el cual, de acuerdo a su configuración, posee un par prismático con dirección variable, por lo que genera la condición de *Coriolis*. El tratamiento lo realiza con el método vectorial derivando directamente el planteamiento vectorial de velocidad. Otro enfoque donde se presentan mecanismos con *Coriolis*, es en (Borovin, 2014), donde se plantea el método de fragmentación, para disminuir la cantidad de objetos que debe analizar el estudiante. Utiliza los *grupos estructurales de Assur* para su desarrollo y solución. Para este fin, se apoya en la notación relativa de vectores y la forma gráfica de las direcciones de los mismos. En el texto (Cardona Foix, 2001), aborda el análisis de aceleraciones de un mecanismo derivando las ecuaciones generalizadas de la velocidad. Emplea las expresiones resultantes en formato matricial que representan las

derivadas parciales de los vectores de cierre de velocidad. Aunque sí denota la componente de Coriolis, el ejemplo que desarrolla tiene como nula dicha componente. La solución que presenta es por medio de la matriz inversa del sistema, lo que es un desarrollo clásico en la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas. Tratamiento muy similar se encuentra en (Avello, 2014), donde la ecuación de aceleración se presenta sin el término de Coriolis y lo aplica a un mecanismo de cuatro barras. La solución la presenta por medio de métodos numéricos para la *posición*, por simultáneas tanto para la parte de velocidad como de aceleración.

2 | MECANISMOS PLANOS

Los mecanismos planos son dispositivos mecánicos cuyo grado de libertad es igual a 1 o mayor que 1. El movimiento de sus eslabones están limitados a planos formados por 2 ejes de referencia en un sistema coordenado de tipo rectangular, usualmente el eje x y el eje y . Puede ser el movimiento en un solo plano o en planos paralelos. Los mecanismos estudiados en cursos de ingeniería en instituciones de educación superior, usualmente se limitan a mecanismos de 1 grado de libertad. En este trabajo de análisis no se incluye mecanismos de engranes ni trenes de engranajes. En este estudio, los mecanismos planos se limitan a aquellos formados por pares revoluta R y pares prismáticos P . Estos mecanismos pueden clasificarse como mecanismos básicos y mecanismos complejos. Los mecanismos básicos se denominan así porque se requiere sólo una ecuación de cierre vectorial para poder solucionarlos de manera completa. Los mecanismos complejos se forman usualmente añadiendo a los mecanismos básicos, diadas de tipo RRR o de tipo RRP . Con ésta adición, los mecanismos complejos requerirán 2 o más ecuaciones de cierre vectoriales para su solución.

2.1 Tipos de movimientos de los eslabones

Los mecanismos están compuestos por eslabones y pares cinemáticos. Para su análisis cinemático, los eslabones son sustituidos por vectores los cuales toman las características de longitud y de comportamiento lineal y angular. De esta manera, los vectores (que representan a los eslabones) pueden caracterizarse por los siguientes tipos de movimientos. Los vectores con movimiento tipo 0, son aquellos que no giran angularmente y, de forma simultánea, no tienen variación en su longitud (longitud constante). Ejemplo de ellos son los eslabones fijos y los vectores que definen longitudes de excentricidad. Los vectores *tipo I*, se caracterizan porque poseen la propiedad de girar, tienen movimiento angular pero la dimensión del vector permanece constante. Poseen un movimiento de rotación, puede ser respecto a un punto fijo, eje o una rotación en movimiento plano. Los vectores con movimiento *tipo II*, son aquellos en que su longitud es variable pero su posición angular permanece constante. Poseen un movimiento lineal en una sola dirección

definida. Por último, los vectores con movimiento *tipo III*, tienen movimiento de rotación y simultáneamente poseen variabilidad en su longitud. Es la combinación simultánea de los movimientos *tipo I* y *tipo II*. La representación de dichos tipos de movimientos se verifican en la figura 1.

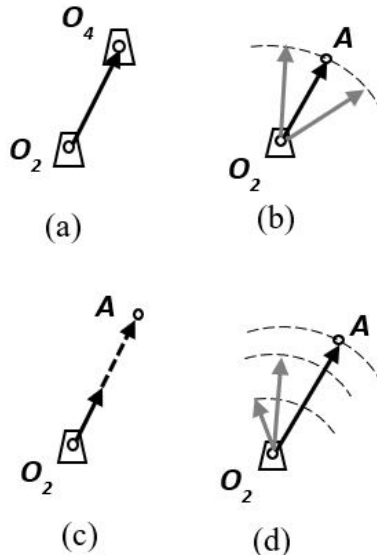


Figura 1. Tipos de movimientos. (a) tipo 0, (b) tipo I, (c) tipo II, (d) tipo III.

2.2 Análisis cinemático de mecanismos

El primer enfoque en el análisis cinemático tradicional en los mecanismos se centra en el cálculo de las posiciones angulares de los eslabones que contiene el mecanismo y las coordenadas de posición de los puntos principales del mismo. Bajo este enfoque, se utiliza la ec. (1). Esta ecuación general de posición genera un sistema no lineal de ecuaciones y resuelve para las posiciones angulares de los eslabones del mecanismo.

$$\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \right] \cdot \Delta u_j = -\phi_i \quad (1)$$

El segundo análisis, resuelve para las velocidades angulares de los eslabones del mecanismo y las velocidades lineales de los puntos principales del mismo. Se utiliza la ec. (2) general, bajo el enfoque de particiones:

$$\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \right] \cdot \dot{u}_j = - \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} \right] \cdot \dot{v}_j \quad (2)$$

Este trabajo, propone como ecuación general para un enfoque en el análisis de aceleración, el tercer análisis en los mecanismos, la siguiente expresión bajo el esquema de particiones, ec. (3). La aplicación de ésta formulación, proporciona el sistema de

ecuaciones rectangulares y simultáneas, resuelve para las aceleraciones angulares de los eslabones del mecanismo. Una vez conocidas éstas, se complementa el análisis para encontrar las aceleraciones lineales de los puntos de interés del mecanismo.

$$\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \right] \cdot \ddot{u}_j = - \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} \right] \cdot \ddot{v}_j - \left[\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_j \right] \cdot \dot{q}_j - 2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}} \right) \cdot \dot{r}_j^{III} \right] \cdot \dot{\theta}_j \quad (3)$$

La ec. (3) se enfoca en la solución de las propiedades cinemáticas del cuerpo, desde el punto de vista de la dinámica. Para utilizarla, se requiere conocer los parámetros que intervienen. v_j es la variable independiente (variable de valor conocido), o también es el parámetro conocido del elemento motriz –la que define el grado de libertad o movilidad del mecanismo–. u_j es la variable dependiente (variable o parámetro desconocido). Su valor depende del valor de la variable o parámetro conocido v_j . q_j es la suma de las variables independientes y las variables dependientes: $v_j + u_j$. Los términos que componen esta formulación, de izquierda a derecha de la ec.(3), se mencionan a continuación. $\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \right]$ es la matriz jacobiana del sistema. También se puede denotar por la letra J . Se forma derivando parcialmente cada una de las funciones de error respecto a cada una de las variables dependientes del sistema. Forma una matriz cuadrada de $n \times n$. \ddot{u}_j es la segunda derivada de las variables dependientes, representa la aceleración angular del parámetro dependiente. $\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} \right]$ son las derivadas parciales de las funciones de error respecto a la variable independiente (motriz) del sistema. Se convierte en las aceleraciones tangenciales conocidas del elemento motriz una vez que se multiplica por la variable \ddot{v}_j . \ddot{v}_j es la segunda derivada de las variables independientes, representa la aceleración angular del parámetro independiente. El término $-\left[\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_j \right] \cdot \dot{q}_j$ son las derivadas parciales de las funciones de error con respecto a cada una de las variables del sistema, tanto independientes como dependientes. Se convierte en las aceleraciones normales de cada uno de los eslabones del mecanismo. Representa el movimiento *tipo I* de los eslabones del mecanismo o de los vectores planteados en las ecuaciones de cierre. Esta expresión indica que se debe derivar parcialmente dos veces, respecto de la misma variable y en cada derivada parcial, se multiplica por la derivada de la variable en turno, sea variable dependiente o independiente. El siguiente término, $-2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}} \right) \cdot \dot{r}_j^{III} \right] \cdot \dot{\theta}_j$ *solamente aplica para los vectores con movimiento de tipo III*. Genera la componente de Coriolis de la aceleración. El término r_j^{III} de la expresión $\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}} \right)$ se refiere que la derivación parcial será con respecto a los vectores j del cierre vectorial cuya dimensión lineal es variable, es decir, del movimiento *tipo III*. En esta expresión, al operar el término r_j^{III} , j es del mismo valor para la variable angular θ_j , es decir, si $r_j^{III} = r_3^{III}$, entonces $j = 3$ y por lo tanto $\theta_j = \theta_3$.

2.3 Mecanismo inversión biela – manivela

En este mecanismo se aplicará el concepto de la ecuación de aceleración con referencia móvil. El mecanismo inversión biela-manivela tiene la siguiente ecuación vectorial de cierre de circuito, ec. (4). Los dos puntos encima del vector indican la segunda

derivada del mismo.

$$\ddot{\vec{R}}_2 + \ddot{\vec{R}}_3 = \ddot{\vec{R}}_1 + \ddot{\vec{R}}_4 \quad (4)$$

El mecanismo inversión biela-manivela tiene la misma ecuación de cierre vectorial que el mecanismo de cuatro barras. Se compone de 4 vectores, posee movilidad o grado de libertad igual a uno. El mecanismo inversión biela-manivela se muestra en la figura 2. En la figura 3 se muestra la nomenclatura utilizada en el mismo mecanismo.

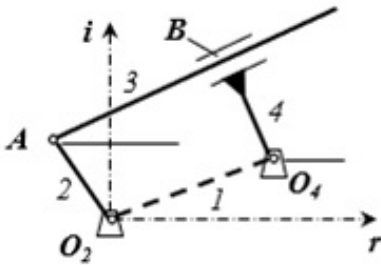


Figura 2. Mecanismo inversión biela-manivela.

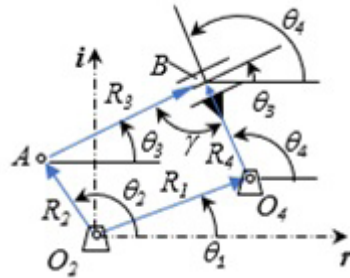


Figura 3. Nomenclatura del mecanismo inversión biela-manivela.

El movimiento de entrada o motriz es angular y se encuentra situado en el eslabón 2. Los tipos de movimiento se clasifican como del tipo *I* para el vector 2, que es el motriz, por lo que implica la variable independiente del tipo angular q . El vector del eslabón 3 es del movimiento tipo *III*, dado su parámetro variable de longitud y su parámetro variable angular, por lo que tanto r como q son parámetros desconocidos. El eslabón fijo —o tierra— es del tipo *O*, no tiene movimiento. El eslabón de salida, vector 4, posee movimiento tipo *I*, pero tiene una función matemática de posición con el eslabón 3, como se muestra en la ec. (5). Para la aplicación de la expresión general de aceleración por el método de particiones, se requiere el planteamiento de la ecuación de cierre vectorial en su notación polar compleja, ec. (6):

$$\theta_4 = \theta_3 + \gamma \quad (5)$$

$$r_2 e^{j\theta_2} + r_3 e^{j\theta_3} = r_1 e^{j\theta_1} + r_4 e^{j\theta_4} \quad (6)$$

Se obtienen las funciones de error del sistema (ϕ) al separar los anteriores términos en dirección real e imaginaria, colocando todos los términos a la izquierda de la igualdad e igualando a cero las expresiones resultantes. La función de error ϕ_1 resulta de la agrupación de los términos reales. La función de error ϕ_2 resulta de la agrupación de los términos imaginarios, como se indica en las ecs. (7a) y (7b).

$$\text{real)} \quad \phi_1 = r_2 \cos\theta_2 + r_3 \cos\theta_3 - r_1 \cos\theta_1 - r_4 \cos\theta_4 = 0 \quad (7a)$$

$$\text{imaginaria)} \quad \phi_2 = r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 - r_1 \sin\theta_1 - r_4 \sin\theta_4 = 0 \quad (7b)$$

$q = \theta_2, r_3, \theta_3, \theta_4$: son las variables totales del sistema. Es la suma de las variables

independientes v_j y las variables dependientes u_j . El valor de j en el parámetro q se refiere al número de parámetros del sistema, no se refiere al número del vector planteado en la ecuación de cierre vectorial. Esto debido a que el subíndice j puede repetirse para un parámetro r y un parámetro θ . Por ejemplo, en este caso, existe r_3 y θ_3 . Se entiende que $q_j = q_1, q_2, q_3, q_4$, y que equivale a que $q_1 = \theta_2, q_2 = r_3, q_3 = \theta_3, q_4 = \theta_4$. $v_j = \theta_2$ es la variable independiente. $u_j = r_3, \theta_3, \theta_4$ son el total de las variables dependientes. De igual manera se entiende que $u_1 = r_3, u_2 = \theta_3, u_3 = \theta_4$. $u_j^{\text{II}} = r_3, \theta_3$ son el total de las variables dependientes que intervienen en la construcción de la *matriz Jacobiana*. Se excluye θ_4 porque es función de θ_3 . $r_j^{\text{III}} = r_3$ es la variable de dimensión dependiente que es parte de $u_j = r_3, \theta_3, \theta_4$. r_j^{III} es la variable dependiente del sistema que se utiliza para generar la componente de Coriolis. Para la construcción de la matriz Jacobiana, el término $\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} \right]$ representa la derivada parcial de cada una de las funciones de error respecto a cada una de las variables dependientes del sistema. Es decir, r_3 y θ_3 . Recordando que se definió a $u_j^{\text{II}} = r_3, \theta_3$ como el total de las variables dependientes que intervienen en la construcción de la matriz Jacobiana. No se toma en cuenta θ_4 para la construcción de la matriz Jacobiana debido a que es una variable dependiente de θ_3 . Para construir la matriz Jacobiana es importante expresar las funciones de error en función sólo de las variables dependientes. Se reescriben de la siguiente manera al combinar las ecs. (6), (7a) y (7b), resultando las ecs. (8a) y (8b):

$$r) \quad \phi_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 \cos \theta_1 - r_4 \cos(\theta_3 + \gamma) = 0 \quad (8a)$$

$$i) \quad \phi_2 = r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 - r_1 \sin \theta_1 - r_4 \sin(\theta_3 + \gamma) = 0 \quad (8b)$$

Se efectúan las correspondientes derivadas parciales de cada una de las funciones de error con respecto a cada una de las variables del sistema, representadas en las ecuaciones (9)-(12).

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_3} \right) = \cos \theta_3 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_3} \right) = -r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin(\theta_3 + \gamma) \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_3} \right) = \sin \theta_3 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_3} \right) = r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos(\theta_3 + \gamma) \quad (12)$$

La matriz *Jacobiana* se representa como en la ec. (13) una vez encontrados los términos y acomodándolos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin(\theta_3 + \gamma) \\ \sin \theta_3 & r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos(\theta_3 + \gamma) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Los términos u_j^{II} son r_3, θ_3 , por los que II indica que son solamente los parámetros que intervienen en la construcción de la matriz *Jacobiana*. Entonces $\dot{u}_j = \dot{r}_3, \dot{\theta}_3$, y por lo

tanto $\ddot{u}_j = \ddot{r}_3, \ddot{\theta}_3$. $\dot{\theta}_3$ representa la primer derivada de la posición angular del eslabón 3, por lo que se convierte en la velocidad angular del mismo, es decir, ω_3 . De la misma manera que $\ddot{\theta}_3$ indica la segunda derivada de la posición angular del eslabón 3, por lo que se convierte en la aceleración angular α_3 . El término $-\left[\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j}\right] \cdot \dot{v}_j$ se desarrolla a continuación: Para la primera función de error, ϕ_1 se convierte en ϕ_1 y como $v_j = v_1$ y $v_1 = \theta_2$, entonces $\dot{v}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega_2$, luego $\ddot{v}_1 = \ddot{\theta}_2 = \alpha_2$, que representa la aceleración angular conocida del eslabón motriz. La siguiente operación representa la derivada parcial de la primera función de error, ϕ_1 , ec. (8a) con respecto al parámetro v_1 . El resultado se expresa en la ec. (14):

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial v_j} = \frac{\partial \phi_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} = -r_2 \text{sen} \theta_2 \quad (14)$$

Luego, se multiplica este resultado por $\ddot{v}_1 = \ddot{\theta}_2 = \alpha_2$, para lograr el resultado completo, como se observa en la ec. (15):

$$-\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial v_1}\right] \cdot \ddot{v}_1 = -\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial v_1}\right] \cdot \ddot{\theta}_2 = -\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial v_1}\right] \cdot \alpha_2 = -(-r_2 \text{sen} \theta_2) \cdot \alpha_2 =$$

$$r_2 \text{sen} \theta_2 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 r_2 \text{sen} \theta_2 \quad (15)$$

Con el mismo procedimiento, para la segunda función de error ϕ_2 , ec. (8b), cuyo resultado se señala en la ec. (17) y el resultado intermedio en la ec. (16):

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial v_1} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_2} = r_2 \text{cos} \theta_2 \quad (16)$$

$$-\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial v_1}\right] \ddot{v}_1 = -\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial v_1}\right] \ddot{\theta}_2 = -\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial v_1}\right] \alpha_2 = -(r_2 \text{cos} \theta_2 \cdot \alpha_2) = -\alpha_2 r_2 \text{cos} \theta_2 \quad (17)$$

El primer término del lado derecho de la aceleración, ec. (3), produce las aceleraciones tangenciales del elemento motriz. Dichos términos en dirección real e imaginaria, ecs. (15) y (17) respectivamente. El término $-\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j}\right) \cdot \dot{q}_j\right] \cdot \dot{q}_j$ produce las aceleraciones normales de los vectores en movimiento *tipo I* y se calcula derivando parcialmente cada función de error respecto a cada una de las variables del sistema: $q_j = v_j + u_j$. Seguidamente se multiplica por la derivada de la variable \dot{q}_j para volverse a derivar parcialmente por la misma variable q_j y multiplicarse nuevamente por \dot{q}_j . Recordando que $q_j = \theta_2, r_3, \theta_3, \theta_4$ son las variables totales del sistema. Se desarrolla a continuación para la variable angular θ_2 debido a que j toma el valor de 1 e i igualmente toma el valor de 1, es decir, la derivada parcial de la función de error ϕ_1 , respecto a la variable número 1 del sistema. $q_j = \theta_2, r_3, \theta_3, \theta_4$ son las variables totales del sistema. Se entiende que $q_j = q_1, q_2, q_3, q_4$ y que equivale a que $q_1 = \theta_2, q_2 = r_3, q_3 = \theta_3, q_4 = \theta_4$. La operación intermedia se muestra en la ec. (18) y el resultado en la ec. (19).

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta_2} = -r_2 \text{sen} \theta_2 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial q_1}\right) \cdot \dot{q}_1 = \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_2}\right) \cdot \dot{\theta}_2 = \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\omega_2}\right) \cdot \omega_2 = -r_2 \text{sen}\theta_2 \cdot \omega_2 = -\omega_2 r_2 \text{sen}\theta_2 \quad (19)$$

Esta expresión representa sólo la primera derivada parcial multiplicada por la primera derivada de la primer variable del sistema. Para completar la expresión, se debe realizar la misma operación por segunda vez. El procedimiento en partes, se muestra en la ec. (20a) y ec. (20b):

$$-\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial q_j}\right) \cdot \dot{q}_j\right] \cdot \dot{q}_j = -\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial q_1}\right) \cdot \dot{q}_1\right] \cdot \dot{q}_1 = -\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(-\omega_2 r_2 \text{sen}\theta_2)\right] \cdot \dot{q}_1 \quad (20a)$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial\theta_2}(-\omega_2 r_2 \text{sen}\theta_2)\right] \cdot \dot{\theta}_2 = -[-\omega_2 r_2 \text{cos}\theta_2] \cdot \omega_2 = \omega_2^2 r_2 \text{cos}\theta_2 \quad (20b)$$

Para la segunda variable del sistema, al aplicar $-\left[\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial q_j}\right) \cdot \dot{q}_j\right] \cdot \dot{q}_j$, donde $i=1$ y $j=2$, se tendría que $-\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial q_2}\right) \cdot \dot{q}_2\right] \cdot \dot{q}_2$. Como $q_2=r_3$, tenemos que $-\left[\frac{\partial}{\partial r_3}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r_3}\right) \cdot \dot{r}_3\right] \cdot \dot{r}_3 = -\left[\frac{\partial}{\partial r_3}(\text{cos}\theta_3) \cdot \dot{r}_3\right] \cdot \dot{r}_3 = -\left[\frac{\partial}{\partial r_3}(\dot{r}_3 \text{cos}\theta_3)\right] \cdot \dot{r}_3$. Al realizar la segunda derivada parcial de la expresión en paréntesis, respecto a r_3 , no existe como tal esa variable, por lo que el resultado es cero: $-\left[\frac{\partial}{\partial r_3}(\dot{r}_3 \text{cos}\theta_3)\right] \cdot \dot{r}_3 = 0$. Por esta razón, se dice que este término sólo es aplicable a los vectores que representan eslabones con movimiento angular. Los vectores tipo III, con valor variable en su longitud, sus derivadas parciales siempre serán cero debido a que en su primera derivada parcial, la variable desaparece de la expresión y para la segunda derivada parcial, ya no se encuentra contenida en la expresión. El desarrollo de los términos $q_3 = \theta_3$ y $q_4 = \theta_4$ es exactamente igual que para la variable $q_1=\theta_2$, por lo que el resultado para q_3 y q_4 quedarían de la forma como se muestra en la ec. (21). Para el desarrollo de la segunda función de error, el procedimiento se expresa en la ec. (22). Como la variable θ_4 se encuentra a la derecha del signo de igualdad, entonces sólo cambia el signo final y se conserva el mismo procedimiento, ec. (23). El desarrollo para la segunda función de error se encuentra en la ec. (24):

$$-\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial q_3}\right) \cdot \dot{q}_3\right] \cdot \dot{q}_3 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_3}\right) \cdot \dot{\theta}_3\right] \cdot \dot{\theta}_3 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_3}\right) \cdot \omega_3\right] \cdot \omega_3 = \omega_3^2 r_3 \text{sen}\theta_3 \quad (21)$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial q_3}\right) \cdot \dot{q}_3\right] \cdot \dot{q}_3 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta_3}\right) \cdot \dot{\theta}_3\right] \cdot \dot{\theta}_3 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta_3}\right) \cdot \omega_3\right] \cdot \omega_3 = \omega_3^2 r_3 \text{cos}\theta_3 \quad (22)$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial q_4}\right) \cdot \dot{q}_4\right] \cdot \dot{q}_4 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_4}\right) \cdot \dot{\theta}_4\right] \cdot \dot{\theta}_4 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta_4}\right) \cdot \omega_4\right] \cdot \omega_4 = -\omega_4^2 r_4 \text{sen}\theta_4 \quad (23)$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial q_4}\right) \cdot \dot{q}_4\right] \cdot \dot{q}_4 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta_4}\right) \cdot \dot{\theta}_4\right] \cdot \dot{\theta}_4 = -\left[\frac{\partial}{\partial\theta_4}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta_4}\right) \cdot \omega_4\right] \cdot \omega_4 = -\omega_4^2 r_4 \text{cos}\theta_4 \quad (24)$$

En la expresión donde se genera la componente de Coriolis, $-2\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III}\right] \cdot \dot{\theta}_j$, se procede primero con el término más interno. El término $\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial r_j^{III}}\right)$ representa la derivada

parcial de las funciones de error respecto al parámetro de longitud variable, el vector con movimiento tipo *III*. En este caso es el vector \mathbf{R}_3 . Desarrollando para la primera función de error θ_1 , ec. (7a), se obtiene su derivada parcial, ec. (25), luego se multiplica por la derivada de la longitud del vector \mathbf{R}_3 , ec. (26). El parámetro se refiere a la dimensión escalar del vector \mathbf{R}_3 .

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_3}\right) = \cos\theta_3 \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III} = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r_3}\right) \cdot \dot{r}_3 = \cos\theta_3 \cdot \dot{r}_3 \quad (26)$$

A continuación se deriva parcialmente por segunda ocasión con respecto a la variable angular del mismo vector \mathbf{R}_3 , para posteriormente multiplicarla por la derivada de la variable angular del mismo vector, es decir, su velocidad angular ω_3 , ec. (27). Para completar esta expresión, hace falta sólo multiplicar por el 2 negativo, ec. (28).

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III}\right] \cdot \dot{\theta}_j = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_3} (\cos\theta_3 \dot{r}_3)\right] \cdot \dot{\theta}_3 = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_3} (\cos\theta_3 \dot{r}_3)\right] \cdot \omega_3 =$$

$$-\text{sen}\theta_3 \cdot \dot{r}_3 \cdot \omega_3 = -\omega_3 \dot{r}_3 \text{sen}\theta_3 \quad (27)$$

$$-2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III}\right] \cdot \dot{\theta}_j = +2\omega_3 \dot{r}_3 \text{sen}\theta_3 \quad (28)$$

Para el desarrollo de la expresión con la segunda función de error, θ_2 , tenemos el siguiente resultado al seguir el mismo procedimiento anterior, a partir de las ecs. (29)-(32):

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_3}\right) = \text{sen}\theta_3 \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III} = \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r_3}\right) \cdot \dot{r}_3 = \text{sen}\theta_3 \cdot \dot{r}_3 \quad (30)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III}\right] \cdot \dot{\theta}_j = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_3} (\text{sen}\theta_3 \dot{r}_3)\right] \cdot \dot{\theta}_3$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \theta_3} (\text{sen}\theta_3 \dot{r}_3)\right] \cdot \omega_3 = \cos\theta_3 \cdot \dot{r}_3 \cdot \omega_3 = \omega_3 \dot{r}_3 \cos\theta_3 \quad (31)$$

$$-2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r_j^{III}}\right) \cdot \dot{r}_j^{III}\right] \cdot \dot{\theta}_j = -2\omega_3 \dot{r}_3 \cos\theta_3 \quad (32)$$

Colocando todos los términos resultantes de la aplicación de la fórmula general de aceleración, tenemos para los términos reales, ec. (33), derivados de la primera función de error, y los términos imaginarios, ec. (34), derivados de la segunda función de error:

$$r) \alpha_2 r_2 \text{sen}\theta_2 + \omega_2^2 r_2 \cos\theta_2 + \omega_3^2 r_3 \cos\theta_3 - \omega_4^2 r_4 \cos\theta_4 + 2\omega_3 \dot{r}_3 \text{sen}\theta_3 \quad (33)$$

$$i) -\alpha_2 r_2 \cos\theta_2 + \omega_2^2 r_2 \text{sen}\theta_2 + \omega_3^2 r_3 \text{sen}\theta_3 - \omega_4^2 r_4 \text{sen}\theta_4 - 2\omega_3 \dot{r}_3 \cos\theta_3 \quad (34)$$

Recordando que existe una función matemática entre θ_3 y θ_4 : $\theta_4 = \theta_3 + \gamma$, se reescriben las anteriores ecuaciones como sigue, ecs. (35) y (36):

$$r) \alpha_2 r_2 \text{sen} \theta_2 + \omega_2^2 r_2 \text{cos} \theta_2 + \omega_3^2 r_3 \text{cos} \theta_3 - \omega_4^2 r_4 \text{cos}(\theta_3 + \gamma) + 2\omega_3 \dot{r}_3 \text{sen} \theta_3 \quad (35)$$

$$i) -\alpha_2 r_2 \text{cos} \theta_2 + \omega_2^2 r_2 \text{sen} \theta_2 + \omega_3^2 r_3 \text{sen} \theta_3 - \omega_4^2 r_4 \text{sen}(\theta_3 + \gamma) - 2\omega_3 \dot{r}_3 \text{cos} \theta_3 \quad (36)$$

El sistema total a resolver numéricamente que representa el comportamiento dinámico de aceleración del mecanismo inversión de biela manivela queda representado como se indica a continuación en formato matricial, ec. (37):

$$\begin{bmatrix} \text{cos} \theta_3 & -r_3 \text{sen} \theta_3 + r_4 \text{sen}(\theta_3 + \gamma) \\ \text{sen} \theta_3 & r_3 \text{cos} \theta_3 - r_4 \text{cos}(\theta_3 + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 r_2 \text{sen} \theta_2 + \omega_2^2 r_2 \text{cos} \theta_2 + \omega_3^2 r_3 \text{cos} \theta_3 \\ -\omega_4^2 r_4 \text{cos}(\theta_3 + \gamma) + 2\omega_3 \dot{r}_3 \text{sen} \theta_3 \\ -\alpha_2 r_2 \text{cos} \theta_2 + \omega_2^2 r_2 \text{sen} \theta_2 + \omega_3^2 r_3 \text{sen} \theta_3 \\ -\omega_4^2 r_4 \text{sen}(\theta_3 + \gamma) - 2\omega_3 \dot{r}_3 \text{cos} \theta_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Es vital señalar la importancia de la selección del orden de las variables. Los términos u_j^{\parallel} son r_3, θ_3 , en ese orden expresado: primero el parámetro de longitud y después el parámetro angular. Una vez definido ese orden, no es recomendable cambiarlo debiendo permanecer como $u_1=r_3$ y $u_2=\theta_3$. Si se cambia el orden de los parámetros, se debe tomar en cuenta que las columnas definidas en la matriz *Jacobiana* se intercambiarán, debido a las propiedades propias de las matrices. De manera obvia, el orden de los parámetros se seleccionan al inicio y no existe regla para definir cuál primero, sólo es cuestión de gusto.

2.4 Ejemplo de aplicación

Se procede ahora a la aplicación de la formulación resultante utilizando valores numéricos de un ejercicio en particular. Como datos iniciales y conocidos para el primer análisis de posición, se tienen las siguientes dimensiones, en unidades de longitud (ul): $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $r_4 = 4$, $\gamma = 90^\circ$, $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$. Con la aplicación de la ec. (1), un análisis de posición arroja los siguientes resultados: $r_3 = 2.00$ y $\theta_3 = 66.8699^\circ$. Con la función expresada en la ec. (5), tenemos que $\theta_4 = 156.8699^\circ$. Con ésta información y un valor del elemento motriz de velocidad angular $\omega_2 = 10 \text{ rad/seg}$, aplicando la ec. (2) para realizar un análisis de velocidad, se tienen los siguientes resultados: $\dot{r}_3 = 40.00 \text{ ul/seg}$ y $\omega_3 = -6.00 \text{ rad/seg}$. \dot{r}_3 representa la velocidad lineal con la que el eslabón 3 se desliza con respecto al eslabón 4. ω_3 es la velocidad angular del eslabón 3. Si se deriva la ec. (5), y como consecuencia de la configuración física y geométrica del mecanismo, se concluye que $\omega_3 = \omega_4$, es decir, la velocidad angular del eslabón 3, es la misma velocidad angular del eslabón 4. Si se conoce el valor de la aceleración angular, $\alpha_2 = 2 \text{ rad/seg}^2$, aplicando la ec. (3) para realizar el análisis de aceleración en su forma particular para el mecanismo inversión biela-manivela, de acuerdo a la ec. (37), se obtienen los siguientes términos numéricos, evaluando la matriz jacobiana y los términos del lado derecho, obteniéndose la ec. (38):

$$\begin{bmatrix} 0.3928 & -0.2679 \\ 0.9196 & 4.4641 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -377.2436 \\ 373.4050 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Simultanizando la ecuación anterior, se obtienen los siguientes resultados: $\ddot{r}_3 = -792.00 \text{ ul/seg}^2$, y $\alpha_3 = 246.80 \text{ rad/seg}^2$. Por la misma razón expresada en el análisis de velocidad, en aceleración se concluye que $\alpha_3 = \alpha_4$, la aceleración angular del eslabón 3 es la misma que la aceleración angular del eslabón 4 y \ddot{r}_3 representa la aceleración lineal con la que el eslabón 3 se desliza con respecto al eslabón 4. En la figura 4 se muestra el mecanismo del ejemplo de aplicación.

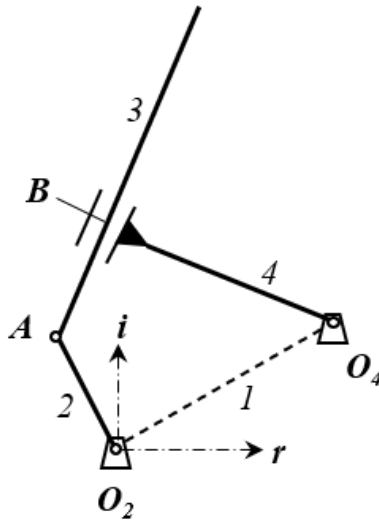


Figura 4. Mecanismo inversión biela-manivela.

3 | CONCLUSIONES

Este tipo de ecuaciones, presentan como ventaja principal, que proporcionan el modelo matemático, ya sea en forma de ecuaciones simultáneas lineales o en formato matricial, del análisis de aceleración sin tener que pasar por la formulación del sistema de velocidad ni por el sistema de posición angular, aunque para su solución sí requiere los valores numéricos emanados de ellos. En suma, la formulación del análisis de aceleración, es independiente de las formulaciones, tanto de velocidad como de posición.

La formulación de aceleración, ec. (3), toma en cuenta la *componente de la aceleración de Coriolis*, que sólo se produce cuando está presente el movimiento de un vector *tipo III*, cuando en el mecanismo contiene un par cinemático de tipo prismático (*P*) con dirección variable. Estas condiciones se presentan en mecanismos más complejos y puede ser utilizada ésta formulación en mecanismos y maquinaria que utilicen pistones hidráulicos, dispositivos mecánicos donde se presentan dichas características de movimiento. Si el

mecanismo contiene sólo pares revolutas (R) y pares prismáticos (P) con dirección definida y constante, la condición de *Coriolis* desaparece y la formulación se simplifica.

Los pasos comprendidos entre la ec.(3), y su expresión final, ec. (37), puede codificarse bajo cualquier lenguaje de programación para su automatización en el cálculo de sus valores numéricos. Puede realizarse para este mecanismo en particular, o formularse como un procedimiento para aplicarse a cualquier mecanismo general. Esto último requeriría código de programación más avanzado perteneciente al área de desarrollo de software.

El desarrollo de la ec. (3) aplicado al mecanismo inversión biela-manivela, corresponde a un mecanismo básico o simple. La misma ecuación puede ser aplicada a mecanismos complejos, aquellos que requieren de 2 o más ecuaciones de cierre vectorial. El procedimiento listado de la ec. (4) a la ec. (37), se repite para cada ecuación vectorial. De esta manera, una ecuación vectorial de cierre produce un sistema lineal y simultáneo de 2×2 ; dos ecuaciones de cierre vectorial, dan lugar a un sistema lineal de 4×4 y así sucesivamente.

Por la forma en que se encuentra formulada la ec. (3), no es común que sea estudiada como tal en los cursos normales de la asignatura de *Análisis y Síntesis de Mecanismos*. Esta forma se presta más para niveles de posgrado en la materia. Es necesario para su mejor comprensión, competencias previas adquiridas en las áreas de ciencias básicas de ingeniería.

REFERENCIAS

Avello, A. (2014). *Teoría de máquinas*. Univ. de Navarra: TECNUN.

Borovin, B. F. (2014). La aplicación del método de fragmentación en la enseñanza de cinemática de mecanismos. *Científica*, 18(1), 17-24.

Cardona Foix, S. (2001). *Teoría de máquinas*. Barcelona: UPC.

Erdman, Arthur G.; Sandor, George N.; (1998). *Diseño de mecanismos, análisis y síntesis* (3a. ed.). Naucalpan de Juárez, Edo. de México, México: Prentice Hall.

Lopez-Custodio, P. C. (2012). Análisis cinemáticos de orden superior de cadenas cinemáticas planas y sus aplicaciones. *Acta universitaria*, 22(4), 23-33.

Nikravesh, P. E. (1988). *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. New Jersey, U.S.A.: Prentice-Hall, Inc.

Norton, R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria, síntesis y análisis de máquinas y mecanismos* (5a. ed.). México, CDMX, México: McGraw Hill.

ÍNDICE REMISSIVO

A

Aceleración 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 25

Acceleration 14

Automação industrial 3, 4, 9, 12, 13

Automatização 1, 12

Avaria no transporte 52, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64

C

Canais 7

Cliente 3, 4, 12, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 63

CLP 1, 3, 7, 8, 11, 13

Controlador lógico programável 1, 2, 7, 13

Coriolis 14, 15, 16, 18, 20, 22, 25, 26

Cross-Docking 60

D

Demanda 5, 11, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 44, 45, 50

Devolução de mercadorias 52

Diagrama de Ishikawa 52, 55, 58, 59, 63

Diagrama de Pareto 52, 55, 56, 57, 58

E

Eficiência 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 53, 54

Equipe 38, 39, 40, 41, 43, 45, 49, 64

F

Ferramentas de qualidade 52, 54, 63, 64

Fidelização 38, 39, 42, 43, 44, 48, 49, 50, 51, 54

G

Gestão de estoques 33

I

Indústria 4.0 5, 6, 13

L

Liderança 38, 39, 40, 41, 42, 43, 48, 49, 50

Linha de produção 1, 2, 3, 4, 9, 11, 12

Linkages 14

Lógica 1, 47

Logística reversa 52, 53, 63, 64, 65

M

Manufatura 5, 13, 27, 36, 37

Marketing 37, 39, 42, 45, 49, 50, 51, 66

Mecanismos 4, 14, 15, 16, 17, 25, 26

Motivação 38, 39, 42, 48

O

Oscilante 27, 28, 30, 32, 33

P

Particiones 14, 15, 17, 19

Partitions 14

Planejamento da produção 31

Pós-venda 52, 63, 65

PPCP 27, 28, 31, 36

Previsão 29, 30, 32

Produto 1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 35, 36, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 53, 54, 57, 60, 64

Q

Qualitativos 30

S

Serviços 5, 7, 27, 33, 35, 40, 43, 44, 45, 49, 50

Sistemas 3, 4, 5, 6, 7, 16, 27, 28, 35, 36, 66

Sistemas distribuídos para controle digital 3

SPSS 59

V

Vendas 29, 30, 32, 35, 36, 39, 64

ENGENHARIA DE PRODUÇÃO:

Desafios científicos e problemas aplicados 3

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](#) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

ENGENHARIA DE PRODUÇÃO:

Desafios científicos e problemas aplicados 3

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](#) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 