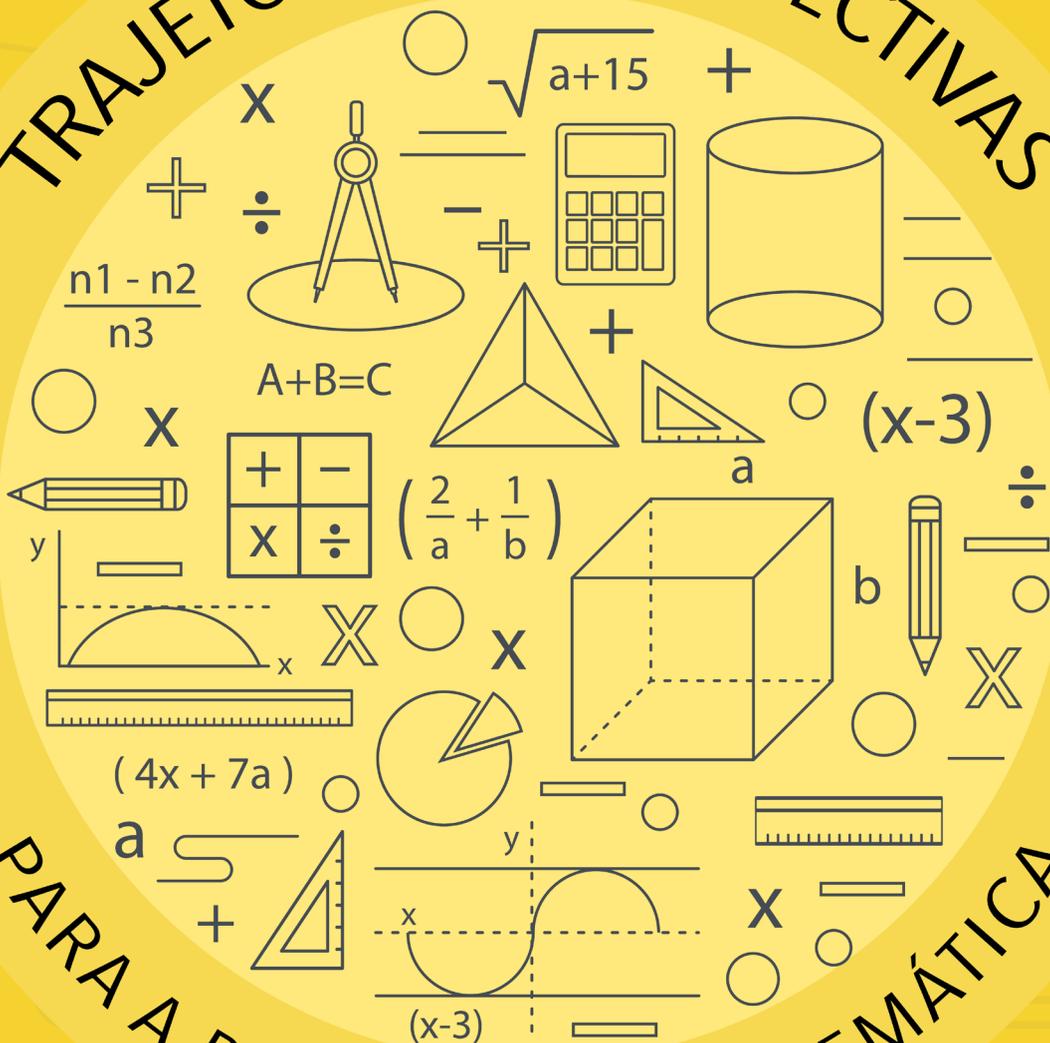


AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA

(Organizador)

TRAJETÓRIAS E PERSPECTIVAS



PARA A PESQUISA EM MATEMÁTICA

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof^o Dr^a Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará

Prof^o Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande

Prof^o Dr^a Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Prof^o Dr^a Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba

Prof^o Dr^a Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Prof^o Dr^a Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas

Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Trajatórias e perspectivas para a pesquisa em matemática

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
T768	Trajatórias e perspectivas para a pesquisa em matemática / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-0854-3 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.543220612 1. Matemática – Pesquisa. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título. CDD 510.07
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a se aterem aos cursos de licenciatura e Educação Básica com atenção. Importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo de pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro “*Trajatórias e perspectivas para a pesquisa em matemática*” nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

CAPÍTULO 1 1**DESAFIOS PARA O PROCESSO DE ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DE AULAS ON-LINE EM TEMPOS DE PANDEMIA**

Cícera de Alencar
 Elma Mota dos Santos Gonçalves
 Jaqueline de Araújo Silvestre Batista
 Eugênia Aurélia Rodrigues
 Maria da Cruz de Sousa Guimarães
 Monizy Silva Pereira
 Fabiula Cristina da Costa Almeida
 Secília Rodrigues Rosa
 Ana Maria Sampaio dos Santos
 Terezinha Aparecida Rodrigues Caputo

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5432206121>

CAPÍTULO 2 12**HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES DA LICENCIATURA ATÉ A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

Rudson Carlos da Silva Jovano
 Kesia Santana Machado de Sousa
 Danielly da Silva Francisco
 Nério Aparecido Cardoso

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5432206122>

CAPÍTULO 3 24**UMA DISCUSSÃO SOBRE OS ASPECTOS METODOLÓGICOS DAS INVESTIGAÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO GRUPO DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL (GREF)**

Rudson Carlos da Silva Jovano
 Nério Aparecido Cardoso
 Ana Fanny Benzi de Oliveira Bastos
 Danielly da Silva Francisco
 Késia Santana Machado de Sousa

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5432206123>

CAPÍTULO 4 41**TEORIA DE SISTEMAS: METODOLOGIA PARA MODELAÇÃO UNIFORMIZADA DE DISTINTAS REALIDADES FÍSICAS**

João M. Gago Lima

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5432206124>

CAPÍTULO 5 54**ON THE WELLPOSEDNESS OF THE KDV-K-S EQUATION IN PERIODIC SOBOLEV SPACES**

Yolanda Silvia Santiago Ayala

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5432206125>

SOBRE O ORGANIZADOR	85
ÍNDICE REMISSIVO	86

TEORIA DE SISTEMAS: METODOLOGIA PARA MODELAÇÃO UNIFORMIZADA DE DISTINTAS REALIDADES FÍSICAS

Data de aceite: 01/12/2022

João M. Gago Lima
University of Algarve

ABSTRACT: Automatic Control Systems are far and wide used in all modern and industrialized societies. Devices designed to control automatized tasks are each time more present from small plants to large industrial buildings. The development of mathematical models is a compulsory task for whom aim at analyzing or design any control systems. These mathematical models should reproduce some performance measures as accurate as possible. So, no matter the physical nature of the process we aim at control, an accurate mathematical model should be evaluate. So, the development of mathematical models can be considered an hi-level step over the physical nature of the system that we aim at analyze or design. For this reason the study of Systems Theory and Control Systems are considered transversal areas of the knowledge and them studies are compulsory in many branches of sciences and technologies in many universities all over the world. In spite of normal systems are non-linear the linearization procedure simplify the analysis and design of control

systems and, depending on the accuracy of the model can give us good results.

KEYWORDS: Physical Systems, mathematical models, differential equations.

1 | INTRODUÇÃO

A Teoria dos Sistemas é composta por métodos formais com vista ao estudo, projeto, interpretação analítica e homogeneizada de sistemas físicos do nosso quotidiano independentemente de quais sejam as suas naturezas (Ribeiro, M. (2002)).

Sistemas de controlo automático estão cada vez mais presentes em todas as sociedades industrializadas, então, facilmente se compreende que a Teoria dos Sistemas inclua temas e metodologias úteis em diferentes ramos das ciências e tecnologias.

Um enquadramento mais palpável da Teoria dos Sistemas pode ser apresentado num contexto de conceção de um sistema de controlo (Ribeiro, M. (2002)). Desta forma, independentemente de qual seja a dimensão ou a natureza

física do sistema que se pretenda controlar, o projeto de um controlador deverá ter em conta as seguintes fases:

- Especificação
- Modelação
- Análise
- Verificação das especificações
- Síntese

O controlador que se pretende sintetizar (ou projetar) deverá ter em conta uma lista de especificações que deverão ser atendidas pelo sistema uma vez que este esteja controlado. Um sistema (ou processo) que se pretenda controlar terá uma complexidade mais ou menos elevada. O projeto de controladores é por vezes um procedimento iterativo tal que, até se atingir a solução final, soluções intermédias são experimentadas podendo resultar funcionamentos mais ou menos lesivos para o processo que se pretende controlar. Assim sendo, a utilização direta do processo que se pretende controlar durante o procedimento de síntese do controlador poderá originar danos graves, desta forma, assume-se com especial importância a fase de modelação. A utilização de um modelo adequado do processo que se pretende controlar tem como vantagem a preservação deste durante a fase de síntese do controlador.

Para além disso, em ambiente laboratorial dispõe-se, dum modo geral, de dispositivos que de alguma forma modelam processos do quotidiano.

Um modelo consiste geralmente numa simplificação da realidade e deverá ter em conta as especificações a ser atendidas na fase de síntese do controlador.

Estabelecido um modelo para o processo que se pretende controlar, passa-se à fase de análise deste para se verificar se a lista de especificações é ou não atendida. Nessa altura, consoante o grau de verificação das especificações, assim se se decidirá (ou não) pelo projeto dum controlador. Tal projeto consiste na associação de dispositivos e determinação dos respetivos parâmetros com vista à verificação das especificações.

A Teoria dos Sistemas está presente, em maior ou menor grau, em todas as fases da conceção de um sistema de controlo automático, independentemente de qual seja a sua natureza física. Apesar das abordagens iniciais versarem sobre sistemas elétricos ou mecânicos, presentemente a Teoria dos Sistema encontra aplicabilidade numa larga gama de áreas do conhecimento estendendo-se inclusivamente às ciências sociais (Ribeiro, M. (2002)).

No presente artigo vão ver estudadas, recorrendo a exemplos, representações matemáticas de sistemas que se poderão incluir na etapa de modelação; neste contexto, este artigo é composto pelas secções que se descrevem de seguida. A secção 2 debruçase sobre a representação matemática de sistemas sendo dado ênfase a sistemas lineares

e invariantes no tempo SLIT contínuos. Na secção 3 será exemplificado como diferentes realidades físicas são modeladas pela mesma realidade matemática. Na secção 4 será apresentado um procedimento uniformizador para a representação de sistemas. O artigo termina com a secção 5 onde se concluirá que diferentes realidades físicas podem ser descritas pela mesma realidade matemática.

2 | REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

Os sistemas que usualmente se encontram no quotidiano são dum modo geral não lineares. Sistemas lineares correspondem a aproximações da realidade que, em maior ou menor grau, podem ser consideradas bastante satisfatórias resultando em modelos cuja exatidão deverá ser tida em conta, tendo em vista o fim a que se destinam. Pode-se assim dizer que um modelo é uma abstracção da realidade física extraíndo dela as características que se considerem relevantes para o fim em vista, tendo em conta hipóteses simplificativas.

No âmbito da Teoria dos Sistemas, ao modelo chama-se sistema, e este constitui a sua entidade básica sobre a qual ela (Teoria dos Sistemas) se debruça (Ribeiro, M. (2002)).

O carácter simplificado do modelo relativamente ao sistema físico que o originou explica o facto de, a partir de um mesmo sistema físico poderem ser extraídos vários modelos consoantes as questões relativas ao sistema físico que se pretendam ver resolvidas. Por exemplo, considerando o sistema físico (elétrico) transistor sabe-se que o modelo para baixas frequências é diferente do modelo para as altas frequências, então, o modelo a adotar deverá ter em conta a gama de frequência onde se pretende trabalhar.

As hipóteses simplificativas na linearização de um sistema deverão ter em conta o ponto de funcionamento do sistema físico não linear para o qual se pretende extrair o modelo. Por exemplo, a dinâmica do pêndulo gravítico pode ser linearizada assumindo que para pequenas elongações o seno dum ângulo pode ser aproximado pela sua amplitude.

A linearização de um modelo resulta numa simplificação considerável em termos de conceção e uso das ferramentas matemáticas necessárias à sua análise. Por este motivo esta secção desenvolve-se assumindo sistemas lineares e invariantes no tempo, SLIT.

Neste contexto considere-se um sistema contínuo linear e invariante no tempo arbitrário, descrito pela equação diferencial linear e de coeficientes constantes (1).

$$\begin{aligned}
 & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = \dots \\
 & b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \quad n > m
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Trata-se de um sistema de ordem igual à ordem da equação diferencial, (ordem n), em que a entrada é o sinal $u(t)$ e a saída é o sinal $y(t)$.

A linearidade do sistema traduz-se na linearidade da correspondente equação diferencial (1) e a invariância no tempo reflete-se no facto de serem constantes os

coeficientes a_i e b_j .

A equação diferencial (1) descreve completamente o correspondente sistema significando isso que, a partir dela, conhecido o sinal de entrada $u(t)$ e n valores iniciais da saída $y(t)$ e das suas $n-1$ primeiras derivadas, é possível determinar, de forma única, a evolução temporal da saída do sistema, $y(t)$.

Partindo-se de (1) pode-se obter representação em termos de entrada-saída, (ou representação externa) e representação em termos de estado (ou representação interna).

Olhando para (1) na perspectiva de entrada-saída e tendo em conta que a transformada de Laplace pode ser usada na resolução de equações diferenciais lineares, então, pode-se obter uma representação externa do sistema que resulta no quociente entre a transformada de Laplace da saída, $Y(s)$, e a transformada de Laplace da entrada, $U(s)$. Esta representação externa denomina-se função de transferência que, para o sistema representado por (1), resulta (2), sendo que, no instante inicial se consideram nula a saída $y(t)$ bem como as suas $n-1$ primeiras derivadas (Dorf, R. and Bishop, R. (1995)).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2)$$

A equação diferencial (1) permite a obtenção de uma representação interna alternativa àquela vertida em (2). Esta representação interna denomina-se modelo de estado acomodando, para além da entrada e da saída, a definição de variáveis internas. Estas variáveis internas são funções do tempo e coordenadas do vetor de estado $X(t)$, poderão ter significado físico ou serem entidades matemáticas abstratas: $X(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ (Dorf, R. and Bishop, R. (1995)).

A escolha duma representação, interna ou externa, faz-se consoante as técnicas de análise ou projeto que se pretendam utilizar enquadradas num eventual procedimento para controlo do sistema. Nomeadamente, a representação (2) permite calcular a saída $y(t)$ conhecida a entrada $u(t)$ desde que o sistema parta do repouso, ou seja, as condições iniciais sejam nulas. Porém, muitas situações do quotidiano existem em que o sistema não parte do repouso mas sim, apresenta um estado inicial não nulo, nessas circunstâncias o modelo (2) revela-se incompleto, sendo que, uma representação interna, ou modelo de estado, por acomodar a existência de condições iniciais não nulas, revela-se adequado.

A partir da representação externa (2) pode-se calcular uma infinidade de representações internas, (uma por cada conjunto de variáveis de estado $[x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$ que se escolha), sendo que, uma delas está representada pelo diagrama de simulação na Fig. 1.

A leitura direta da Fig. 1 permite estabelecer a equação de estado (3) e a equação de saída (4).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{m-1} \quad b_m \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

O par de equações (3) e (4) pode ser escrito na forma compacta (5).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \quad (5)$$

Definindo-se:

- A - matriz da dinâmica $[n \times n]$,
- B - matriz de entrada $[n \times q]$, q is the number of inputs,
- C - matriz de saída $[p \times n]$, p is the number of outputs,
- D - matriz $[p \times q]$ matrix ($D=0$, para este caso).

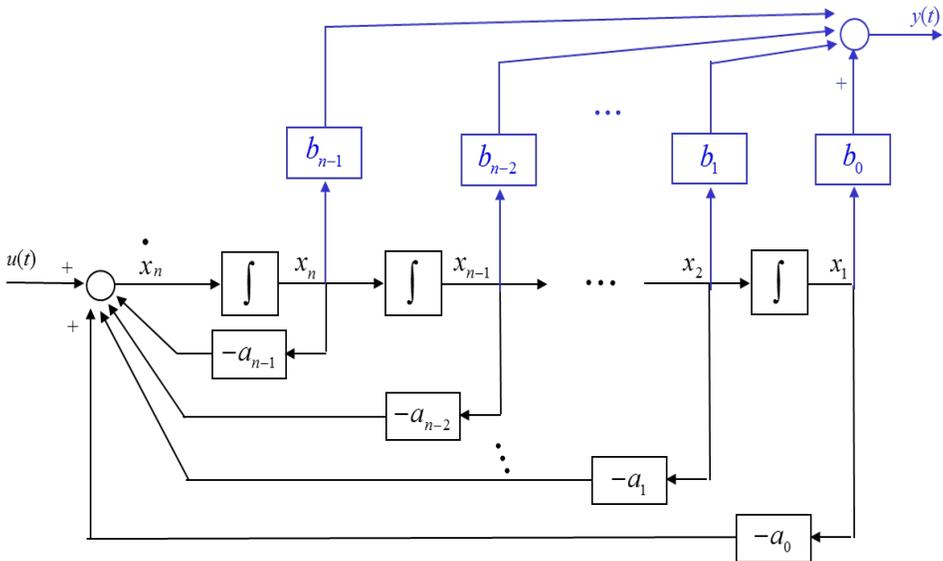


Fig. 1 –Diagrama de simulação respeitante à função de transferência (2).

A representação de SLIT desenvolvida nesta secção é genérica, para sistemas contínuos, não tendo havido a necessidade de se particularizar a suas naturezas físicas; semelhante estudo pode ser feito para sistemas discretos. Nessas circunstâncias a equação diferencial linear de coeficientes constantes (1) daria lugar a uma equação com diferenças, linear e de coeficientes constantes. O cálculo da transformada de Laplace de (1) seria substituído pelo cálculo da transformada z da equação com diferenças, originando uma função de transferência discreta análoga à que se apresenta em (2) mas sendo função de z. O diagrama de simulação (Fig. 1) daria lugar a um diagrama de simulação em que os integradores seriam substituídos por elementos de atraso unitários para tempo discreto representados por Z^{-1} . O modelo de estado discreto análogo ao contínuo (5) é dado por (6), tendo as matrizes A, B, C e D denominações análogas.

$$\begin{cases} X[k+1] = AX[k] + BU[k] \\ Y[k] = CX[k] + DU[k] \end{cases} \quad (6)$$

3 I MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS

A função de transferência como representação externa de sistemas em termos de entrada-saída e, o modelo de estado onde se definem variáveis internas (variáveis de estado), foram apresentados na secção anterior para *SLIT* contínuos. Ficou claro nessa secção que a metodologia exposta não mencionava a natureza física de nenhum sistema em particular.

Nesta secção vão ser apresentados exemplos de sistemas físicos para os quais se calcularão as correspondentes representações matemáticas (D’Azzo, J. and Houpis, C. (1988)). Apesar de se tratar de exemplos de sistemas físicos de naturezas diferentes, vai ficar claro que os mesmos serão representáveis pelo mesmo modelo matemático.

3.1 Sistema elétrico

Nesta secção vai ser estudado o sistema da Fig. 2 que consiste num circuito elétrico.

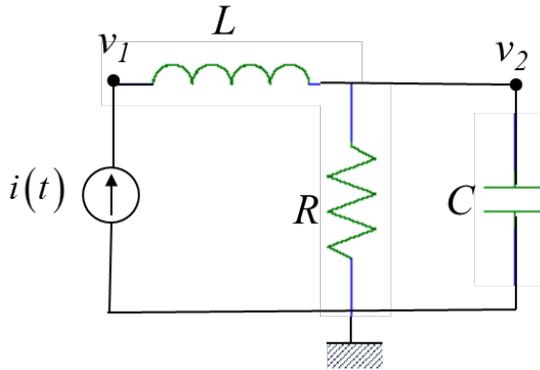


Fig. 2 – Circuito elétrico.

Este circuito é composto por uma bobine de indutância L medida em Henry $[H]$ ligada a um paralelo de uma resistência R medida em Ohm $[\Omega]$ com um condensador de capacidade C medida em Farad $[F]$; o circuito é alimentado por uma fonte de corrente $i(t)$. Para este circuito será determinada uma função de transferência e um modelo de estado que serão confrontados com os modelos representados pelas expressões (2), (3) e (4).

Na representação externa (função de transferência), é considerada como entrada a tensão aos terminais da fonte de corrente $v_1(t)$ e como saída a tensão aos terminais do condensador $v_2(t)$. Tratando-se de um sistema de natureza elétrica, as leis fundamentais da análise de circuitos elétricos (Dorf, R. (1993)) vão ser utilizadas para se chegar à função de transferência (7).

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

A função de transferência dada por (7) é formalmente idêntica ao modelo expresso por (2) tendo em conta que a saída Y corresponde à tensão V_2 , e a entrada U corresponde à tensão V_1 . Para além disso, a função racional (7) obtém-se da que se apresenta em (2) fazendo $m=0$, $n=2$ e definindo-se os coeficientes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bullet \quad & b_0 = \frac{1}{LC} \\ \bullet \quad & a_0 = \frac{1}{LC} \\ \bullet \quad & a_1 = \frac{1}{RC} \end{aligned}$$

Alternativamente, uma representação interna para o circuito elétrico da Fig. 2 pode ser estabelecida. Para os valores dos coeficientes a_0 , a_1 e b_0 , tendo em conta o modelo de estado apresentado em (3) e (4), pode-se estabelecer o modelo de estado para o circuito elétrico da Fig. 2, representado pela equação de estado (8) e a equação de saída (9). A saída $y(t)$ representa $v_2(t)$ e a entrada $u(t)$ representa $v_1(t)$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

3.2 Sistema mecânico

Nesta secção vai ser estudado o sistema mecânico translacional da Fig. 3.

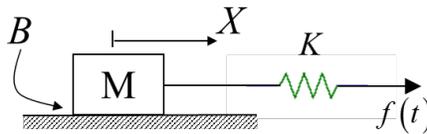


Fig. 3 – Sistema mecânico translacional.

Trata-se de uma massa M medida em Quilograma $[Kg]$ que se desloca numa superfície horizontal segundo uma reta (eixo dos X), por ação de uma força $f(t)$ medida em Newton $[N]$ aplicada a uma mola em hélice de constante de elasticidade K medida em $[\frac{N}{m}]$ ligada à massa. Do contacto da massa com a superfície gera-se um atrito de constante B medida em $[\frac{Ns}{m}]$.

De forma análoga ao que foi feito para o exemplo elétrico anterior, será determinada uma função de transferência e um modelo de estado que serão confrontados com os modelos representados pelas expressões (2), (3) e (4).

Dada a natureza física do sistema em estudo, vão ser utilizadas as leis da mecânica para o estabelecimento das equações diferenciais que descrevem a sua dinâmica (Ribeiro, M. (2002)). Assumindo-se como entrada a velocidade da extremidade da mola onde é

aplicada a força f , v_f , e como saída a velocidade da massa, v_M , determina-se a função de transferência (10) a partir das equações diferenciais obtidas previamente.

$$\frac{V_M(s)}{V_f(s)} = \frac{\frac{K}{M}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} \quad (10)$$

Semelhantemente ao que aconteceu com o circuito elétrico, a função de transferência agora obtida corresponde àquela representada por (2) tendo em conta que a saída Y corresponde à velocidade V_M e a entrada U corresponde à velocidade V_f . Trata-se de um sistema de 2ª ordem sem zeros pelo que $m=0$ e $n=2$, assim, a partir de (2) obtém-se (10) fazendo os coeficientes:

- $b_0 = \frac{K}{M}$
- $a_0 = \frac{K}{M}$
- $a_1 = \frac{B}{M}$

Apresenta-se de seguida um modelo de estado para o sistema da Fig. 3. Assim, particularizando o diagrama de simulação da Fig. 1 para os coeficientes a_0 , a_1 e b_0 podem-se então estabelecer as equações de estado (11) e de saída (12).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{M} & \frac{-B}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (11)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

As representações externas na forma de funções de transferência, respetivamente (7) e (10), bem como as a representações internas na forma de modelos de estado, respetivamente (8) e (9), (11) e (12), servem de base tanto a procedimentos de análise como a procedimentos de síntese de controladores. A escolha da representação por função de transferência ou por modelo de estado depende de que técnicas se pretendem utilizar. Tais representações permitem estudos tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

4 | REPRESENTAÇÃO UNIFORMIZADA DE SISTEMAS

Na secção anterior foram estudados 2 sistemas físicos de naturezas distintas, elétrico Fig. 2, e mecânico Fig. 3. Para tais sistemas foram apresentadas as funções de transferência e os modelos de estado respetivos (Dorf, R. and Bishop, R. (1995)). Tratando-

se de SLIT as funções de transferência estão na forma de (2) e os modelos de estado estão na forma de (5). Dada a similaridade das representações matemáticas destes 2 sistemas físicos de natureza distinta pode-se colocar a seguinte questão:

- Obtido um modelo para um dado sistema, existirão outros sistemas para os quais esse modelo seja adequado?

No caso da resposta ser afirmativa poder-se-á questionar se os outros sistemas poderão ser de natureza física distinta do sistema original.

Os exemplos apresentados na secção anterior permitem responder afirmativamente à questão colocada, na medida em que, o modelo a que se chega para o circuito elétrico é idêntico ao modelo a que se chega para o sistema mecânico. Assim, pode-se dizer que o outro sistema para o qual o modelo do sistema elétrico é adequado é de natureza distinta (mecânico).

Neste contexto, cingindo-se a sistemas de natureza elétrica e mecânica, vai-se apresentar nesta secção uma metodologia para, partindo-se de um sistema mecânico arbitrário, encontrar-se um sistema (circuito) elétrico cujo modelo matemático seja idêntico ao modelo matemático do sistema mecânico. Encontrado o circuito elétrico diz-se que este é um sistema análogo do sistema mecânico.

Consideremos as grandezas físicas envolvidas em cada um dos sistemas da secção anterior; para o circuito elétrico a perturbação do sistema é feita à custa de uma fonte de corrente enquanto para o sistema mecânico a perturbação é feita pela aplicação de uma força. Assim, pode-se considerar que a corrente elétrica num circuito tem função análoga a uma força num sistema mecânico. Na verdade, tanto a força como a corrente propagam-se através dos elementos, mecânicos e elétricos respetivamente. Os respetivos aparelhos de medida, dinamómetro para medição da força e amperímetro para medição da intensidade de corrente, são colocados em série. Assim, na procura de analogias pode-se afirmar que as seguintes grandezas físicas:

Intensidade da corrente, i \sim Força, f

são análogas.

Semelhante leitura pode ser feita relativamente à tensão elétrica num circuito e à velocidade de um ponto num sistema mecânico. Ambas as grandezas medem-se em relação a uma referência; a tensão num nó dum circuito mede-se relativamente a um nó de referência bem como a velocidade de um ponto se mede em relação a um referencial que se considera parado. Assim, na procura de analogias pode-se afirmar que as seguintes grandezas físicas:

Tensão elétrica, v \sim Velocidade, v_e

são análogas.

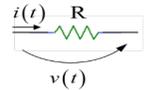
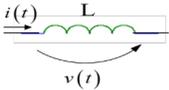
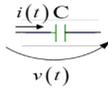
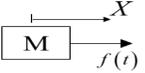
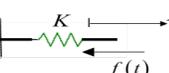
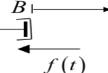
Considere-se agora os elementos básicos dos circuitos elétricos e dos sistemas mecânicos da Tab. 1 onde se apresentam as leis elementares que os governam.

Com base as leis que governam a massa M e o condensador C , respetivamente, $f(t) = M \frac{dv_e(t)}{dt}$ ¹ e $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$; então, assumindo as analogias anteriores (força, corrente elétrica e velocidade, tensão), pode-se dizer que:

- o modelo da massa M é igual ao modelo do condensador C desde que a capacidade do condensador seja $C=M$.

Considere-se agora as leis que governam a mola de constante de elasticidade K e a bobine de indutância L , respetivamente $f(t)=Kx(t)$ ² e $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Derivando ambos os membros da lei que governa a mola e resolvendo em ordem à velocidade tem-se $v_e(t) = \frac{1}{K} \frac{df(t)}{dt}$. Comparando esta expressão com a lei que governa a bobine e tendo em conta as analogias anteriores, pode-se dizer que:

- o modelo da mola K é igual ao modelo da bobine L desde que a indutância da bobine seja $L = \frac{1}{K}$.

Elementos elétricos	Resistência	Bobina	Condensador
			
	$v(t) = Ri(t)$	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
Elementos mecânicos	Massa	Mola	Atrito
			
	$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$f(t) = -Kx(t)$	$f(t) = -B \frac{dx(t)}{dt}$

Tab. 1 Elementos básicos de circuitos elétricos e de sistemas mecânicos, suas representações e leis que os governam.

Por último, repare-se no atrito de constante B e na resistência R , bem como nas respetivas leis que as governam, $f(t) = Bv_e(t)$ e $i(t) = \frac{1}{R}v(t)$; então, tendo em conta as

¹ $v_e(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

² A ausência do sinal negativo relativamente ao que se apresenta na tabela deve-se ao facto de agora não se estar a considerar a força de restituição da mola mas sim a força externa que se deve aplicar para que a mola sofra um alongamento x .

analogias habituais pode-se dizer que:

- o modelo do elemento de atrito B é igual ao modelo da resistência R desde que a resistência seja $R = \frac{1}{B}$.

Resumindo, na Tab. 2 registam-se as condições que se devem verificar entre cada par de elementos análogos para que o modelo dum circuito elétrico seja igual ao modelo do sistema mecânico.

Nesta altura, pode-se verificar que, tanto para a função de transferência (10), como para o modelo de estado (11) e (12), obtidos para o sistema mecânico Fig. 3, substituindo os seus parâmetros M , K e B de acordo com a Tab. 2, resultam na função de transferência (7) e no modelo de estado (8) e (9) do circuito elétrico Fig. 2. De forma inversa, os modelos (função de transferência e modelo de estado) a que se chegaram para o circuito elétrico resultam nos correspondentes modelos para o sistema mecânico desde que se façam as substituições dos parâmetros elétricos de acordo com a Tab. 2.

Massa – Condensador	$M = C$
Mola – Bobine	$K = \frac{1}{L}$
Atrito – Resistência	$B = \frac{1}{R}$

Tab. 2 Condições a verificar para que elementos análogos sejam governados pelo mesmo modelo.

5 | CONCLUSÕES

Chega-se então à conclusão de que se está perante sistemas físicos distintos que são representáveis pelo mesmo modelo matemático.

Esta conclusão é extrapolável a sistemas de outras naturezas que não elétrica ou mecânica, por exemplo, sistemas de naturezas tão dispares como hidráulicos ou térmicos são constituídos por elementos básicos que terão correspondência em termos de modelos para com, por exemplo, sistemas mecânicos ou elétricos.

Esta conclusão permite dizer que:

- **diferentes realidades físicas são representadas pela mesma realidade matemática.**

Esta conclusão uniformizadora tem implicações para toda a metodologia que integra a Teoria de Sistemas, seja no que se refere à representação de sistemas, análise ou síntese.

REFERÊNCIAS

Ribeiro, M. (2002). Análise de Sistemas Lineares. IST Press. ISBN: 972-8469-13-6.

D'Azzo, J. and Houpis, C. (1988). Linear Control System Analysis and Design Conventional and Modern. 3rd edition, McGraw-Hill International Editions. ISBN 0-07-016186-0.

Dorf, R. and Bishop, R. (1995). Modern Control Systems. 7th edition, Addison Wesley. ISBN 0-201-84559-8.

Dorf, R. (1993). Introduction to Electric Circuits. 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-60011-3.

A

Aulas on-line 1, 9

C

Capitalismo 1, 8, 9

D

Differential equations 41, 84

E

Educação 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 36, 38, 39, 40, 85

Educação estatística 24, 25, 31, 33, 38

Educação matemática 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 26, 85

Existence of solution 54

F

Fourier theory 54, 55, 83

G

Gref 24, 25, 26, 31, 33, 38, 39

H

História da matemática 12, 18, 21, 22

M

Matemática 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 32, 33, 36, 37, 42, 43, 52, 85

Mathematical models 41

N

Nonhomogeneous equation 54

P

Physical systems 41

Procedimentos metodológicos 9, 24, 39

R

Relações de poder 1, 5, 6, 8, 9

S

Semigroups theory 54

Sivashinski equation 54

