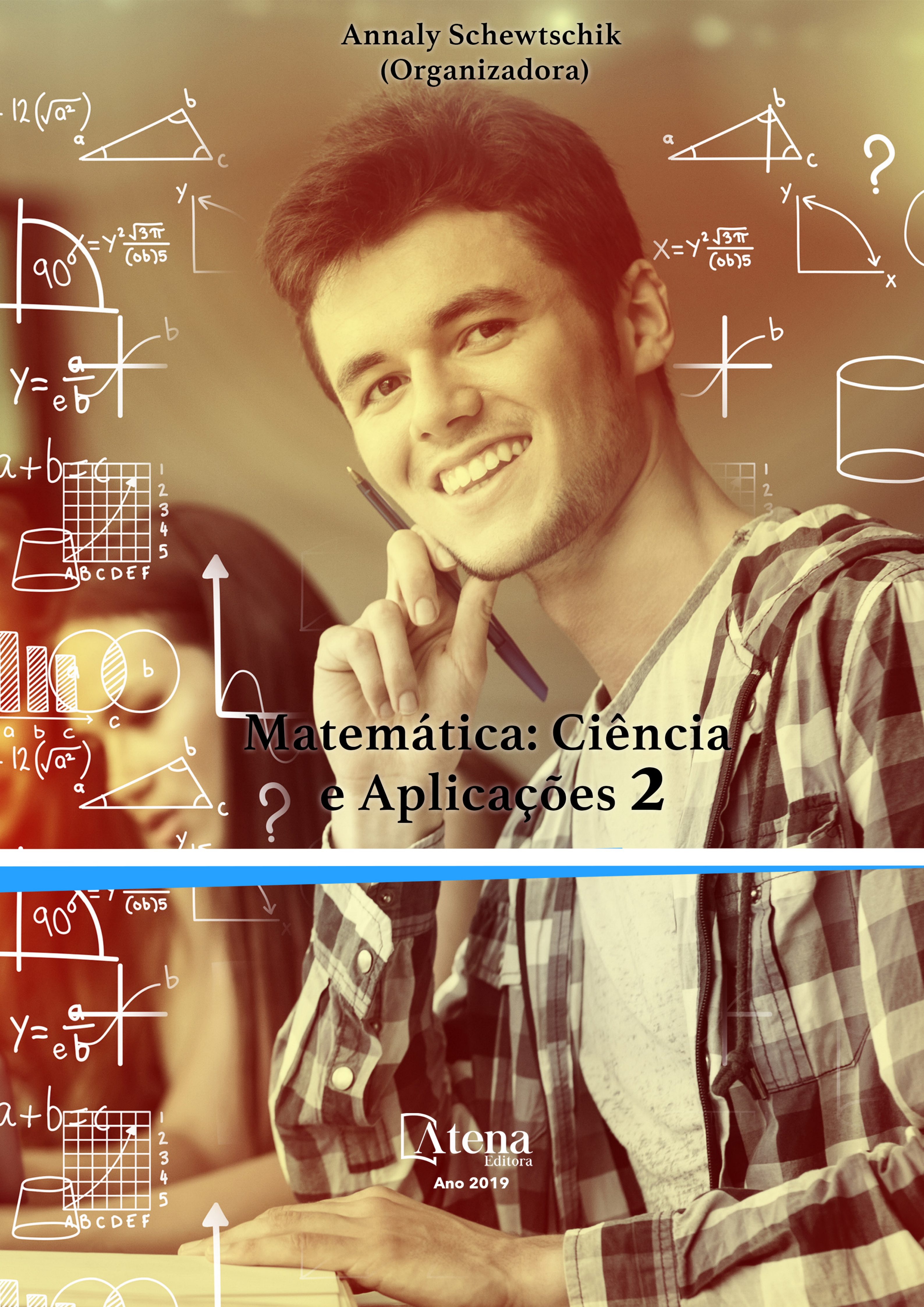
Annaly Schewtschik
(Organizadora)



Matemática: Ciência e Aplicações 2

Atena Editora
Ano 2019

Annaly Schewtschik
(Organizadora)

Matemática: Ciência e Aplicações 2

Atena Editora
2019

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação e Edição de Arte: Lorena Prestes e Geraldo Alves
Revisão: Os autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

M376 Matemática: ciência e aplicações 2 [recurso eletrônico] / Organizadora Annaly Schewtschik. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Matemática: Ciência e Aplicações; v. 2)

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7247-122-0
DOI 10.22533/at.ed.220191402

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Prática de ensino. I. Schewtschik, Annaly. II. Série.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

APRESENTAÇÃO

A obra “Matemática: ciências e aplicações” aborda uma série de livros de publicação da Atena Editora publicado em três volumes. O Volume II, em seus 22 capítulos, apresenta resultados de pesquisas que trazem estudos frente aos objetos matemáticos trabalhados tanto na Educação Básica, incluindo a EJA, como no Ensino Superior.

Os trabalhos evidenciam os estudos sobre conceitos e aplicações dos objetos da matemática no contexto da Educação Brasileira, contemplando aspectos da aprendizagem dos alunos, incluindo alunos com deficiências.

Revelam também os aspectos históricos que contribuíram para a formação dos conceitos dos objetos matemáticos e a análises destes objetos segundo seus idealizadores. Apresentam como os objetos matemáticos são contemplados em livros didáticos e fazem reflexões em torno da resolução de problemas que envolvem diferentes objetos matemáticos, incluindo conceito de letramento, enquanto prática social, nos diferentes campos da matemática.

A Matemática como Ciência é pensada nos trabalhos que enfocam os objetos matemáticos no contexto de aprendizagem, e como aplicações do conhecimento matemático na resolução de problemas tanto na Educação Básica como no Ensino Superior, incluindo as Engenharias.

A Educação Matemática é revelada nas análises referente as práticas de sala de aula – contanto com discussões inclusivas, tanto na Educação Básica como na Educação Superior.

Este Volume II é dedicado aos matemáticos, aos professores de matemática e pedagogos que ensinam matemática, a fim de compreenderem os aspectos do conhecimento matemático e do ensino e da aprendizagem dos objetos matemáticos âmbito da educação matemática.

Annaly Schewtschik

SUMÁRIO

CAPÍTULO 19

A (NÃO) EXISTÊNCIA DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO: UMA ANÁLISE SOBRE AS IMAGENS CONCEITUAIS DE ESTUDANTES EM UM CURSO DE CÁLCULO

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias
Universidade Federal do Pará (UFPA)

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará (UFPA)

RESUMO: Objetivamos com esse trabalho levantar discussões acerca de dificuldades que estudantes apresentam sobre o conceito de limite de uma função. Nossas considerações sobre tais dificuldades são baseadas em pesquisas anteriores realizadas nesse âmbito, em nossas experiências na docência da disciplina *Cálculo I* e, também, em nossas investigações acerca dessa temática, cujas análises foram realizadas com o intuito de inquirir sobre as *imagens conceituais* dos sujeitos pesquisados no que concerne ao conceito de limite. Nesse artigo, elucidamos as *imagens conceituais* de dois estudantes de um curso de Cálculo materializadas por meio das relações que eles efetivaram entre a (não) existência do limite, (des) continuidade e indeterminações. Para isso, destacamos e analisamos trechos de entrevistas realizadas com os sujeitos investigados. Dentre as dificuldades evidenciadas na investigação, ressaltamos aquelas voltadas para as evocações dos sujeitos que condicionaram a existência do limite à continuidade e à ausência de indeterminação.

PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades; Conceito de Limite; (Não) Existência do Limite; Indeterminações; (Des) continuidade de Funções.

ABSTRACT: Our aim with this paper was to raise discussions related to students' dificulties in learning the concept of limit of a function. Our considerations about such difficulties were based on previous researches, in our experiences as Calculus teachers, as well as our investigations about this theme, whose analysis were made with the aim of inquire about the investigated subjects' concept images concerning to the limit concept. In this paper, we show the concept image of two students, materialized through the relation they established between the (non)existance of the limit, (dis)continuity and indeterminations. For that, we present and analyze parts of the interviews that were made with these students. We observed difficulties related to evocations that conditioned the limit existence to the continuity of the function and to the absence of indeterminations.

KEYWORDS: Difficulties; Concept of limit; (non)existence of the limit; indeterminations; (dis)continuity of functions.

1 I INTRODUÇÃO

As dificuldades inerentes ao processo de ensino-aprendizagem dos conceitos de Cálculo têm sido objeto de investigação, sobretudo a partir da década de 80, de diversas pesquisas em Educação Matemática no segmento superior de ensino, tanto no Brasil quanto no exterior, isso porque tais dificuldades desencadeiam altos índices de reprovação nas disciplinas voltadas para essa área de conhecimento (OLIMPIO, 2007).

Frente a esse cenário e, também, mediante experiências próprias na docência em Cálculo, temos nos dedicado – ao longo dos últimos cinco anos – ao estudo mais aprofundado acerca das dificuldades de aprendizagem dos conceitos envolvidos no âmbito do Cálculo, em especial, do conceito de limite de uma função, por considerarmos que:

> Entender o conceito de limite é crucial para estudantes de Cálculo, haja vista que ele estabelece a base para o desenvolvimento dos conceitos de continuidade, derivada e integral. Apesar da importância do entendimento do conceito de limite ser reconhecida, a introdução do mesmo, devido à sua complexidade, causa sérias dificuldades (ÇETIN, 2009, p. 5, tradução nossa).

Dentre as principais dificuldades relacionadas ao entendimento do referido conceito, fazem-se presentes – de maneira expressiva – aquelas voltadas para a compreensão da correlação entre as noções intuitiva e formal de limite (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2015), fato que tem influenciado a percepção de muitos estudantes no que se refere às suas interpretações sobre a existência ou não existência do limite. Aliado a isso, ressaltamos a preocupação por demasiado com o ensino de técnicas para o cálculo de limites e de manipulações algébricas, em detrimento de discussões que fomentem reflexões acerca do conceito em si. Nessa perspectiva, estamos em acordo com Olimpio (2007) no sentido de que:

> (...) calcular o limite de uma função num ponto , nos casos mais “interessantes”, resumir-se-á em descobrir uma maneira de “substituir o em $f(x)$ ” sem que tal procedimento implique na emergência de irritantes quocientes com denominador nulo. Em outras palavras, a ideia de aplicar truques adequados de manipulação algébrica que permitirão “eliminar” tais inconveniências. *A questão da existência do limite, ou mesmo do que ele significa, ficará ainda nebulosa* (...) (OLIMPIO, 2007, p. 44, grifo nosso)

Em síntese, admitimos que o entendimento do conceito de limite seja de grande importância para a compreensão de outros conceitos – como o de derivada e integral – e assumimos que para compreender o conceito de limite de uma função, é preciso refletir sobre ele, buscar a abstração matemática mediante a mobilização de representações, generalizações e sintetizações provenientes de experiências anteriores de aprendizagem, materializadas pelas *imagens conceituais* dos estudantes e por isso, temos dedicado nossas investigações ao estudo dessas mobilizações com o intuito de identificá-las e, em um momento posterior, utilizá-las como suporte para a elaboração de instruções de ensino que auxiliem na formação de *imagens conceituais* coerentes com a *definição conceitual formal* de limite de uma função.

Nesse trabalho, optamos por levantar discussões acerca de algumas das *imagens conceituais evocadas* por estudantes que já estavam cursando a disciplina Cálculo I em duas universidades públicas no estado do Pará sobre como avaliam a (não) existência do limite em determinado ponto em situações em que haja indeterminações e/ou a função seja descontínua, de maneira a responder ao seguinte questionamento: *Quais elementos compõem a imagem conceitual dos sujeitos da pesquisa no que se refere à relação entre a (não) existência do limite, (des) continuidade de funções e indeterminações?*

2 | BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL[1]: ESTABELECENDO UM *LINK* COM NOSSO OBJETO DE ESTUDO

Uma *imagem conceitual* referente a um conceito é formada por associações não verbais efetivadas na mente de um indivíduo, como por exemplo, suas impressões e experiências de aprendizagem que são acumuladas ao longo do tempo e que, em geral, são traduzidas em formas verbais – ou seja, *definições conceituais pessoais*[2] – que são utilizadas para especificar esse conceito.

Nessa perspectiva, uma *imagem conceitual* pode ser constituída mediante qualquer representação de experiências vivenciadas em um ou mais contextos de aprendizagem. Uma representação visual de um sujeito, por exemplo, pode corresponder – de maneira parcial ou global – à sua interpretação de um dado conceito, levando-o a aquisição do mesmo por meio de seu entendimento acerca dessa interpretação.

Em outras palavras, assumimos que *adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual sobre ele* (VINNER, 1991), sendo que essa *imagem conceitual* não é – necessariamente – coerente com a *definição conceitual formal*[3] de determinado conhecimento matemático, dado que pode ter sido constituída por propriedades e/ou interpretações contraditórias ao longo das experiências de aprendizagem vivenciadas pelo indivíduo (MESSIAS; BRANDEMBERG, 2015).

Tendo como suporte teórico os estudos de Vinner (1991) sobre *imagem conceitual* e *definição conceitual*, temos realizado investigações referentes ao entendimento de estudantes acerca de conceitos no âmbito do Cálculo, especialmente, o de limite de

1 Sugerimos a leitura de Brandemberg (2010) e Messias (2013) – destacadas nas referências desse trabalho – para maiores esclarecimentos sobre os referidos termos e a teoria que os engloba.

2 Segundo Vinner (1991), é a forma em palavras que um sujeito utiliza para descrever um conceito; é uma fraseologia própria do indivíduo; não equivale, necessariamente, à definição formalmente concebida/reconhecida pela comunidade acadêmica.

3 Terminologia utilizada por Vinner (1991) para denominar uma definição formal.

uma função. Nesse sentido, temos identificado múltiplos elementos que compõem as *imagens conceituais* de estudantes relativas a esse conceito. Dentre os quais, destacamos nesse trabalho, uma discussão concernente às *imagens conceituais evocadas* por estudantes de um curso de Cálculo sobre a (não) existência do limite em determinado ponto, confrontando-as com apontamentos de outras pesquisas que, também, alinharam-se aos nossos objetivos e complementaram o referencial teórico de nosso estudo.

3 I REVISÃO DE LITERATURA

Dedicamos esse subtópico à descrição de algumas pesquisas que buscaram – assim como a nossa – entender mais profundamente percepções e/ou dificuldades de estudantes relacionadas ao conceito de limite de uma função.

Çetin (2009) realizou um estudo, no qual objetivou investigar como acontece o processo de apreensão do conceito de limite de uma função por parte de 25 estudantes de um curso de Cálculo em uma universidade na Turquia, de maneira que seus resultados pudessem subsidiar instruções de ensino que possam tornar a aprendizagem do referido conceito mais efetiva. Os sujeitos investigados na pesquisa vivenciaram experimentações no laboratório de informática, responderam questionários e participaram de entrevistas semi - estruturadas que foram analisadas conforme o quadro teórico da teoria APOS, permitindo que o autor identificasse como os indivíduos da pesquisa desenvolvem o entendimento do conceito de limite de uma função, tanto de uma perspectiva informal quanto por meio da interpretação da definição formal e que dificuldades apresentam na transição de uma abordagem informal para uma abordagem formal do referido conceito. Pois, segundo o autor:

> A noção de limite de uma função é fundamental para o entendimento em Cálculo e é a base que tudo o que segue nesse campo de conhecimento. Diferenciação e integração, o núcleo do estudo em Cálculo, são construídas a partir do conceito do limite (...) estudantes tem dificuldades em entender o conceito de limite (...) ***a maioria tem uma ideia intuitiva de limite e poucos conseguem alcançar um real entendimento da definição*** (ÇETIN, 2009, p.6, tradução nossa, grifo nosso)

Como resultados, Çetin (2009) identificou que a maioria dos sujeitos investigados enxerga o limite de f em a como $f(a)$, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Além disso, apesar de muitos entenderem intuitivamente o significado de limite, poucos conseguem alcançar o real entendimento da definição formal, haja vista que os quantificadores se apresentam como fatores de conflito em potencial e ocasionam múltiplas mobilizações nos estudantes no que se refere à esse conceito. Tais mobilizações influenciam, na maioria das vezes, na formação de *imagens conceituais* que não se fazem coerentes com a *definição conceitual formal* de limite de uma função.

Em seu estudo, Domingos (2009) investigou as dificuldades de estudantes de engenharia e matemática em relação ao entendimento do conceito de limite. Para isso, observou aulas de cálculo e, em seguida, estabeleceu – através de entrevistas semi-estruturadas – três *níveis* de imagens conceituais: incipiente, instrumental e relacional. Dentre as atividades, o autor solicitou que os sujeitos explicassem, primeiramente, o significado de $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Em seguida, solicitou que os mesmos sujeitos interpretassem esse limite por meio do gráfico da função. Por fim, pediu que os sujeitos verbalizassem a relação entre a definição formal de limite com o exemplo apresentado.

Domingos (id.) observou que alguns sujeitos conseguiram verbalizar poucas partes da definição, sem conseguir relacioná-la com o exemplo. Conforme classificação na pesquisa, esses sujeitos apresentaram *imagem conceitual incipiente*. Estão incluídos nessa primeira classificação aqueles que interpretaram a indeterminação emergida do cálculo de $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ como fator determinante para a não existência do limite quando $x \to 1$. Aqueles que conseguiram verbalizar algumas partes da definição e que, também, estabeleceram relação com a representação gráfica, apresentaram *imagem conceitual instrumental* e, por fim, os que conseguiram representar o conceito simbolicamente, bem como verbalizar seu significado, caracterizaram-se por uma *imagem conceitual relacional*. É importante ressaltar que, grande parte dos sujeitos investigados, tiveram dificuldades em relacionar suas *imagens conceituais* com a representação simbólica do conceito de limite.

Em Nair (2010), observamos *imagens conceituais* de estudantes de Cálculo relativas aos conceitos de função racional, assíntotas, limites e continuidade. A autora buscou identificar que conexões entre os referidos conceitos os sujeitos investigados apresentavam. Sua pesquisa constituiu-se de uma entrevista, na qual as imagens conceituais identificadas subsidiaram a elaboração de planos de aula que nortearam os episódios de ensino realizados ao longo de sua investigação.

No que se refere à relação entre os conceitos de *limite* e *continuidade*, Nair (2010), os sujeitos investigados acreditavam que o limite não existe em determinado ponto se a função não estiver definida naquele ponto. Além disso, *evocaram* que o $\lim_{x \to a} f(x)$ deve ser, obrigatoriamente, igual a $f(a)$, caso contrário, o limite não existirá. A autora observou também que, para os estudantes, o limite não existirá se o cálculo implicar na emergência de indeterminações[4] e salientou a dificuldade em calcular limites envolvendo o infinito.

Messias e Costa (2010) apresentam parte dos resultados de um estudo diagnóstico, no qual investigaram as principais dificuldades que 53 estudantes concluintes do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública no estado do Pará apresentaram ao resolverem questões envolvendo aspectos conceituais e operatórios de limite de uma função. Dentre os resultados obtidos, foi destacado que os sujeitos definiram limite como uma aproximação em torno de um ponto sem, no entanto, "alcançá-lo". As mobilizações dos sujeitos foram pautadas na

4 A autora refere-se somente às indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$. Demais casos não foram discutidos na pesquisa.

ideia de que $f(x) \neq L$. Nessa caso, observamos que os sujeitos desconsideraram os casos em que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, fator que garante a continuidade no ponto . Essa noção de constante aproximação em torno de um ponto sem "alcançá-lo" remete às interpretações dinâmicas do conceito de limite de uma função, conforme destacado em Messias (2013) e Messias e Brandemberg (2014). Aliado a isso, as autoras observaram em seus resultados que – para os sujeitos investigados – se uma função apresenta um *salto*, então a função será descontínua e – consequentemente – o limite não existirá.

Os resultados obtidos em Çetin (2009), Domingos (2009), Nair (2010), Messias e Costa (2010), dentre outros estudos que não foram apontados nesse artigo, mas que também se constituíram como suporte teórico para nossos estudos como um todo, fomentaram a elaboração de hipóteses voltadas para as possíveis *imagens conceituais* a serem *evocadas* pelos sujeitos investigados em nossa pesquisa no que concerne às relações entre a (não) existência do limite, (des) continuidade de funções e indeterminações. Tais hipóteses nos permitiram delinear a coleta de dados junto aos sujeitos e nortearam toda a análise de nossos resultados. Destacamos, no quadro 1, as considerações dos referenciais teóricos que nos levaram à elaboração dessas hipóteses.

<table>
<tr><th>Referencial Teórico</th><th>Resultados Obtidos</th><th>Hipóteses</th></tr>
<tr><td>Çetin (2009)</td><td>$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$</td><td rowspan="4">1. Os sujeitos investigados evocam – em suas imagens conceituais – que a existência do limite está condicionada à continuidade da função.

2. "A emergência de indeterminações implica na não existência do limite" é uma das mobilizações que compõem a imagem conceitual dos sujeitos investigados.</td></tr>
<tr><td>Domingos (2009)</td><td>Indeterminações implicam na não existência do limite</td></tr>
<tr><td>Nair (2010)</td><td>Limite não existe quando $x \to a$ se o ponto a não estiver definido no domínio da função;
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Descontinuidade implica na não existência do limite</td></tr>
<tr><td>Messias e Costa (2010)</td><td>Limite é uma aproximação em relação a um ponto sem, no entanto, alcançá-lo;
$f(x) \neq L$
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Saltos ➡ função descontínua ➡ limite não existe</td></tr>
</table>

Quadro 1 - Implicações do referencial teórico para a formulação de nossas questões de pesquisa

Uma vez estabelecidas as hipóteses da pesquisa, realizamos algumas reflexões sobre *como* poderíamos estruturar os momentos de investigação junto aos sujeitos investigados, com o intuito de identificar se os mesmos evocariam imagens conceituais semelhantes àquelas destacadas em nosso quadro de referências, sendo possível –

consequentemente – validar nossas hipóteses.

4 I REFLEXÕES SOBRE A OBTENÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

O levantamento bibliográfico, aliado à nossa experiência na docência, levou-nos a identificar que muitos estudantes apresentam dificuldades relacionadas ao entendimento do conceito de limite de uma função. E, conforme mencionado anteriormente, temos realizado estudos – ao longo dos últimos cinco anos – voltados para essa problemática, sendo que nesse artigo apresentaremos discussões acerca de algumas dificuldades de estudantes de um curso de Cálculo em verificar a existência de determinado limite.

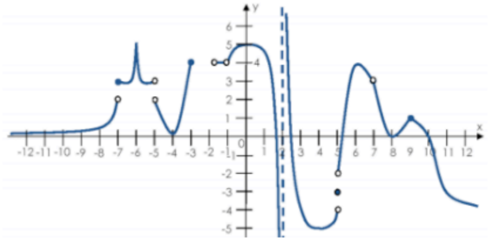
Reiteramos que este trabalho apresenta uma parte dos resultados obtidos em nossas investigações voltadas para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função. Portanto, destacaremos somente a parte de nossos instrumentos de coletas de dados que nos permitiu obter informações acerca das relações materializadas nas *imagens conceituais* dos sujeitos investigados sobre (des) continuidade, indeterminações e a (não)existência do limite.

Para fins de viabilizar a organização desse artigo, consideremos dois Temas de Discussão (TD): o TD1, intitulado *(Des)continuidade implica na não existência do limite?* E o TD2, intitulado *indeterminações implicam na não existência do limite?* As perguntas que constituem o título de ambos os TDs são extensões das hipóteses apresentadas no quadro 1. Para cada TD, elaboramos um roteiro que foi seguido durante as entrevistas. No entanto, não desconsideramos a possibilidade de realizar outros questionamentos aos sujeitos investigados – em caso de necessidade – para complementar nossas análises acerca das *imagens conceituais evocadas*.

Destacamos, a seguir, os roteiros elaborados e os objetivos traçados para cada um deles. Ressaltamos que, *a posteriori*, destacamos a análise das *imagens conceituais* de dois dos sujeitos investigados na pesquisa.

Roteiro de entrevista TD2 – (Des) ***continuidade implica na (não) existência do limite?***

1. Mostrar o gráfico da função abaixo:



- Observe esse gráfico e responda:
  - O $\lim_{x \to -7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 5$? Justifique.
  - O $\lim_{x \to 7} f(x)$ existe? Justifique.
  - E quando $x \to 9$? Justifique.
- Caso seja mobilizada a ideia de que o limite existe se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, perguntar:
  - Então, o limite da função em determinado ponto deve ser igual ao valor da função nesse ponto? (aguardar resposta). E se não for?
  - Devemos, portanto, considerar o domínio da função como um fator decisivo para evidenciarmos a (não) existência do limite?
  - Então quando o limite de uma função existe?
  - Escreva uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.
- Caso o sujeito responda corretamente o primeiro tópico, solicitar as seguintes situações:
  - Quando o limite existe?
  - Escreva uma definição para $\lim f(x) = L$ e, em seguida, explique-a.

Figura 1 – Roteiro referente ao TD1. Fonte: Messias (2013)

Com o TD1, objetivamos investigar e explorar junto aos sujeitos investigados da pesquisa suas *imagens conceituais* sobre a existência do limite em casos em que a função fosse descontínua. Nesse sentido, voltamo-nos para a hipótese de que os estudantes poderiam mobilizar a ideia de que o limite de uma função existe se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (conforme ressaltamos no quadro 1).

Roteiro de entrevista TD2 - *Indeterminações implicam na não existência do limite?*

1. Os limites das seguintes funções existem? Justifique.
   - $\lim_{x\to\infty} 5+\frac{1}{x}$
   - $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$
   - $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$
   - $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^3}$

2. O que faz você concluir que o limite de determinada função não existe?
   - Em caso de respostas que evoquem a ideia de que indeterminações implicam na não existência do limite, perguntar ao sujeito:
     - A presença de *indeterminações* representa sempre um ponto de descontinuidade na função?
     - Em caso de resposta afirmativa, perguntar:
       - Então, eu posso dizer que o ponto de descontinuidade influencia na questão da existência do limite? Explique.
     - Em caso de resposta negativa, pedir que explique o que as *indeterminações* representam; solicitar exemplos.

3. Você poderia escrever uma definição para limite de função e, em seguida, explicá-la?

Figura 2 – Roteiro referente ao TD2. Fonte: Messias (2013)

O TD2 é composto por questionamentos que levantam a discussão acerca da influência de indeterminações na (não) existência do limite, além de verificar junto aos indivíduos se eles mobilizavam a ideia de que uma indeterminação representa sempre um ponto de descontinuidade.

5 I ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados apontados nesse artigo contemplam a análise das entrevistas realizadas com dois estudantes de um curso de Cálculo. Destacamos, portanto, a descrição de alguns trechos concernentes às discussões estabelecidas, analisando-os conforme o referencial teórico e as hipóteses levantadas. Mais uma vez, ressaltamos que apesar de termos elaborado um roteiro para cada TD, não descartamos a realização de outros questionamentos, levando em conta, evidentemente, as particularidades das *imagens* conceituais dos sujeitos investigados.

No caso do TD1, identificamos que estudante E1 mobilizou em sua *imagem conceitual* a ideia de que a existência do limite em determinado ponto não está obrigatoriamente atrelada à continuidade nesse ponto (ver figura 3).

P:[...] (mostra o gráfico do roteiro), e aí eu queria saber se o $\lim_{x \to -7} f(x)$ *existe.*
(depois de algum tempo)
E1: Não.
P: Por quê?
E1: Porque tem esse salto... por isso não existe.
P: E quando $x \to 5$*?*
E1: Também não existe.
P: E quando $x \to 7$*?*
E1: O limite é $f(7)$*.*
P: E quando $x \to 9$*?*
E1: Quando $x \to 9$*, o limite é* $f(9)$*.*

Figura 3 – Trecho 1: Entrevista estudante E1. Fonte: Messias (2013)

Da figura 3, observamos que o sujeito relaciona a não existência do limite quando $x \to -7$ e $x \to 5$ e à existência do *salto* no gráfico. Aparentemente, ele não relacionou o fato de $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$ à não existência do limite (MESSIAS;COSTA, 2010). Nesse caso, a parte da *imagem conceitual* que foi ativada para responder essa pergunta foi suficiente para que ele identificasse que solucionasse a questão (VINNER, 1991). No entanto, essa interpretação de que o "contínuo" está relacionado ao sentido coloquial de não ter "saltos", pode se configurar como um *fator de conflito em potencial*, além de não ser suficiente para verificar a existência do limite em outros casos.

Ressaltamos, também, que o estudante – ao avaliar os limites quando $x \to 7$ e $x \to 9$ – não se atentou ao fato de que $f(7)$ e $f(9)$ e não existem e afirmou que os limites assumiriam, respectivamente, tais valores. Mais uma vez, o sujeito não mencionou os limites laterais, porém, a parte da *imagem conceitual* que foi *evocada* foi suficiente para solucionar a questão.

Sobre as considerações do estudante sobre quando o limite existe, consideremos a figura 4:

P: Quando o limite não existe?
E1: Seria (pausa) se tu determinas um intervalo próximo de a e um intervalo próximo de $f(a)$*. (depois de algum tempo). Tá, o limite não existe se eu tomar um intervalo próximo de a, contendo a, eu pegar algum valor desse intervalo e a imagem não pertencer ao intervalo próximo de* $f(a)$*.*
P: Então o caso do intervalo em torno de a, a tem que estar definido nesse intervalo?
E1: tem que pertencer ao intervalo.

Figura 4 – Trecho 2: Entrevista sujeito E1 . Fonte: Messias (2013)

Observamos que E1 – em contraposição aos resultados do referencial teórico – considerou, ainda que de maneira intuitiva, os intervalos $(x - \delta, x + \delta)$ e $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, utilizando-os para conjecturar acerca da existência do limite. No entanto, acreditamos que o Domínio da função pode ser um fator de conflito para o sujeito, já que afirmou que o ponto *a* "tem que pertencer ao intervalo". Esse conflito pode gerar *evocações* equivocadas sobre a relação *limite x continuidade* (NAIR, 2010).

No que concerne aos resultados obtidos no TD2, evidenciamos que o estudante E2 apresentou dificuldades em relação ao limite envolvendo infinito, conforme apresentamos no trecho a seguir:

P: Então, eu gostaria que você observasse essas funções e me dissesse se o limite existe em cada uma delas. No caso de não existirem, eu gostaria que você me explicasse o por quê.
(depois de um tempo)
E2: Bem, no caso dessas que envolvem o infinito eu tenho um pouco de dificuldade (...). No caso, o terceiro vai dar $\frac{\infty}{\infty}$.
(...)
P: Então o limite existe?
E2: $\frac{\infty}{\infty}$ (pensa um pouco). Eu acho que não existiria, porque isso é indeterminação e se tá tendendo ao infinito, é porque a função não vai chegar até lá no infinito, então se ela não chegar é porque o limite não vai existir.

Figura 5 – Trecho 3: Entrevista sujeito E2 .

Fonte: Messias (2013)

Evidenciamos que E2 assumiu ter a dificuldade em se tratando do cálculo de limites envolvendo o infinito, fato que aproxima nossos resultados aos obtidos por Nair (2010). Além disso, o sujeito *evocou* durante a entrevista as seguintes *imagens conceituais*:

- No que se refere ao cálculo de limites, resultados do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, implicam na não existência do limite (NAIR, 2010);
- O limite - quando tende ao infinito - não existe devido o mesmo nunca conseguir chegar a lugar algum;

Ressaltamos que as *imagens conceituais evocadas* por E2 estão intimamente relacionadas com sua concepção de infinito, que neste caso, configurou-se como um *fator em conflito potencial* (VINNER, 1991).

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme mencionamos anteriormente, todas as considerações apontadas nesse artigo são fruto de um estudo maior que vem sendo realizado ao longo dos últimos anos sobre ensino e aprendizagem conceitual em Cálculo. Os resultados apresentados nos subsidiaram verificar as *imagens conceituais evocadas* por dois estudantes de um curso de Cálculo sobre a (não) existência do limite e as conexões (caso eles apresentassem) com descontinuidade e indeterminações. Nesse sentido, observamos que as *imagens conceituais* dos sujeitos pautaram-se, sobretudo, nas importantes *evocações* listadas a seguir:

[E1] Saltos implicam na não existência do limite em determinado ponto.

[E2] Quando o limite tende ao infinito, ele não existe.

[E3] Indeterminação implica na não existência do limite.

Evidenciamos – mediante as *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes – os elementos que compõem essas mobilizações, permitindo-nos conjecturar acerca da apreensão do conceito de limite e dos conflitos inerentes a esse processo.

Reiteramos que os resultados que vêm sendo obtidos em nossas investigações têm sido de grande relevância no sentido de nos permitir verificar alguns dos conflitos que permeiam as *imagens conceituais* dos estudantes em relação aos conceitos envolvidos nos cursos de Cálculo. Nesse sentido, nossas discussões estão subsidiando, atualmente, uma pesquisa de doutorado, na qual intencionamos desenvolver instruções de ensino que possam viabilizar a aprendizagem desses conceitos, permitindo uma aprendizagem efetiva dos mesmos, na tentativa de permitir aos estudantes a formação de *imagens conceituais* consistentes com as *definições conceituais formais*.

REFERÊNCIAS

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física (ED), 2010.

ÇETIN, I. **Students' understanding of limit concept:** an APOS perspective. 247f. Tese (Doutorado em Filosofia em Educação Computacional e Tecnologia Instrumental) - Middle East Technical University, Turquia, 2009.

DOMINGOS, A. Learning advanced mathematical concepts: the concept of limit. *In: proceedings of CERME 6,* 2009, p. 2266-2275.

MESSIAS, M. A. V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função**. 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MESSIAS, M.A.V.F; BRANDEMBERG, J.C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. **BOLEMA,** Rio Claro (SP), v. 29, p. 1224-1241, dezembro, 2015.

MESSIAS, M.A.V.F; COSTA, A.C. Limite de Função: Conceito Imagem x Conceito Definição. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Bahia. Educação Matemática, cultura e diversidade, 2010.

NAIR, G. S. **College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions**. 2010. 276f. Tese (Doutorado em Filosofia) – College of Education and Human Ecology, Ohio State University, 2010.

OLIMPIO, A.J. Primeiro ano num curso de matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de cálculo. **BOLEMA.** Rio Claro (SP), Ano 20, n.28, pp. 39 a 67, agosto, 2007.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 65 – 81.1991.

SOBRE A ORGANIZADORA

Annaly Schewtschik - Mestre em Educação, Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e em Neuropsicopedagogia, Licenciada em Matemática e em Pedagogia, Professora do Ensino Fundamental e do Ensino Superior em Curso de Pedagogia e Pós-Graduação em Educação e em Educação Matemática. Atuante na área da Educação há 24 anos. Atualmente trabalha com Consultoria e Assessoria em Educação, Avaliação e Formação de Professores por sua empresa Ensinas e é Assessora Pedagógica da Rede Municipal de Educação de Ponta Grossa – Pr.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-122-0
9 788572 471220