Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações 2

Atena
Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações 2

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Investigação científica em matemática e suas aplicações 2

Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Mariane Aparecida Freitas
Indexação:	Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão:	Os autores
Organizador:	Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação científica em matemática e suas aplicações 2 / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0394-4
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.944223008

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações 2***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 8

OS DESDOBRAMENTOS TEÓRICOS DA PROPORCIONALIDADE NA ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

Data de aceite: 01/08/2022

Data de submissão: 03/07/2022

Mayra Taís Albuquerque Santos
Instituto Federal de Alagoas-IFAL
Penedo-Alagoas

RESUMO: O trabalho teve como objetivo analisar o caminho histórico da construção da teoria Proporcionalidade, através das suas construções geométricas ao longo da História da Matemática na sociedade, justificando assim, as transformações e avanços ao longo do tempo. Para tanto, partiu-se do conhecimentos geométricos dos *Elementos de Euclides* até o século XVI, quando os números passaram a ser considerados entes abstratos. Essas construção perpassa o Teorema de Tales, o Princípio de Cavallieri e as duas partes do Teorema de Pappus, de forma que seja possível verificar as limitações dessa teoria, mas que servem a confirmação da existência da Constante de Proporcionalidade de Poliedros. Para sanar essas limitações utiliza-se uma série de definições e teormas, entre os quais o mais importante é o Teorema de Riemann (com demonstração). Todos as definições e teoremas citados servem a construção das três últimas definições que apresentam sob quais condições pode-se determinar a proporcionalidade entre dois sólidos de revolução, confirmando a existância da mesma para um sólido qualquer.

PALAVRAS-CHAVE: Constante Proporcionalidade; Geometria, Construção Histórica, Teorema de Riemann.

THE THEORETICAL DEVELOPMENT OF PROPORTIONALITY IN THE SCHOOL OF BASIC EDUCATION

ABSTRACT: The objective of this work was to analyse the historical course of the construction of the theory of Proportionality, through in geometric construction throughout the History of Mathematics in society, thus justifying the transformations and advances over time. To do so, it started from the geometric knowledge of the Euclid Elements until the sixteenth century, when the numbers came to be considered abstract entities. These constructions permeate the Tales Theorem, the Cavallieri Principle and the two parts of Pappus' Theorem, so that it is possible to verify the limitations oh this theory, but which serve to confirm the existence of the Polyhedron Proportionality Constant. To overcome these limitations, several definitions and theorems are used, among which the most important is Riemann's Theorem (with proof). All the definitions and theorems mentioned serve to construct the last three definitions that present in which conditions the proportionality between two solids of revolution can be determined, confirming the existence of the same for any solid.

KEYWORDS: Constant Proportionality; Geometry; Historical Construction; Riemann's Theorem.

1 | INTRODUÇÃO

A educação básica tem em seu currículo uma série de conteúdos tidos como de fundamental importância para o tipo de sujeito que se deseja formar no Brasil, de modo que esse possa obter na escola o que é denominada de formação integral do sujeito, segundo a LDB[1] (2017,p.8), "A educação... tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho."

Segundo o princípio formativo, a educação tem papel fundamental no desenvolvimento pleno do educando, assim como no seu preparo para o exercício da cidadania e preparo para o trabalho, entretanto, se faz necessário compreender o papel do currículo de cada disciplina na formação dessas aptidões do discente. Nesse contexto, cada conteúdo matemático no currículo da Educação Básica tem sua importância social, e como patrimônio historicamente construído do homem deve ser de acesso de todos garantindo ao cidadão a universalização do conhecimento científico comum e universal.

Dessa forma, podemos afirmar que os conteúdos de matemática da educação básica são divididos em blocos de conteúdos dos quais se tem o bloco de "Grandezas e Medidas" que o PNC de matemática (1998) determina a forte relevância social desse conteúdo devido a seu carater prático, com diversas conexões com outras áreas do conhecimento.

Notavelmente, esse bloco é rico em conceitos que proporcionam melhores conceitos relativos à geometria de forma geral, tendo em si ferramentas muito importantes para melhoria da compreensão desses, além de enriquecer o trabalho com números e operações com sua infinidade de perspectivas e aplicações utilizando o conceito de *Proporcionalidade*, que é um campo rico de trabalho, não somente do ponto de vista teórico da matemática e de suas aplicações, como também do ponto de vista histórico e metodológico.

Esse conteúdo, entretanto, é visto de forma simplista, fazendo com que inúmeros aspectos importantes do mesmo se percam, e dificultando que esse seja associado a todas as suas demais manifestações na educação básica como, por exemplo, Razão e Proporção, Semelhança de Triângulos, ou mesmo a aplicações em disciplinas distintas como Física e Química.

2 | CONTEXTO HISTÓRICO

A noção de Proporcionalidade está muito presente na Matemática e em vários momentos de sua história, alguns mais significativos que outros,entretanto, na antiguidade, a área da Matemática que mais se destacou inicialmente, para além de problemas cotidianos, foi à Geometria. O que se justifica no fato da Matemática ter a finalidade inicial, de resolver problemas práticos de cada sociedade.

A história conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto (séc. XII-XI a. C.), que teria sido influenciado pelos egípcios e mesopotâmicos. Tales tem seus contados, através de gerações, seus feitos; por exemplo, ter medido a altura de uma pirâmide do Egito relacionando suas dimensões a dimensões de sua sombra.

1 Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

Os gregos praticavam uma Geometria muito semelhante à noção de matemática desenvolvida no Antigo Egito e na Mesopotâmia, onde as medidas eram marcadas por cálculos e algoritmos, e transformadas em números e tinham significado na vida prática. Partindo desse ponto para desenvolver a Matemática fundada em argumentos lógicos consistentes e demonstrações praticadas pelos gregos, não havendo precisão histórica de como houve essa transição. Sob essa perspectiva histórica vale a pena primeiramente definir comensurabilidade.

Define-se comensuráveis, dois segmentos de reta quaisquer AB e CD, tais que existe algum segmento u, o qual chamamos unidade, que cabe exatamente *m vezes* em *AB* e *n vezes* em *CD*. De modo análogo, diz-se que dois segmentos são incomensuráveis se, não existe unidade de medida comum, isto é, que os segmentos respectivos não sejam múltiplos dela. A partir desse problema, podemos discutir problemas como razão entre segmentos nos números naturais.

Comumente, os livros didáticos/materiais de pesquisa encontrados na internet ou impressos, apresentam o conteúdo de Frações, forma concreta, através do uso de objetos, pois só no final do século XVI os números foram aceitos como entes abstratos e não concretos.

Grande parte dessas construções gemétricas da matemática foram fundamentadas no livro *Os Elementos,* de Euclides, é um dos mais importantes trabalhos da Matemática, pois dá início a uma Matemática estruturada em fundamentos sob os quais está estruturada a Matemática moderna, que são definições, postulados e axiomas. Entretanto, existem várias teorias a respeito desses trabalhos, a principal é que Euclides de fato existiu, e que escreveu os *Elementos*. Outra diz que na verdade Euclides foi um editor, que reuniu os trabalhos em matemática; ou ainda que Euclides era o nome de um pseudônimo de um grupo de matemáticos. Entretanto, existem relatos em alguns documentos de lugares por onde ele teria passado, reforçando a primeira teoria.

3 I SÓLIDOS E SUAS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

A Comensurabilidade de segmentos define a Proporcionalidade nas relações entre segmentos, mas para estender essa compreensão para qualquer número real é necessário se fazer uso do *Teorema de Tales,* que tem entre suas aplicações mais importantes as relações entre segmentos em polígonos (Proporcionalidade e Semelhanças).

Teorema 1 (Teorema de Tales): Dado um feixe de retas paralelas e duas transversais. Temos que os segmentos que resultam da interseção entre duas paralelas são proporcionais.

Esse teorema em nível geométrico pode ser aplicados para números não negativos, mas para todos os reais em nível algébrico. Dessa forma, de posse da concepção linear e plana da Proporcionalidade, nada mais natural que prosseguir à proporcionalidade de forma espacial, isto é, analisar as relações de Proporcionalidade em Sólidos Geométricos.

Para tanto, se faz necessário fazer uso da Geometria Euclidiana, partindo do Princípio de Cavalieri e do Teorema de Pappus, contruindo um conjunto teórico de fundamental importância para o estudo das relações entre figuras geométricas, como poderá vê.

O Princípio de Cavalieri associa dois sólidos diferentes de forma que seja possível verificar quando os dois possuem os mesmo volumes conforme o enunciado abaixo.

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos S_1 e S_2 com alturas iguais, apoiados sob um plano α. Se todo plano β, paralelo a , determina áreas correspondentes entre esses sólidos, então os S_1 e S_2 possuem o mesmo volume.

Esse enunciado permite a associação entre secções planas de polígonos que possuem áreas iguais mesmos proporcionais. Após esse temos o Teorema de Pappus, que tem como objetivo o cálculo de áreas e volumes de Sólidos de Revolução de forma puramente geométrica e associada a localização do centro de gravidade da curva, da forma como os matemáticos clássicos costumavam resolver os problemas.

Teorema de Pappus (Primeira Parte): Sejam L uma linha plana e E um eixo de simetria num mesmo plano. A área da superfície gerada pela rotação de L em torno de E é dada pelo produto do comprimento da linha pelo produto do comprimento da circunferência descrita por seu centro de gravidade x, ou seja:

$$S = 2\pi xL$$

Teorema de Pappus (Segunda Parte): Considere uma figura plana no mesmo plano que um eixo E, então o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da figura plana em torno do eixo E é dado pelo produto da área da figura plana S e do comprimento da circunferência que descrita pelo seu baricentro x, isto é:

$$V = 2\pi xS$$

O *Teorema de Pappus* é muito útil no tratamento de sólidos de revolução, entretanto a visão puramente geométrica deve dá lugar a um tratamento mais analítico, pois esses conceitos tratam de forma geral de áreas e volumes Sólidos de Revolução. Entretanto, no que se refere ao tratamento de curvas, o tratamento moderno o associa a sistemas de coordenadas, no qual o mais disseminado é de eixos perpendiculares. Logo o estudo segundo esses eixos se concentra somente nas curvas, dispensando o uso do conceito de Centro de Gravidade, que numa curva qualquer pode gerar certa dificuldade.

Observando essa dificuldade conceitual, os Sólidos Revoluçã*o* podem ter suas áreas e volumes estudados a partir do conceito de Integral de Riemann. Esse conceito tem tratamento analítico, e por isso, trata cada curva como resultante de uma expressão analítica, na qual é possível em cada ponto para qual essa está definida determinar sua localização no plano. Não precisando que sejam fornecidas essas informações uma a uma como necessário no Teorema de Pappus.

Outro fato importante a respeito dos métodos matemáticos antigos era, o uso do método de Exaustão no cálculo de áreas e volumes de figuras irregulares, que apesar de até fornecer bons números para as grandezas consideradas, ainda eram imprecisas, gerando um erro, mesmo que esse fosse mínimo. Esse problema teve como primeira tentativa de aproximação ideal, as Integrais de Riemann, que fez o estudo de áreas e volumes de forma analítica.

No entanto, assim como o Teorema de Pappus as suas somas nas quais se baseavam as Integrais de Riemann tornavam o processo cansativo, pois se fazia a aproximação das áreas mais complexas por áreas áreas mais simples. No caso de Riemann, as áreas de retângulos e aproximariam por cima e por baixo da curva, oferecendo uma precisão melhor, mas foi o professor de Newton, Isaac de Barrow, que verificou a existência de uma relação entre uma derivada e sua função. A partir desse momento, as somas de Riemann puderam ser dispensadas, sendo posta em seu lugar o ilustre Teorema Fundamental do Cálculo.

4 | FIGURAS ESPACIAIS E AS PROPORÇÕES

Os sólidos geométricos podem ser divididos em Poliedros , Sólidos de Revolução e sólidos que não se enquadram em apenas uma dessas definições. Para cada um desse grupo é possível se adotar estratégias diferentes para verificar sua semelhança. No caso dos Poliedros, parte-se dos conceitos de Proporcionalidade linear aplicado a dimensões de interesse.

Coforme apresentado nos livros didáticos da Educação Básica, para Poliedros, basta fazer a associação dimenssional de comprimento, largura e altura para os mais simples de se demonstrar e para os mais complexos subdivi-los para fazer buscar a constante de proporcionalidade dois a dois, de forma que, possamos comprovar a sua existência em uma, duas e três dimensões, isto é, k, k^2 e k^3 para todo k real.

Entretanto, antes de iniciar o estudo das “Figuras Espaciais e suas Proporções” através da proposta de uso do Teorema Fundamental do Cálculo, e construirmos o conceito de Proporcionalidade em Sólidos de Revolução é necessário se apropriar de alguns conceitos fundamentais dos cálculos, em particular o conceito de, que no $\mathbb{R}^3$ podem definir conceitos como cálculos áreas e volumes dos sólidos de revolução apresentados abaixo.

Definição 1: Dado um intervalo [α,b]. Uma partição desse intervalo é a escolha de um subconjunto finito $P=\{\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k=b\}$.

Se fixarmos uma partição do intervalo considerado, tal que a função $f:[\alpha,b]\rightarrow\mathbb{R}$ é limitada pelo intervalo [α,b], denota-se:

$$m_i = \inf\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

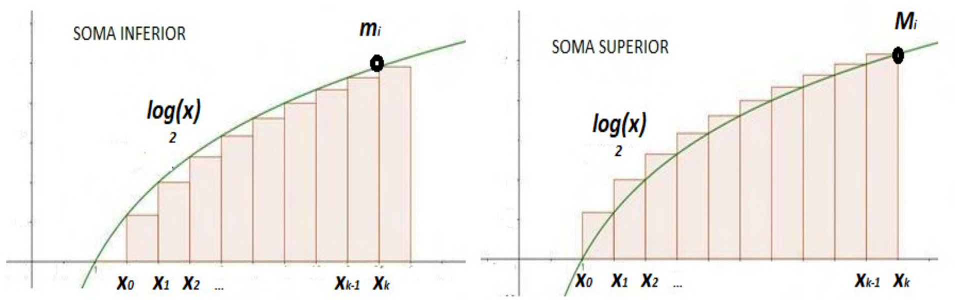
e

$$M_i = \sup\{f(x); x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

Considere m_i e M_i bem definidos em f, definiremos a soma inferior e a soma superior de f em relação à P por:

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ e } S(f;\ P) = \sum_{i=1}^{k} M_i\ (x_i - x_{i-1})$$ [2]

Somas de Riemann



Fonte: autoria Própria

Ao se fixar a partição P, é verificado que s(f;P)≤S(f;P), pois $m_i \leq M_i$. Veremos a seguir que uma função limitada f é limitada se inf(S(f;P))=sup(s(f;)), então essa é diferenciável.

Lema: Seja f:[α,b]→ℝ uma função limitada. Dadas partições P e Q de [α,b], tais que P⊂Q, temos:

$$s(f; P) \leq s(f; Q) \text{ e } S(f;\ Q) \leq S(f;\ P).$$

Portanto, quando f:[α,b]→ℝ é uma função limitada, dadas duas partições da mesma P e Q, com P⊂Q, então S(f,P)≥S(f,Q) e s(f,P≤s(f,Q).

Continuamos mostrando o resultado a seguir, que é central no estudo das Integrais de Riemann.

Definição 2: Uma função limitada f:[α,b]→ℝ é integrável se:

$$\sup_P s(f; P) = \inf_P S(f; P).$$

De posse da Definição 2, o próximo passo é enunciar o critério de integrabilidade de Cauchy.

Teorema de Cauchy: Uma função limitada f:[α,b]→ℝ é integrável se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas: para todo ε>0 dado, existe uma partição P_ε de [α,b] tal que

2 As somas inferior e superior são definidas por áreas, respectivamente, menores e maiores que a área abaixo da curva de f no intervalo [a,b], considerados retângulos imitados pela partição P conforme mostraa Figura 32.

$$S(f;P_\varepsilon) - s(f;P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Além de saber em que condições uma função limitada é integrável, também é essencial a partir do teorema seguinte garantir a integrabilidade de funções monotonas.

Teorema 2: Toda função monótona f:[α,b]→$\mathbb{R}$ é integrável.

O teorema a seguir define uma propriedade tão importante quanto o anterior, a integrabilidade das funções contínuas.

Teorema 3: Toda função contínua f:[α,b]→$\mathbb{R}$ é integrável.

A seguir temos o teorema mais importante nesses estudo, o Teorema de Riemann, e para isso iremos definir algumas notações:

(1) Norma de uma partição P:

$$|P| = max\{|x_j - x_{j-1}|; 1 \leq j \leq k\}$$

(2) Pontilhamento de P é definido como todo ponto $\xi=(\xi_j)_{1\leq j\leq k}$, tal que $\xi_j \epsilon [x_{j-1}, x_j]$.

(3) Soma de Riemann de f com relação à partição P e ao pontilhamento:

$$\sum(f;P;\xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

Fixadas as notações, dizemos que I é o limite das somas de Riemann ∑(f;P;ξ), quando |P|→0 para todo pontilhamento ξ de P.

Definida as notações podemos enunciar o Teorema central dessa argumentação.

Teorema de Riemann: Uma função limitada f:[α,b]→$\mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, existe o limite $\lim_{|P|\to 0} \sum(f;\ P;\ \xi)$ de suas somas de Riemann, para todo pontilhamento ξ de P. Nesse caso, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum(f;P;\xi).$$

Demonstração:

Seja f:[α,b]→$\mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa.

Denota-se R a região sob o gráfico de f, tal que essa é definida por:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \ e \ 0 \leq y \leq f\}.$$

Tomemos uma partição P_k equiespaçada de [α,b], ou seja, x_j, $x_{j-1} = \frac{b-a}{k}$ para todo 1≤j≤k, existem ξ_{jk}, $\xi'_{jk} \epsilon [x_{j-1}, x_j]$ tal que:

$$f(\xi_{kj}) = \min_{[x_{j-1},x_j]} f \text{ e } f(\xi'_{jk}) = \max_{[x_{j-1},x_j]} f$$

Dadas as aproximações por falta e por excesso:

$$\underline{A}(f;k) = \sum_{j=1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1}) = \left(\frac{b-a}{k}\right)\sum_{j=1}^{k} m_j = \sum(f, P_k, \xi_k)$$

e

$$\overline{A}(f;k) = \sum_{j=1}^{k} M_j(x_j, x_{j-1}) = \left(\frac{b-a}{k}\right) \sum_{j=1}^{k} M_j = \sum(f, P_k, \xi'_k).$$

Como $|P| = \frac{1}{k}$, segue que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \sum(f, P_k, \xi_k) = \lim_{x\to+\infty} \underline{A}\,(f;k)$$

e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \sum(f, P_k, \xi_k') = \lim_{x\to+\infty} \overline{A}\,(f;k).$$

Notemos que, $\lim_{x\to+\infty} \underline{A}(f;k) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \underline{A}(f;k)$. Fazendo uma mudança de base em $|P| = \frac{1}{k}$, temos que quando k→+∞, |P|→0. Logo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum(f, P_k\, \xi_k)$.

Em relação à definição a seguir, note que o Teorema de Riemann, trabalha-se com uma função integrável e não negativa f:[α,b]→ℝ. Como $\lim_{k\to+\infty} \underline{A}(f;k) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \overline{A}(f;k)$, podemos observar que as aproximações superiores e inferiores convergem para um mesmo valor, o qual a única possibilidade A(R).

Portanto, A(R)=$\int_a^b f(x)dx.$

Demonstrado o Teorema de Riemann, iremos apresentar mais algumas Definições e Proposições necessárias às conclusões que deseja-se chegar.

Definição 3: Se f:[α,b]→ℝ é uma função integrável e não negativa, definimos a área da região R sob o gráfico de f por

$$A(\mathcal{R}) = \int_a^b f(x)dx.$$

Veremos a seguir proposições muito importantes ao se trabalhar com integrais.

Proposição 1: Se f,g:[α,b]→ℝ são funções integráveis e tais que f≤g, então $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

Proposição 2: Se f,g:[α,b]→ℝ são integráveis e c∊ℝ, então:

(a) A integral de uma função multiplicada por uma constante é igual ao produto da constante pela integral da função.

cf:α,b]→ℝ é integrável, com $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

(b) A integral da soma de duas funções é igual à soma das integrais das mesmas.

f+g:[α,b]→ℝ é integrável, com $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

De posse da definição de Semelhança[3] etângulos e da teoria que define a Integral de Riemann iremos determinar quando duas curvas limitadas são semelhantes, a fim de construir uma percepção analítica do tema, com o objetivo de determinar em que condições dois sólidos de revolução também são semelhantes, sem que para isso seja necessário se

3 Conceito sob o qual dois polígonos são semelhantes se possui seus ângulos internos e seus respectivos lados opostos dois a dois tem como razão a mesma constante de proporcionalidade.

fazer uso do cálculo de múltiplas variáveis.

Inicialmente definiremos o comprimento de uma curva limitada e contínua.

Definição 4: Dada f:[α,b]→ℝ, contínua em [α,b] e diferenciável em (α,b), define-se comprimento de f, para todo xϵ[α,b], por

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Sabendo que o comprimento de uma curva f, quando essa é limitada e contínua, definiremos a seguir condições que se fazem necessárias para a semelhança das mesmas. Leigamente, recordemos que, quando uma curva limitada, pode ser vista como redução ou aumento de outra, sem que para isso, se percam suas propriedades no processo.

Definição 5: Considere as funções f:[α,b]→ℝ e g:[c,d]→ℝ contínuas, as partições $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em f e $Q = \{c = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_k = d\}$ em g, tal que $\frac{(x_i - x_{i-1})}{(x'_i - x'_{i-1})} = k$ (constante) para todo 1≤i≤k. Se $\frac{m_i}{m\prime_i} = \frac{M_i}{M'_i} = k$, então os comprimentos de f e g tem comprimentos respectivos, L_f e L_g, tal que $\frac{L_f}{L_g} = k$.

A definição acima nos permite saber em que condições existe uma constante de proporcionalidade entre duas curvas limitadas a um intervalo.

O mesmo critério poderá ser utilizado para relacionar a razão entre comprimento de curvas pode ser utilizada para o cálculo abaixo da curva limitada.

Definição 6: Considere as funções f:[α,b]→ℝ e g:[c,d]→ℝ contínuas, as partições $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em f e $Q = \{c = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_k = d\}$ em g, tal que $\frac{(x_i - x_{i-1})}{(x'_i - x'_{i-1})} = k$ (constante) para todo 1≤i≤k.

Se $\frac{m_i}{m\prime_i} = \frac{M_i}{M'_i} = k$, então as áreas definidas abaixo de f e g, respectivamente, A_f e A_g, tal que $\frac{A_f}{A_g} = k^2$.

Compreendida a relação entre comprimentos e áreas de curvas limitadas contínuas, o volume de um Sólido de Revolução pode-se a identificação a existência da constante de proporcionalidade de dois sólidos de revolução semelhantes.

Iniciaremos definindo uma Superfície de Revolução S(e, G) como sendo a superfície formada pela rotação de G (o gráfico da função f sob um sistema cartesiano fixado) em torno de um eixo e (sob o mesmo plano que G paralelo às abscissas), tal que para todo xϵ[α,b] o ponto (x,f(x))ϵG descreve o círculo de raio f(x), centrado no ponto de e, e com abscissa x e contido no plano perpendicular a e.

Denomina-se então, sólido de revolução S(e, G), a união dos discos gerados pela rotação de G em torno de e, limitada pelos pontos (α,f(α)) e (b,f(b)).

Definição 7: Dada a função f:[α,b]→ℝ, contínua, o volume do sólido de revolução em torno de um de seus eixos é dado por $V_f = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Desssa forma as condições de existência de semelhança para dois sólidos de revolução são dadas a seguir.

Definição 8: Considere as funções f:[α,b]→ℝ e g:[c,d]→ℝ contínuas, as partições $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b\}$ em f e $Q = \{c = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_k = d\}$ em g, tal que $\frac{(x_i - x_{i-1})}{(x'_i - x'_{i-1})} = k$ (constante) para todo 1≤i≤k. Se $\frac{m_i}{m'_i} = \frac{M_i}{M'_i} = k$, então os volumes dos sólidos revolução de f e g, respectivamente, V_f e V_g, tal que $\frac{V_f}{V_g} = k^3$.

Mostramos em que situações curvas são semelhantes, e como verificar a existência da Constante de Proporcionalidade ao se trabalhar com seus comprimentos, áreas e volumes.

De forma geral podemos afirmar que, uma Constante de Proporcionalidade k nos fornece qual a taxa de ampliação (ou dedução) de uma curva, sem que para isso essa perca nenhuma propriedade, ou seja, não sofra distorções de imagem. Logo, afirmar que um Sólido de Revolução, possui o comprimento da curva que o descreve, associado a outro semelhante por uma constante k, a área k^2 e k^3 o volume , nos fornece que esses aumento (ou redução) acontece na mesma proporção de forma linear, plana ou espacial.

Sabendo que todos os sólidos que podemos conceber são Poliedros, Sólidos de Revolução ou a composição entre os dois primeiros, pode-se confirmar a existência da constante de Proporcionalidade para qualquer sólido.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A forma mais natural de se trabalhar com matemática é geometricamente, pois essa surge do reconhecimento de padrões, não o contrário, surge o conteúdo matemático para depois surgirem suas representações. Sendo a matemática associada à geometria natural, é importante que esse aspecto seja valorizado.

Dessa forma, buscou-se construir o conceito de Proporccionalidade ao longo da história da matemática, sem desconsiderar todos os processos númericos envolvidos na mesma. Esse processo se faz necessário para mostrar a relevância do conhecimento acumulado ao longo dos séculos, suas limitações e os caminhos tomados para superar as últimas.

Por outro lado, a educação básica possui como medidor de qualidade da educação básica elementos denominados “ Descritores”, que são uma série de elementos que indicam as habilidades que cada aluno deverá ter desenvolvido ao fim de cada modalidade de ensino. Entre esses Descritos, de forma natural existem um número relevante, associados aos conhecimentos de Proporcionalidade, o que deve-se a sua grande relevância sócio-histórica.

O trabalho do professor de Matemática é muito importante para a continuidade dos estudos, pois para o desenvolvimento das habilidades matemáticas é preciso estimular formas de raciocínio como a dedução, indução, inferência e julgamento; aproximando os polos de aprendizagem e estimulando a construção do conhecimento, para cosntruir uma educação relevante ao desenvolvimento humano, social e científico.

REFERÊNCIAS

AVILA, Geraldo. **Cálculo de Funções de uma Variável**. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC editora, 2004.

AVILA, Geraldo. RPM: **A Geometria e as Distâncias Astronômicas na Grécia**. Nº 1. Rio de Janeiro: Editora SBM, 06 de janeiro de 2010.

BRASIL**. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasíllia, Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

BRASIL-MEC. **Matriz de Referência de Matemática da 3ª Série do Ensino Médio: Comentários sobre os temas e seus descritores, exemplos de itens**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3_matematica.pdf. Acessado em: 20 de março de 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília-MEC/SEF, 1998.

LEITHOULD, Louis. **O cálculo com geometria analítica, vol 1**. 3ª edição. Vila Mariana- SP: Editora HARBRA, 1994.

LEITHOULD, Louis. **O cálculo com geométria analítica, vol 2**. 3ª edição. Vila Mariana-SP: Editora HABRA, 1994.

LIMA, Elon Larges. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

ÍNDICE REMISSIVO

F

G

H

I

L

M

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações 2

Atena
Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações 2

Atena Editora
Ano 2022