

## MÉTODOS DE GRAFICADO Y NEWTON-RAPHSON PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

---

***Oscar Leopoldo Pérez Castañeda***

Tecnológico Nacional de México-Instituto  
Tecnológico de Tehuacán

Departamento de Ingeniería Eléctrica-  
Electrónica

<https://orcid.org/0000-0002-3271-5479>

***Jesús Daniel Pérez Castañeda***

Tecnológico Nacional de México-Instituto  
Tecnológico de Tehuacán

Departamento de Ingeniería Eléctrica-  
Electrónica

<https://orcid.org/0000-0001-7774-8031>

***Gabriel Antonio Pérez Castañeda***

Tecnológico Nacional de México-Instituto  
Tecnológico de Tehuacán

Carrera de Ingeniería Mecatrónica

<http://orcid.org/0000-0003-2754-9485>

***José Enrique Salinas Carrillo***

Tecnológico Nacional de México-Instituto  
Tecnológico de Tehuacán

Carrera de Ingeniería Civil

<http://orcid.org/0000-0002-4559-3132>

***Jaime Leonardo Huerta Valencia***

Tecnológico Nacional de México-Instituto  
Tecnológico de Tehuacán

Departamento de Ingeniería Eléctrica-  
Electrónica

All content in this magazine is licensed under a Creative Commons Attribution License. Attribution-Non-Commercial-Non-Derivatives 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0).



**Resumen:** En Ingeniería Electrónica, la solución de algunos circuitos, se transforma en resolver una ecuación no lineal o un sistema de ecuaciones no lineales, debido a la naturaleza de algunos dispositivos, cuyo comportamiento es no lineal. Hallar la solución de tales circuitos resulta imperativa. Así que, en ocasiones, se recurre a la utilización del método de NR (Newton-Raphson) para dar solución a dichos problemas. Sin embargo, algunos autores han señalado que dicho método es ineficaz para la solución de este tipo de problemas. En este trabajo, tres ejemplos son presentados para ilustrar la eficacia del método de NR en combinación con el método gráfico, para la solución de una ecuación no lineal o sistemas de ecuaciones no lineales.

**Palabras Clave:** Convergencia, método gráfico, Newton-Raphson, raíces.

## INTRODUCCIÓN

Existen aplicaciones o escenarios reales donde los problemas no tienen una solución analítica o exacta. Por ejemplo, algunas integrales cuya solución es difícil de encontrar de manera analítica o de plano, no existe solución analítica; ecuaciones no lineales, como la ecuación 1

$$\ln(x) = \text{seno}(x) \quad (1)$$

para la cual, obtener la solución exacta o analítica, es imposible, y es aquí donde aparecen los MN (Métodos Numéricos).

La idea esencial de los MN, es proporcionar un valor numérico de manera aproximada como solución, i.e., hallar una solución con un cierto margen de error. Si éste es aceptable para el problema en cuestión, entonces la solución propuesta por el MN es aceptada.

Para la solución de ecuaciones no lineales, se disponen de algunos métodos que ofrecen una solución aproximada a tales ecuaciones. Hay MN abiertos y MN cerrados. En los

primeros, el método inicia con un intervalo que contiene la solución posible o raíz, y un procedimiento es usado para obtener un intervalo menor donde se halla la raíz, y este procedimiento es iterado (repetido) varias veces, hasta aproximarse al valor de la solución; ejemplos de ellos son los métodos de Bisección y Falsa Posición. En los segundos, el método inicia con un valor cercano a la raíz, conocido como valor de inicio o de arranque, *guess* en inglés. Después inicia un proceso de iteración, hasta que un nuevo valor cercano a la raíz es obtenido. Un ejemplo de este de método es el de NR. Existe abundante y excelente literatura que abordan estos métodos [Burden et al. 2017], [Nakamura, 1992], [James et al., 2020], por mencionar algunos clásicos.

En el área de electrónica, se encuentran diferentes circuitos electrónicos o redes eléctricas que están formadas por dispositivos electrónicos como diodos, transistores, amplificadores operaciones, etc., cuyo comportamiento es no lineal. Por consecuencia, la simulación o diseño de dichos circuitos, se sujetan a resolver una ecuación no lineal o inclusive un sistema de ecuaciones no lineales. Es aquí donde toma utilidad el uso de los MN, en particular el de Newton-Raphson, para hallar la solución a tales ecuaciones.

El método de NR, puede ser utilizado en combinación con el método gráfico para hallar una solución aproximada a una ecuación no lineal o a un sistema de ecuaciones no lineales. Y la característica de realizar cálculos iterativos de manera rápida por la computadora, permiten que estos métodos puedan programarse utilizando un lenguaje de programación. La combinación de estas tres herramientas, puede ser usada para la solución de este tipo de problemas.

## MARCO TEÓRICO

Una de las ventajas de los MN, es que la

mayoría de sus algoritmos son iterativos, simplificando la solución del problema original, ya que “la tarea de iterar es realizada de manera perfecta y rápida por una computadora” (Walter, 2016).

El método de NR es un método muy conocido por su rapidez y eficiencia para obtener las raíces o solución de una ecuación no lineal [Yamamoto, 2000], [Saba, 2015], [Shiv, 2017], [Tetsuro, 2000]. Aunque también presenta sus desventajas como cualquier método.

De entre sus desventajas del método, se puede mencionar que la convergencia no está garantizada. Una división por cero puede ocurrir [Vaughan 2000]. En ocasiones la derivada de la función  $f(x)$  es más complicada de obtener que la función misma. Si la derivada de  $f(x)$  tiende a cero, el método se ralentiza o de plano no funciona”, [Nakamura, 1992], [Griffith & Smith, 2006], [Burden et.al., 2017]. Estas desventajas mencionadas anteriormente, están asociadas a la naturaleza del método. A pesar de ello, el método de NR sigue vigente.

Sin embargo, algunas observaciones al método de NR han sido realizadas, sugiriendo una ineficacia del mismo. A continuación se citan algunas de ellas: “El método de NR ha sido probado globalmente convergentemente bajo condiciones no reales” [Bank y Rose, 1981]. “El método de NR algunas veces falla debido a que es difícil proveer un punto de inicio suficientemente cercano a una solución desconocida” [Trajkociv, 1998], [Yamamuru y Furuki, 2007]. “El método de NR o de Bisección toma un número elevado de iteraciones para hallar la solución a una ecuación algebraica no lineal, en particular para hallar el valor del resistor de un circuito RLC” [Hasan, 2009].

A continuación nos concentraremos en dos puntos en particular. El primero, asociado al desconocimiento del punto de arranque o de inicio (*guess*) y, el segundo, al número de

iteraciones.

La dificultad para obtener un valor de arranque (*guess*) para iniciar el método de NR, en ocasiones puede ser superada si se grafica la ecuación algebraica no lineal en cuestión, y a partir de allí, se propone un valor cercano a la raíz.

El problema del número elevado de iteraciones para obtener la solución del tipo de ecuaciones en discusión, es relativa al problema, el método utilizado así como a la tecnología de la computadora en la que se programe el método. Los microprocesadores actuales, ofrecen al menos frecuencias de trabajo del orden de los giga hertz, núcleos de procesadores y otros aspectos tecnológicos, que aumentan el rendimiento de una computadora, ofreciendo un tiempo de ejecución aceptable.

En este trabajo, tres ejemplos son presentados, ilustrando la combinación del método gráfico con el de NR para la solución de ecuaciones no lineales.

## MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

El problema de la localización de raíces, se reduce a encontrar aquellos valores de  $x$  que satisfacen una ecuación de la forma  $f(x) = 0$ . Una estimación inicial de la raíz es encontrar de manera gráfica un valor cercano a la raíz.

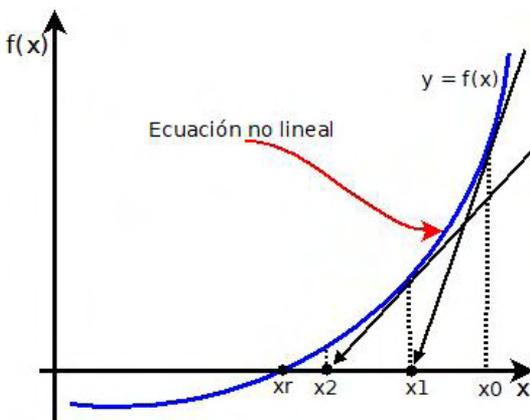


Figura 1, ilustración gráfica del método de NR.

Esta estimación es entonces aproximada usando el método de NR, el cual está basado en la obtención de la tangente a la curva cercana a la raíz. El método de NR es un método iterativo usado para mejorar la aproximación de la raíz. Esto último es descrito gráficamente en la figura 1. Si  $f(x)$  tiene una raíz  $x_r$  simple cercana a  $x_0$ , entonces una estimación cercana a la raíz es  $x_1$ , donde el valor para  $x_1$  es hallado según la ecuación 2.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2)$$

Una vez hallado  $x_1$ , el valor para  $x_2$  es hallado utilizando la ecuación 3, el valor de  $x_1$  es actualizado por el de  $x_2$  y el valor de  $x_0$  es actualizado por el de  $x_1$ , y así sucesivamente, hasta obtener el valor de la raíz simple  $x_r$ , ver figura 1. La fórmula generalizada es mostrada en la ecuación 3. Esta es la fórmula iterativa del método de NR.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, f'(x_{n-1}) \neq 0 \quad (3)$$

El método de NR, es detenido cuando se cumple alguno de los dos criterios de paro presentados en las ecuaciones 4 y 5.

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon, \text{ con } |x_n| \neq 0 \quad (5)$$

Así que, la fórmula iterativa de NR inicia con un valor  $x_0$ , y continúa calculando los valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , hasta que se cumple con un cierto error o criterio de paro. Esto es evaluado por la convergencia de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  a un punto fijo.

El algoritmo de NR es resumido a continuación.

1. Proponer un valor de inicio  $x_0$  cercano a la raíz y el valor de error permitido  $\varepsilon$ .
2. Iniciar el método con  $x_0$
3. Calcular  $x_n$ , utilizando la ecuación 3.
4. Evaluar la convergencia utilizando la

ecuación 4.

5. Si no hay convergencia, ir al paso 3.

6. Si existe convergencia, regresar el valor final  $x_n$  obtenido.

## SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Así como se tienen ecuaciones no lineales, también existen problemas que forman un sistema de ecuaciones no lineales, y también el método de NR es aplicable en tal caso, de acuerdo a la ecuación 6.

$$X_n = X_{n-1} - [F'(X_{n-1})]^{-1}F(X_{n-1}) \quad (6)$$

donde:

$$X_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots) \\ f_2(x_1, x_2, \dots) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$F'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

## RAÍCES DE UNA ECUACIÓN

Si  $f(x)$  es una función dada, el valor de  $x$  para el cual  $f(x) = 0$  es llamado la raíz de la ecuación o el cero de la función. Se distinguen varios tipos de raíces: raíz simple y raíces múltiples.

Una raíz  $x_0$  se dice que es:

- Una raíz simple si cumple con las condiciones de la ecuación 7.

$$f(x_0) = 0, \frac{df}{dx} |_{x_0} \neq 0 \quad (7)$$

- Una raíz doble si cumple con las condiciones de la ecuación (8), y así

sucesivamente.

$$f(x_0)f(x_0) = 0, \frac{df}{dx} |_{x_0} = 0 \text{ y } \frac{d^2f}{dx^2} |_{x_0} \neq 0 \quad (8)$$

## EJEMPLOS

Con la finalidad de ilustrar el uso de ambos métodos, el gráfico y el de NR, se presentan tres ejemplos de circuitos no lineales. El método gráfico es utilizado para proponer un valor de inicio  $x_0$  para el método NR.

**Ejemplo 1.** Para el circuito de la figura 2, obtener el valor del voltaje  $v$ , considerando que  $V_1 = 1 \text{ V}$ ,  $V_2 = 2 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $i = g(v) = 0.5v + 0.1v^3 + 0.05v^5 + 0.01v^7$ .

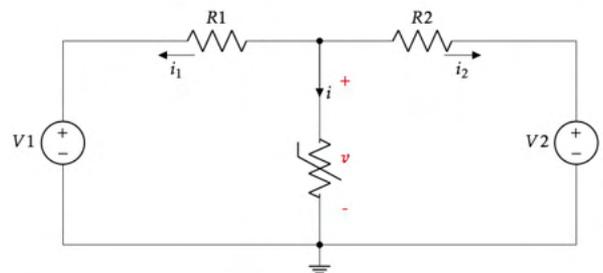


Figura 2, circuito para obtener el voltaje  $v$  del ejemplo 1.

**Nota:** En los circuitos de las figuras 2, 4 y 6, un sensor genérico con comportamiento no lineal, es utilizado para generalizar los problemas.

Aplicando la ley de Kirchhoff de corrientes para el nodo del circuito de la figura 2, se obtiene la ecuación 9.

$$i + i_1 + i_2 = 0 \quad (9)$$

Donde  $i$ ,  $i_1$  e  $i_2$  vienen dadas por las ecuaciones 10, 11 y 12 respectivamente.

$$i = 0.5v + 0.1v^3 + 0.05v^5 + 0.01v^7 \quad (10)$$

$$i_1 = \frac{v-V_1}{R_1} = v - 1 \quad (11)$$

$$i_2 = \frac{v-V_2}{R_2} = \frac{v-2}{2} \quad (12)$$

Sustituyendo en las ecuaciones 10, 11 y 12,

con sus respectivos valores de  $V_1, V_2, R_1$  y  $R_2$  y simplificando, se obtiene la ecuación 13.

$$2v + 0.1v^3 + 0.05v^5 + 0.01v^7 = 2 \quad (13)$$

Se observa que la ecuación 13, es una ecuación no lineal, por lo que puede resolverse por el método de NR. Lo primero que se sugiere hacer, es graficar en un intervalo propuesto, para tener una idea del lugar cercano a una raíz. Para este ejemplo, se grafica en el intervalo  $[-0.5, 1.5]$ ; la gráfica es mostrada en la figura 3.

De ésta, se observa que hay una raíz o cero en el intervalo  $[0.75, 1.0]$ . Por lo que se puede escoger cualquier valor en este intervalo. Para este ejemplo, se propone el valor de inicio de  $x_0 = 0.75$ .

Para agilizar los cálculos, se programó el método de NR en Python 3.9, donde los datos a considerar son la ecuación 14 para la función, y la ecuación 15 para la derivada de la función,  $x_0 = 0.75$  y un valor de  $= 0.000001$ . Para resultados ver la tabla 1.

$$f(v) = 2v + 0.1v^3 + 0.05v^5 + 0.01v^7 = 2 \quad (14)$$

$$\frac{df}{dv} = 2 + 0.3v^2 + 0.25v^4 + 0.07v^6 \quad (15)$$

De la tabla 1, se observa que el valor obtenido de la raíz es 0.9375111, redondeando a tres dígitos decimales, puede considerarse como  $v = 0.938$  V.

**Ejemplo 2.** Para el circuito de la figura 4, obtener el valor del voltaje  $v_p$ , para que el voltaje  $v_o = 1$  V. Considerar que  $R_1 = 1$  K $\Omega$ , y  $v_2$ , viene dado por la ecuación 16.

$$v_2 = -1 + i_2 + 0.5i_2^3 + 0.1i_2^5 + e^{0.5i_2} \quad (16)$$

Donde  $v_2$  viene dado en volts,  $i_2$  en miliamperios, y  $v_{saturación} = 14$  V.

El voltaje de salida  $v_o$ , se ajusta a la inecuación 17, entonces se puede considerar que el amplificador operacional se encuentra trabajando dentro de la región lineal, por lo que,  $v_d = 0$  (voltaje diferencial).

$$0 < v_o < v_{saturación} \quad (17)$$

Esto conduce a las ecuaciones 18, 19.

$$v_o = -v_2 = -(-1 + i_2 + 0.5i_2^3 + 0.1i_2^5 + e^{0.5i_2}) \quad (18)$$

$$i_2 = i_1 = \frac{v_i}{R_1} = \frac{v_i}{1 \times 10^3} \quad (19)$$

Sustituyendo los valores de  $i_2$  de la ecuación 18,  $R_1 = 1$  k $\Omega$   $v_o = 1$ , en la ecuación 19, se obtienen las ecuaciones 20 y 21.

$$f(v_i) = v_i + 0.5v_i^3 + 0.1v_i^5 + e^{0.5v_i} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{df}{dv_i} = 1 + 1.5v_i^2 + 0.5v_i^4 + 0.5e^{0.5v_i} \quad (21)$$

Se grafica  $f(v_i)$  de la ecuación 20, para tener una idea del valor inicial con el cual iniciar el método. La gráfica se genera en el intervalo  $[-1.0, 0.5]$ , y es mostrada en la figura 5.

De la figura 5, se observa que hay una raíz cercana a -0.6, por lo que éste, puede ser el valor de inicio  $x_0$ , para arrancar el método de NR y hallar el valor de la raíz, con el margen de error permitido de  $= 0.000001$ . Se programó el método, obteniendo los resultados de la tabla 2.

De la tabla 2, se observa que se necesitaron 4 iteraciones, y redondeando a tres decimales, el valor para el voltaje es  $v_i = -0.613$ . De hecho, el valor del error fue de 0.000000 como puede verse de la tabla 2.

### Ejemplo 3.

Para el circuito de la figura 6, obtener los valores de los voltajes  $v_1$  y  $v_2$  de los nodos 1 y 2 respectivamente, para los valores de los elementos proporcionados a continuación. Los valores de los elementos del circuito de la figura 6 son:  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 4\Omega$ ,  $i_{c1} = 1$  A,  $i_{c2} = 3$  A,  $i_3 = g(v_3) = 2v_3^3$ ,  $i_4 = g(v_4) = e^{0.5v_4}$ .

Aplicando las leyes de Kirchhoff de las corrientes a los nodos 1 y 2 del circuito de la figura 6, se obtienen las ecuaciones 22 y 23.

$$i_{c1} = i_1 + i_3 = \frac{v_1}{R_1} + 2(v_1 - v_2)^3 \quad (22)$$

$$i_{c2} + i_3 = i_4 + i_2 \rightarrow i_{c2} + 2(v_1 - v_2)^3 = e^{0.5v_4} + \frac{v_2}{R_2} \quad (23)$$

Sustituyendo los valores numéricos en

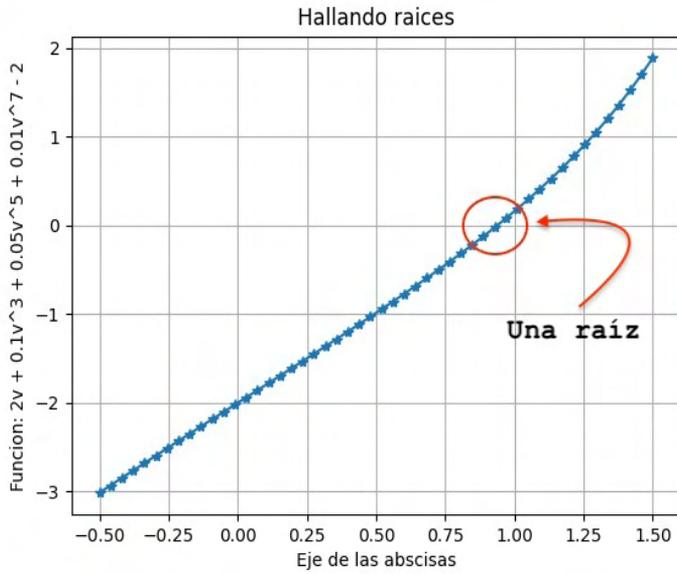


Figura 3, gráfica de la función del ejemplo 1.

$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{\text{nuevo}}$	error
7.500000e-01	-4.446124e-01	2.260310e+00	9.467042e-01	1.967042e-01
9.467042e-01	2.309471e-02	2.520085e+00	9.375399e-01	9.164258e-03
9.375399e-01	7.225886e-05	2.504384e+00	9.375111e-01	2.885295e-0
9.375111e-01	7.037833e-10	2.504335e+00	<b>9.375111e-01</b>	2.810260e-10

Tabla 1, resultados resumidos del ejemplo 1.

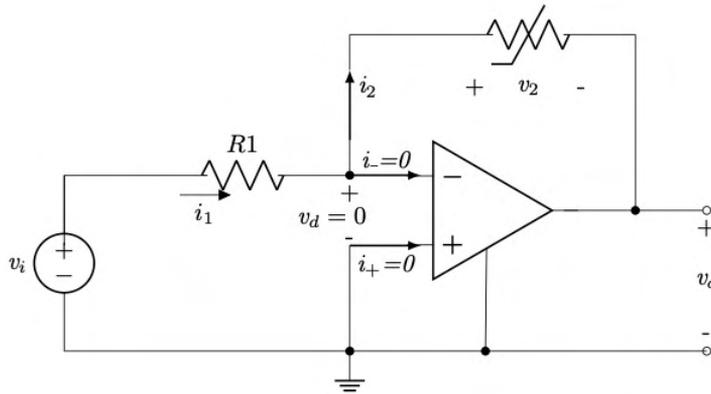


Figura 4, circuito para el ejemplo 2.

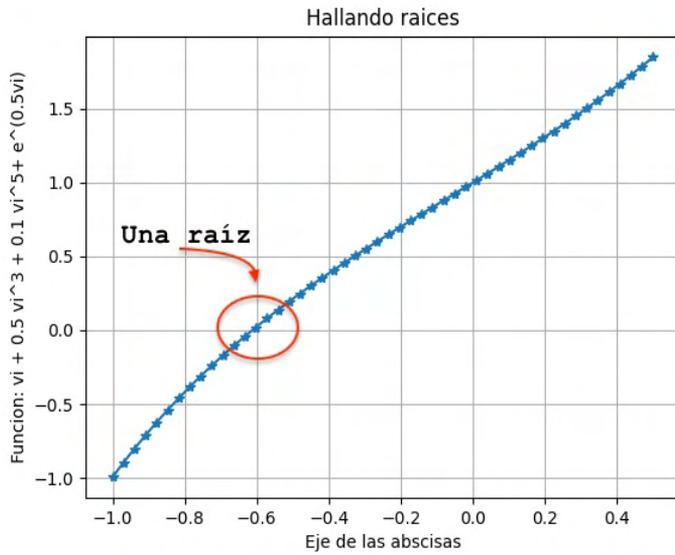


Figura 5, gráfica de la función del ejemplo 2.

$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$x_{\text{nuevo}}$	error
-6.000000e-01	2.504222e-02	1.975209e+00	-6.126783e-01	1.267826e-02
-6.126783e-01	-1.662910e-0	2.001584e+00	-6.125952e-01	8.307974e-0
9.375399e-01	7.225886e-05	2.504384e+00	9.375111e-01	2.885295e-0
-6.125952e-01	-7.295051e-09	2.001408e+00	<b>-6.125952e-01</b>	3.644959e-09

Tabla 2, resultados resumidos, aplicando NR.

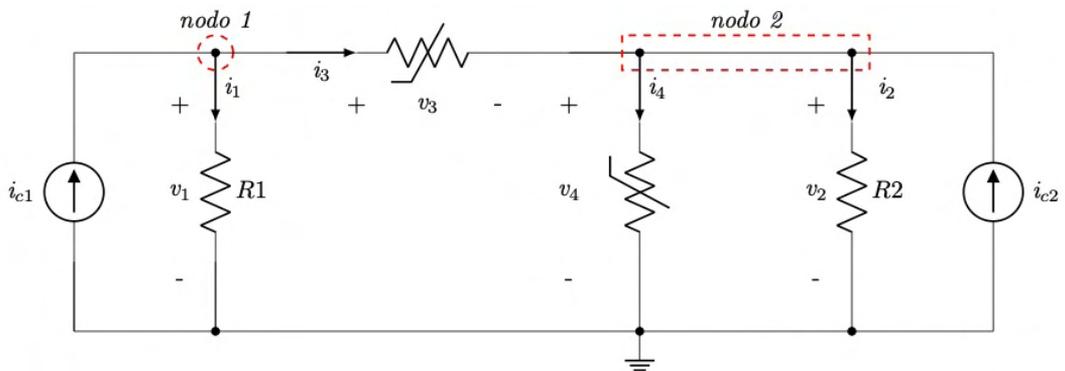


Figura 6, circuito para el ejemplo 2.

las ecuaciones 22 y 23 y reordenando los términos, se tienen las ecuaciones 24 y 25.

$$f_1(v_1, v_2) = 0.5 v_1 + 2(v_1 - v_2)^3 - 1 = 0 \quad (24)$$

$$f_2(v_1, v_2) = -2(v_1 - v_2)^3 + e^{0.5v_2} + 0.25v_2 - 3 = 0 \quad (25)$$

De las ecuaciones 24 y 25, se nota que se tiene un par de ecuaciones no lineales, formando así, un sistema de ecuaciones no lineales. Se aplica el método de NR pero en su forma matricial, de acuerdo a la ecuación 6, dando lugar a las ecuaciones, 26 y 27.

$$F(v) = \begin{bmatrix} 2(v_1 - v_2)^3 + 0.5v_1 - 1 \\ -2(v_1 - v_2)^3 + e^{0.5v_2} + 0.25v_2 - 3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$F'(v) = \begin{bmatrix} 0.5 + 6(v_1 - v_2)^2 & -6(v_1 - v_2)^2 \\ -6(v_1 - v_2)^2 & 6(v_1 - v_2)^2 + 0.5 e^{0.5v_2} + 0.25 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Graficando las funciones en el intervalo [0, 2.5], como se aprecia de la figura 7, los valores de las raíces se encuentran en el intervalo [1.5, 2.0], estando más cerca de 2.0. Los valores propuestos de inicio para el método son:  $x_1 = x_2 = 2.0$ , y el margen de error = 0.000000001. Los resultados obtenidos son mostrados en la tabla 3.

Redondeando los resultados a tres dígitos decimales, se tiene que  $v_1 = 1.992 \text{ V}$  y  $v_2 = 1.863 \text{ V}$ . De la tabla 3 se observa que, a partir de la iteración 2, los valores para  $v_1$  y  $v_2$  con tres cifras significativas son alcanzados. Se aplicó un error de = 0.000000001. Aún así, el número de iteraciones necesarias fue de seis, muy pocas para lo que puede hacer una computadora.

## DISCUSIÓN

De estos ejemplos, se desprende la aplicación y utilización del método de NR para solucionar ya sea una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones no lineales en el área de circuitos electrónicos.

La combinación del método gráfico, el método de NR y una computadora, han sido presentados. Se ha presentado la utilidad del método gráfico para encontrar un valor real de inicio  $x_0$  del método NR.

En estos ejemplos, el intervalo utilizado para graficar la función fue propuesto. En la práctica, el hallar el intervalo de graficado es realizado a prueba y error. En este trabajo, esta parte no fue presentada para no consumir demasiado texto, y no aburrir al lector.

## CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos en estos ejemplos, ilustran la utilidad del método gráfico, para encontrar el valor de inicio del método NR.

El hecho que el valor de inicio del método esté cercano a la raíz, reduce el número de iteraciones y acelera la convergencia del método de NR.

Una de las ventajas notables del método de NR, es que es extendible, i.e., se puede aplicar a una ecuación no lineal o extender el método y, aplicar a un sistema de ecuaciones no lineales.

Por supuesto, siempre existe la posibilidad que no haya convergencia. Si es el caso, se sugiere intentar con algún método de homotopía como el de Newton-Homotopía [Hasan, 2009], [Saigal, 1983] y [Trajkovic, 1998].

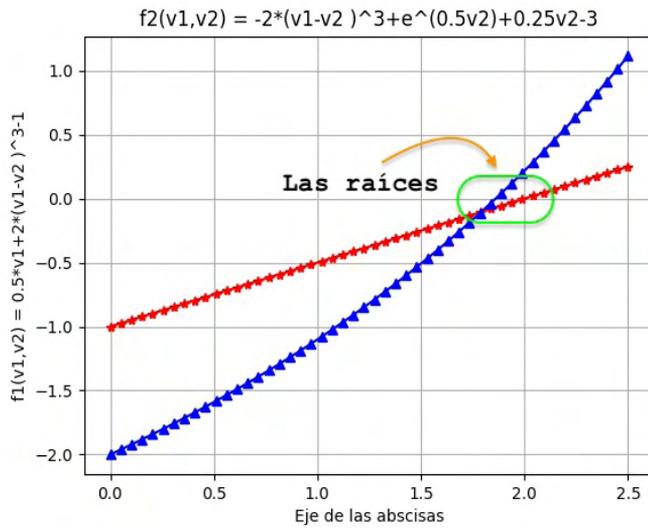


Figura 7, las gráficas para el ejemplo 3.

Iteración	$X_i$	$X_{i-1}$	$F(X_i)$	$(F'(X_i))^{-1}$
		[2.0] [2.0]	[0.0] [0.21828183]	[2.0], [0.0] [0.0], [0.62144961]
1	[2.0] [1.86434884]			
		[2.0] [1.86434884]	[0.0049923] [0.00112118]	[1.65856473], [0.11231326] [0.11231326], [0.62094422]
2	[1.99159403] [1.86309195]			
		[1.99159403] [1.86309195]	[0.0049923] [0.00112118]	[1.65856473], 0.11231326] 0.11231326], [0.62094422]
3	[1.99159403] [1.86309195]			
		[1.99159403] [1.86309195]	[4.08675209e-05] [-4.03660438e-05]	[1.68630957], [0.10324094] [0.10324094], [0.62425619]
4	[1.99152928] [1.86311293]			
		[1.99152928] [1.86311293]	[ 5.66505653e-09] [-5.52539792e-09]	[1.6866407], [0.10313106] [0.10313106], [0.62428689]
5	[1.99152927] [1.86311294]			
		[1.99152927] [1.86311294]	[1.11022302e-16] [0.00000000e+00]	[1.68664075], [0.10313104] [0.10313104], [0.62428689]
6	[1.99152927] [1.86311294]			

Tabla 3, Resultados resumidos, aplicando NR.

## REFERENCIAS

- [1] Bank R and Rose. Global Approximate Newton Methods, *Numer. Math.*, vol. 37, pp. 279-295, 1981.
- [2] Burden R, Faires D, Burden M. *Análisis Numérico*. Edición 10. CENGAGE Learning, 2017.
- [3] Hasan T. The Application of Homotopy Method In Solving Electrical Circuit Design Problem. *World Academy of Science, Engineering and Technology. International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering* Vol:3, No:1, 2009.
- [4] James, Smith, Wolford. *Métodos Numéricos aplicados a la computación digital con Fortran*. Edición 5. 2020.
- [5] Nakamura S. *Métodos Numéricos aplicados con software*. Editorial Prentice Hall, 1992.
- [6] Saba Akram, Qurrat ul Ann. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Volume 6, Issue 7, July-2015. ISSN 2229-5518, 2015.
- [7] Saigal R. A homotopy for Solving Large, Sparse and Structured Fixed-Point Problems. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 8, No. 4, U.S.A, 1983.
- [8] Shiv Kumar Sharma. A Comparative Analysis of Rate of Convergence for Linear And Quadratic Approximations in N-R Method. *World Journal of Research and Review (WJRR)* ISSN:2455-3956, Volume-4, Issue-5, May 2017.
- [9] Tetsuro Yamamoto. Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics* Volume 124, Issues 1-2, 1 December 2000.
- [10] Trajkociv L. "Homotopy. Methods for Computing Diode Circuit Operating Points", Wiley Reference Number 2526, 1998.
- [11] Vaughan Griffiths, I M Smith. *Numerical Methods for Engineers*. Chapman & Hall, 2006.
- [12] Yamamura W, and Furuki S. "An Efficient Variable Gain Homotopy Method Using the SPICE-Oriented Approach", *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, Vol. 54, 2007.