Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

FORMAÇÃO INTERDISCIPLINAR DAS CIÊNCIAS EXATAS:
Conhecimentos e pesquisas 2

Atena Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

FORMAÇÃO INTERDISCIPLINAR DAS CIÊNCIAS EXATAS:
Conhecimentos e pesquisas 2

Atena Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Formação interdisciplinar das ciências exatas: conhecimentos e pesquisas 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F723 Formação interdisciplinar das ciências exatas: conhecimentos e pesquisas 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0197-1
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.971222006

1. Ciências exatas. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 507

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a área de ciências exatas e as relações construídas interdisciplinarmente ocupam um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Formação interdisciplinar das ciências exatas: Conhecimentos e pesquisas 2***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a área de ciências exatas sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 10

SOBRE A FORMALIZAÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS COMO UM CORPO ORDENADO COMPLETO

Data de aceite: 01/06/2022

Juliana Hazt
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Guarapuava-PR

Ceni Rafaele da Cruz
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Guarapuava-PR

Marlon Soares
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Guarapuava-PR

RESUMO: Neste trabalho são apresentados os resultados de um estudo envolvendo a formalização do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo, que foi motivado pela ausência dessa formalização em alguns livros clássicos de Análise Real.

PALAVRAS-CHAVE: Números reais; Análise Real; cortes de Dedekind.

ABSTRACT: This work presents the results of a study involving the formalization of the set of real numbers as a complete ordered field, which was motivated by the absence of this formalization in some classical textbooks.

KEYWORDS: Real numbers; real analysis; Dedekind cuts.

INTRODUÇÃO

Em (WEISS, 2015) são apresentados os procedimentos mais conhecidos para a construção formal do conjunto dos números reais, que doravante será denotado por $\mathbb{R}$. Conforme pode ser constatado nas referências desse trabalho, independentemente do procedimento adotado, os processos envolvidos no seu desenvolvimento são bastante elaborados.

A formalização do conjunto dos números reais, após perpassar a estrutura de corpo ordenado, encontra seu apogeu na completude, ou seja, no fato que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo (equivalentemente, que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui ínfimo).

Tais conceitos não se limitam à caracterização da completude, sendo essenciais para o desenvolvimento da Análise Real, seja na demonstração de resultados importantes, como o Teorema de Bolzano e o Teorema de Weierstrass, seja na definição da Integral de Riemann.

Apesar da completude ser essencial para o estudo da Análise Real, doravante denominada Análise, é comum os autores de livros-texto clássicos omitirem a formalização do conjunto $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo. O que levantou a seguinte questão: seria tal formalização tão extensa ou tão complexa, a ponto de ser omitida?

REVISÃO DE LITERATURA

Desde a primeira tentativa de formalização do conjunto dos números reais pelo matemático Simon Steven, em 1585, no ensaio De Thiende, passaram-se 287 anos, e mais algumas tentativas frustradas, até que Dedekind (1872), utilizando o conceito de *corte*, conseguisse tal feito. Na ocasião, Dedekind tentava provar que "toda sequência monótona e limitada é convergente", quando constatou que seria impossível tal prova sem formalizar $\mathbb{R}$.

Ao fazer isso, Dedekind assegurou a existência do supremo e do ínfimo. Tais conceitos são essenciais no desenvolvimento da Análise, tanto na demonstração de resultados importantes, como o Teorema de Bolzano e o Teorema de Weierstrass, quanto na definição da Integral de Riemann.

Apesar da sua importância no desenvolvimento da Análise, conforme pode ser visto a seguir, é comum livros-texto clássicos omitirem a formalização do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo.

Em (LIMA, 2019, p. 26-33,44), são destinadas oito páginas ao conjunto dos números naturais, para simplesmente assumir axiomaticamente, à p. 64, que "existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais".

Por sua vez, em (ÁVILA, 2006, p. 57-64), são dedicadas oito páginas para tentar descrever $\mathbb{R}$ com um misto de fatos históricos e resultados incompletos, associados a informações de pouca relevância para tal fim. Chegando a afirmar, logo após a definição de corte, a respeito de um certo conjunto E, formado exclusivamente por números racionais "o conjunto E é uma semirreta".

Enquanto, em (FIGUEIREDO, 1996, p. 11-12), ao final de uma descrição informal do conjunto $\mathbb{R}$, que inclui a definição formal de corte, aparece o seguinte equívoco: "Exemplo de um corte: o conjunto A formado pelos números racionais negativos e pelos números racionais positivos r tais que $r^2 < 2$."

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir será apresentada a formalização de $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo, considerando conhecidos os resultados que fazem do conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, um corpo ordenado. Com o propósito de não estender em demasia o assunto, serão apresentadas somente as demonstrações que não decorrem exclusivamente nas definições e de alguma manipulação algébrica.

Definição 1.1. Diz-se que um subconjunto α de $\mathbb{Q}$ é um *corte* se satisfaz:

(C1) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(C2) dados $s \in \alpha$ e $r \in \mathbb{Q}$ tais que $r < s$, temos $r \in \alpha$;

(C3) dado $s \in \alpha$, existe algum $t \in \alpha$ tal que $s < t$.

Exemplo 1. Para qualquer $q \in \mathbb{Q}$, o conjunto $q^* = \{x \in \mathbb{Q}\colon x < q\}$ é um corte, pois verifica-se facilmente que satisfaz q^* as condições (C1), (C2) e (C3).

Exemplo 2. Para qualquer primo p, o conjunto $\sqrt{p} = \{x \in \mathbb{Q}: x < 0 \text{ ou } x2 < p\}$ é um corte. De fato, (C1) e (C2) são facilmente verificadas. Ademais, dado $s \in \sqrt{p}$, tomando $t = 2(s + 1)(s + 2)–1$, tem-se $t \in \sqrt{p}$ tal que $s < t$, donde $\sqrt{p}$ satisfaz (C3).

É fácil ver que, dado um primo p, não existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^* = \sqrt{p}$. Os cortes da forma q^* são ditos cortes racionais, os demais cortes, dentre eles os da forma $\sqrt{p}$, com p primo, são ditos cortes irracionais. Ademais, o conjunto de todos os cortes é denominado o conjunto dos números reais e denotado por R.

Lema 1.2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

(i) para todo $a \in \alpha$ e todo $k \notin \alpha$, tem-se que $a < k$;

(ii) dado $x \in \mathbb{Q}$, com $x > 0$, existem $a \in \alpha$ e k, $k' \notin \alpha$ tais que $k - a = x$ e $k' < k$.

Demonstração. (ii) Dados $a'' \in \alpha$ e todo $k'' \notin \alpha$, seja $M = \{p \in \mathrm{N}: a'' + px \notin \alpha\}$. Como $M \neq \varnothing$, pelo princípio da boa ordenação, M possui um menor elemento m. Tomando $a' = a'' + (m - 1)x$ e $k' = a'' + mx$, tem-se $a' \in \alpha$ e $k' \notin \alpha$ tais que $k' - a' = x$. Como $a' \in \alpha$, por (C3), existe algum $a \in \alpha$ tal que $a' < a$ e, tomando $k = k' + (a - a')$, tem-se $k \notin \alpha$ tal que $k - a = x$ e $k' < k$.

Definição 1.3. Denomina-se adição sobre R à operação cuja soma é dada por:

$$\alpha + \beta = \{x \in \mathbb{Q}: x = a + b, \text{ com } a \in \alpha \text{ e } b \in \beta\}.$$

Note que se $\alpha \in \mathrm{R}$ então $-\alpha = \{x \in \mathbb{Q}: x < -k, \text{ para algum } k \notin \alpha\} \in \mathrm{R}$. Também note que se $0^* < \alpha$ então $-\alpha < 0^*$.

Lema 1.4. A adição sobre $\mathbb{R}$ satisfaz a seguintes propriedades:

(i) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$;

(ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, para todo $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$;

(iii) $\alpha + 0^* = \alpha$ e $0^* + \alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathrm{R}$;

(iv) $\alpha + (-\alpha) = 0^*$ e $-\alpha + \alpha = 0^*$, para todo $\alpha \in \mathrm{R}$.

Demonstração. (ii) Dado $x \in \alpha + (-\alpha)$, tem-se $x = a + b$, com $a \in \alpha$ e $b < -k$, para algum $k \notin \alpha$. Como $a \in \alpha$ e $k \notin \alpha$, por 1.2(i), tem-se que $a < k$ e, uma vez que $b < -k$, que $x = a + b < k + (-k) = 0$. Assim, $x \in 0^*$ e, sendo x arbitrário, segue que $\alpha + (-\alpha) \subseteq 0^*$. Por sua vez, dado $x \in 0^*$, tem-se $0 < -x$ e, por 1.2(ii), existem $a \in \alpha$ e $k \notin \alpha$ tais que $x - a < -k$, donde segue que $x - a \in -\alpha$. Assim, $x = a + (x - a) \in \alpha + (-\alpha)$ e, sendo x arbitrário, segue que $0^* \subseteq \alpha + (-\alpha)$. Portanto, $\alpha + (-\alpha) = 0^*$ e outra igualdade decorre do item (ii).

Definição 1.5. Dados $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, diz-se que α é menor do que β, denotando $\alpha < \beta$, se $\beta \backslash \alpha \neq \varnothing$.

Definição 1.6. Denomina-se *multiplicação* sobre $\mathbb{R}$ à operação cujo produto é dado por:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q}: x \leq a \cdot b, \text{com } a \in \alpha, b \in \beta \text{ e } a, b > 0\}, & \text{se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ 0^*, & \text{se } \alpha = 0^* \text{ ou } \beta = 0^* \\ -((-\alpha) \cdot \beta), & \text{se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta > 0^* \\ -(\alpha \cdot (-\beta)), & \text{se } \alpha > 0^* \text{ e } \beta < 0^* \\ (-\alpha)(-\beta), & \text{se } \alpha < 0^* \text{ e } \beta < 0^* \end{cases}.$$

Note que se $0^* < \alpha$ então $\alpha{-}1 = \{x \in \mathbb{Q}: x < k{-}1, \text{ para algum } k \notin \alpha\} \in R$ e $0^* < \alpha{-}1$. Também note que se $\alpha < 0^*$ então $\alpha{-}1 = -((-\alpha){-}1) \in R$.

Lema 1.9. A multiplicação sobre R satisfaz a seguintes propriedades:

(*i*) $\alpha \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot y$, para todo α, β, $y \in R$;

(*ii*) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, para todo α, $\beta \in R$;

(*iii*) $\alpha \cdot (\beta + y) = \alpha \cdot y + \alpha \cdot y$ e $(\beta + y) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + y \cdot \alpha$, para todo α, β, $y \in R$;

(*iv*) $\alpha \cdot 1^* = \alpha$ e $1^* \cdot \alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in R$;

(*v*) $\alpha \cdot \alpha{-}1 = 1^*$ e $\alpha{-}1 \cdot \alpha = 1^*$, para todo $\alpha \in R$, com $\alpha \neq 0^*$.

Demonstração. (*v*) No caso em que $0^* < \alpha$ e, portanto, $0^* < \alpha{-}1$, dado $x \in \alpha \cdot \alpha{-}1$, tem-se $x \leq a \cdot b$, com $a \in \alpha$, $0 < a$ e $0 < b < k^{-1} < \alpha{-}1$ e, por conseguinte, que $x < 1$. Assim, $x \in 1^*$ e, sendo x arbitrário, segue que $\alpha \cdot \alpha{-}1 \subseteq 1^*$. Por sua vez, dado $x \in 1^*$, tem-se dois subcasos: $x \leq 0$ e $0 < x$. Se $x \leq 0$, como $0^* < \alpha$ e $0^* < \alpha{-}1$, existem $x \in \alpha$ e $b \in \alpha{-}1$ tais que a, $b > 0$. Logo, $x \leq 0 < ab$, com $x \in \alpha$, $b \in \alpha{-}1$e a, $b > 0$, donde $x \in \alpha \cdot \alpha{-}1$. Se $0 < x$, dado $a \in \alpha$, com $0 < a$, seja $n \in N$ tal que $s = ax{-}n{+}1 \in \alpha$ e $k = ax{-}n \in \alpha$ (tal n existe pois $x{-}1 > 1$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$). Como $s \in \alpha$, por (C3), existe algum $t \in \alpha$ tal que $0 < s < t$. Assim, obtém-se $b = k{-}1t{-}1s$ tal que $0 < b < k{-}1$, para algum $k \notin \alpha$, ou seja, tal que $b \in \alpha{-}1$, com $b > 0$. Donde, $x = tb \in \alpha \cdot \alpha{-}1$ e, sendo x arbitrário, segue que $1^* \subseteq \alpha \cdot \alpha{-}1$. Portanto, nesse caso, $\alpha \cdot \alpha{-}1 = 1^*$ e a outra igualdade decorre do item (*ii*). No caso em que $\alpha < 0^*$, como $0^* <- \alpha$, tem-se $\alpha{-}1 < 0^*$ e $0^* <- \alpha{-}1$, donde por 1.6, tem-se $\alpha \cdot \alpha{-}1 = 1$. Também nesse caso, a outra igualdade decorre do item (*ii*).

Como consequência imediata de 1.4 e 1.9 obtém-se o seguinte resultado.

Teorema 1.10. O conjunto $\mathbb{R}$, munido da adição e multiplicação usuais, é um corpo.

O resultado a seguir garante que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado.

Teorema 1.11. Dados α, β, y, $\delta \in R$, valem as seguintes propriedades:

(*i*) se $\alpha < \beta$ e $\beta < y$ então $\alpha < y$;

(*ii*) apenas uma das alternativas ocorre: ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$;

(*iii*) se $\alpha < \beta$ então $\alpha + y < \beta + y$;

(*ii*) quando $y > 0^*$, tem-se que $\alpha < \beta$ se, e somente se, $\alpha \cdot y < \beta \cdot y$.

Demonstração. (*iii*) Supondo que $\alpha < \beta$, por 1.5, tem-se $\beta \backslash \alpha \neq \varnothing$ e, assim, existe algum $b \in \beta$ tal que $b \notin \alpha$. Como $b \notin \alpha$, segue que $b > a$, para todo $a \in \alpha$, e sendo $b \in \beta$, por (C2), tem-se $a \in \beta$, para todo $a \in \alpha$, donde $\alpha \subseteq \beta$. Note que, se $\beta + y < \alpha + y$, 1.5, tem-se $\alpha + y \backslash \beta + y \neq \varnothing$ e, assim, existe algum $x \in \alpha + y$ tal que $x \notin \beta + y$, o contradizendo o fato que $\alpha \subseteq \beta$. Se $\alpha + y = \beta + y$, adicionado $- y$, obtém-se $\alpha = \beta$, contradizendo a hipótese. Portanto, segue que $\alpha + y < \beta + y$. Reciprocamente, supondo que $\alpha + y < \beta + y$, pelo que foi provado, segue que $(\alpha + y) - y < (\beta + y) - y$ e, por propriedades de 1.4, obtém-se que $\alpha < \beta$.

(iv) Supondo que $\alpha < \beta$, pelo item (ii) e 1.4(iv), segue que $\beta - \alpha > 0^*$. Assim, existe algum $a \in \beta - \alpha$ tal que $a > 0$, donde $a > \frac{a}{2} > 0$. Além disso, sendo $y > 0^*$, existe algum $b \in y$ tal que $b > 0$, donde $b > b2 > 0$. Tomando $x = a2\ b2$, tem-se $x \in (\beta - \alpha)y$, com $x > 0$, donde $(\beta - \alpha)y > 0^*$ e, por propriedades de 1.4 e o item (iii), segue que $\alpha \cdot y < \beta \cdot y$. Reciprocamente, supondo que $\alpha \cdot y < \beta \cdot y$, como $y{-}1 > 0^*$, pelo que foi provado, segue que $(\alpha \cdot y) \cdot y{-}1 < (\beta \cdot y) \cdot y{-}1$ e, por propriedades de 1.9, obtém-se que $\alpha < \beta$.

Sejam $X \subseteq$ R, com $X \neq \emptyset$, e $\alpha, \beta \in$ R. Diz-se que α é uma cota inferior de X (e que X é *limitado inferiormente*) se $\alpha \leq x$, para todo $x \in X$. Diz-se que β é uma cota superior de X (e que X é *limitado superiormente*) se $x \leq \beta$, para todo $x \in X$.

Definição 1.12. Dados X limitado inferiormente e $a \in$ R, diz-se que a é o *ínfimo* de X se:

($I1$) $a \leq x$, para todo $x \in X$;

($I2$) dado $c \in$ R, com $a < c$, existe algum $x \in X$ tal que $x < c$.

Definição 1.13. Dados X limitado superiormente e $b \in$ R, diz-se que b é o supremo de X se:

($S1$) $x \leq b$, para todo $x \in X$;

($S2$) dado $c \in$ R, com $c < b$, existe algum $x \in X$ tal que $c < x$.

Finalmente, temos os resultados que asseguram a completude de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.14. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo.

Demonstração. Seja $X \subseteq$ R limitado superiormente. Considerando $b = Ux\epsilon X\ x$, é fácil verificar que b é um corte. Ademais, como $X \subseteq b$, para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$, para todo $x \in X$, donde vale (S1). Por sua vez, dado $c \in$ R, com $c < b$, tem-se $b\backslash c \neq \emptyset$ e, assim, existe algum $y \in b$ tal que $y \notin c$. Uma vez que $y \in b$ e $b = Ux\epsilon X\ x$, deve existir algum $x \in X$ tal que $c < x$ e $y \notin c$, donde $x\backslash c \neq \emptyset$. Assim, existe algum $x \in X$ tal que $c < x$, donde vale (S2). Logo, b é o supremo de X e, portanto, X possui supremo.

Teorema 1.15. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui ínfimo.

Demonstração. Seja $X \subseteq$ R limitado inferiormente. Considerando S o conjunto de todas as cotas inferiores de X, tem-se S não vazio e tal que qualquer elemento de X é uma cota superior de S. Assim, S é limitado superiormente e, por 1.14, existe algum $a \in$ R tal que a é o supremo de S. Observe que a é uma cota inferior de X, pois se $x < a$, para algum $x \in X$, existe algum $\varepsilon \in$ R tal que $x < \varepsilon < a$, contradizendo o fato que a é a menor das cotas superiores de S. Note também que a é a maior das cotas inferiores de X, pois se existisse algum $c \in$ R tal que $a < c \leq x$, para todo $x \in X$, então teríamos $c \in S$, com $a < c$, contradizendo o fato que a é uma cota superior de S. Logo, a é o ínfimo de X e, portanto, o conjunto X possui ínfimo.

Embora 1.15 tenha sido obtido como uma consequência de 1.14, tais resultados são equivalentes e, portanto, 1.14 pode ser obtido de 1.15. Finalmente, cabe destacar que expressa-se o fato que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ satisfaz esses resultados dizendo que $\mathbb{R}$

é *completo*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme visto na revisão de literatura, dois autores de livros-texto clássicos de Análise dedicam oito páginas de seus livros ora tratando dos números naturais que, apesar da sua importância, não são o foco principal da Análise Real, ora fazendo uma descrição informal, incompleta e com equívocos. Enquanto outro autor de livro-texto clássico, ao comentar a formalização proposta por Dedekind, após apresentar a definição de corte, usa um exemplo equivocado dessa noção, a saber: "conjunto A formado pelos números racionais negativos e pelos números racionais positivos r tais que $r2 < 2$". De fato, se A fosse um corte, como $1 \in A$, pois $12 < 2$, e $0 < 1$, por (C2), implicaria que $0 \in A$.

Embora neste trabalho sejam omitidas as demonstrações de vários itens, durante a investigação todos foram devidamente provados. Em virtude disso, pode-se afirmar que o desenvolvimento completo da teoria aqui apresentada ocuparia, na formatação tipográfica de um livro, no máximo oito páginas. Isso caso fossem incluídos, com detalhes, vários exemplos interessantes. No entanto, para expor tal teoria de forma sucinta, mas com o devido formalismo e todas as demonstrações, não seriam necessárias mais do que seis páginas.

O exposto acima e o fato que a formalização de $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo não exige um esforço cognitivo maior do que já é naturalmente exigido em Análise, permitem afirmar que nem a extensão do conteúdo nem a complexidade do assunto justificam sua ausência em livros-texto de Análise. Além do que, com a formalização, equívocos como o do exemplo supracitado podem ser facilmente percebidos pelo leitor, pois a formalização de uma teoria ajuda, inclusive, a desenvolver habilidade para isso.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Edgar Blucher, 3 ed. 2006, 246 p.

DEDEKIND, R. **Stetigkeit und Irrationale Zahlen**. Braunschweig: Vieweg, 1872, 31 p.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC,2 ed. 1996, 256 p.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 15 ed. 2019, 308 p.

WEISS, I. The real numbers – A survey of constructions. **Rocky Mountain Journal of Mathematics**, v. 45, n. 3, 2015, p. 737-762.

ÍNDICE REMISSIVO

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

FORMAÇÃO INTERDISCIPLINAR DAS CIÊNCIAS EXATAS:

Conhecimentos e pesquisas 2

Atena
Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

FORMAÇÃO INTERDISCIPLINAR DAS CIÊNCIAS EXATAS:
Conhecimentos e pesquisas 2

Atena Editora
Ano 2022