Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena
Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Ano 2022

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação científica em matemática e suas aplicações / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0116-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.162221205

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

APRESENTAÇÃO

A realidade do país e as diferentes problemáticas evidenciadas ao longo dos anos têm demandado questões muito particulares e mobilizado pesquisadores em busca de respostas a inúmeras inquietudes. É inegável que a pesquisa científica se constitui como importante mecanismo na busca dessas respostas e no melhorar a vida das pessoas e, nesse ínterim, a Matemática ocupa um lugar importante.

É neste sentido que o livro "***Investigação Científica em Matemática e suas Aplicações***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências de pesquisadores vinculados a Matemática e Educação Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do Brasil e de outros países.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso abordaremos também nessa obra.

Esperamos que este livro, da forma como o organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso superior. Que, após essa leitura, possamos olhar para a sala de aula e para a Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejo, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 11

A ÁLGEBRA DE JORDAN DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEM 2 E SUAS IDENTIDADES POLINOMIAIS

Data de aceite: 02/05/2022
Data de submissão: 19/04/2022

Mateus Eduardo Salomão
Pato Branco - PR
http://lattes.cnpq.br/9042467665583924

RESUMO: Neste trabalho será apresentado o conceito de álgebras de Jordan e de identidades polinomiais para tais álgebras. Além disso, será descrito o conjunto de identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores de ordem 2 com entradas em um corpo (finito ou infinito) de característica diferente de 2.
PALAVRAS-CHAVE: Matrizes triangulares superiores, Álgebras de Jordan, Identidades polinomiais.

THE JORDAN ALGEBRA OF UPPER TRIANGULAR MATRICES OF ORDER 2 AND THEIR POLYNOMIAL IDENTITIES

ABSTRACT: In this work, the concept of Jordan algebras and polynomial identities for such algebras will be presented. In addition, the set of polynomial identities for Jordan algebras of upper triangular matrices of order 2 with entries in a field (finite or infinite) of characteristic different from 2 will be described.
KEYWORDS: Upper triangular matrix, Jordan algebras, Polynomial identities.

1 I INTRODUÇÃO

Uma identidade em uma estrutura algébrica é uma expressão simbólica envolvendo operações e variáveis, que é identicamente satisfeita quando as variáveis são substituídas por elementos da estrutura em questão. Como exemplo, podemos citar as leis de comutatividade e associatividade dos números reais que aprendemos em matemática básica. Neste contexto, surge a PI-Teoria, que tem por objetivo o estudo de álgebras que satisfazem identidades polinomiais. A área de PI-Teoria tem grande relevância, pois quando se conhece as identidades de uma álgebra, significativas informações a seu respeito podem ser extraídas.

Neste texto, descreveremos uma base para as identidades polinomiais para a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores sobre um corpo (finito ou infinito) de característica diferente de 2, que foram descritas por Gonçalves e Salomão em [4].

Ao leitor interessado em um estudo mais detalhado a este respeito, são indicadas as referências [1], [2] e [3].

Denotaremos por K corpo de $ch(K)\neq 2$, onde $ch(K)$ denota a característica de K, e todas as álgebras consideradas serão sobre K. Além disso, a cardinalidade de será indicada por $|K|$.

2 | AS ÁLGEBRAS DE JORDAN

Nesta seção, definiremos alguns conceitos e propriedades referentes a uma classe de álgebras muito relevantes, as chamadas álgebras de Jordan. Iniciamos definindo um conceito que será fundamental.

Definição 1: Seja A uma álgebra. Se $a,b,c \in A$, dizemos que

$$(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$$

é o **associador** de a,b e c, nesta ordem.

Se n é ímpar e $a_1, \dots, a_n \in A$, denotaremos

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, a_3), a_4, \dots, a_n).$$

Na sequência, definimos a estrutura de álgebra de Jordan.

Definição 2: Uma álgebra comutativa A é chamada de **álgebra de Jordan** se

$$(a^2, b, a) = 0,$$

para todos $a,b \in A$.

Dada uma álgebra associativa equipada com o produto $\cdot$, então o espaço vetorial A equipado com um novo produto $\circ$, chamado **produto de Jordan**, definido por:

$$a \circ b = (1/2)(a \cdot b + b \cdot a),$$

onde $a,b \in A$, é uma álgebra de Jordan, denotada por A^+.

Em seguida, será definido o conceito de identidade polinomial para álgebras de Jordan. Os polinômios apresentados na sequência são elementos da álgebra de Jordan unitária livre, livremente gerada por um conjunto de variáveis X, que será denotada por $J(X)$.

Definição 3: Sejam A uma álgebra de Jordan unitária e $f=f(x_1, \dots, x_n) \in J(X)$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** para A se $f(a_1, \dots, a_n)=0$ para todos $a_1, \dots, a_n \in A$. Denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Se $T(A) \neq \{0\}$ dizemos que A é uma **PI-álgebra**.

3 | AS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES E SUAS IDENTIDADES POLINOMIAIS

Nesta seção, definiremos o nosso principal objeto de estudo, a álgebra de Jordan das matrizes triangulares superiores de ordem 2, que denotaremos por $UJ_2(K)$.

Seja $UT_n(K)$ a álgebra associativa unitária das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em um corpo K, munido com a operação usual de produto.

Definição 4: A álgebra de Jordan $UJ_n(K)$ é o espaço vetorial $UT_n(K)$ munido com o produto de Jordan $\circ$.

Estudaremos a álgebra definida acima para o caso em que n=2. Seja $T(UJ_2)$ o T-ideal de $UJ_2= UJ_2(K)$, isto é, o subconjunto de $J(X)$ formado por todas as identidades polinomiais de $UJ_2(K)$.

Nas duas próximas subseções, descreveremos $T(UJ_2(K))$. As demonstrações de tais fatos são extensas e podem ser encontradas em [4]. Antes de enunciar, fixaremos duas notações adotadas.

Se $f_1, f_2, \ldots, f_n \in J(X)$, então denotaremos

$$f_1 f_2 \cdots f_n = f_1(f_2 \cdots f_n).$$

Mais ainda, se $f, g \in J(X)$, $x \in X$ e $d \geq 1$, então denotaremos

$$(f, g, x^{(d)}) = \Big(f, g, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{d \text{ fatores}}\Big).$$

3.1 Identidades de $Uj_2(K)$, quando K é infinito

Nesta subseção, descreveremos $T(UJ_2(K))$ quando K é infinito de $chK \neq 2$. Por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

Notação 1: Seja I o T-ideal de $J(X)$ gerado pelos polinômios

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3, x_4) - x_1(x_2, x_3, x_4) - x_2(x_1, x_3, x_4),$$
$$(x_1, (x_2, x_3, x_4), x_5),$$
$$(x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6).$$

Lema 1: Se I é o T-ideal definido acima, então $I \subseteq T(UJ_2)$.

Lema 2: Seja o subconjunto de formado por todos os polinômios

a) $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$,

b) $(x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n})\left(x_t, x_u, x_l, x_u^{(s_u)}, x_{u+1}^{(s_{u+1})}, \ldots, x_n^{(s_n)}\right)$,

onde $m_1, \ldots, m_n \geq$; $t \leq e\ t <$; $s_u, \ldots, s_n \geq$; $s_u + s_{u+1} + \cdots + s$ é par; $n \geq 0$. Então o espaço vetorial quociente $J(X)/I$ é gerado pelo conjunto de todos os elementos $h+I$, onde $h \in S$.

Teorema 1: Seja K um corpo infinito de característica diferente de 2. Se $T(UJ_2(K))$ é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, então $T(UJ_2(K))$ é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4),\ (x_1, (x_2, x_3, x_4), x_5) \text{ e } (x_1, x_2, x_3)(x_4, x_5, x_6).$$

Mais ainda, $I = T(UJ_2(K))$, e o conjunto no Lema 2 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I$.

3.2 Identidades de $UJ_2(K)$, quando K é finito

Nesta subseção, descreveremos o T-ideal das identidades polinomiais de $UJ_2(K)$, para o caso em que K é um corpo finito de $ch(K) \neq 2$. Ao longa desta subseção K será um corpo finito com $|K| = q$ elementos, e $ch(K) \neq 2$.

Notação 2: Seja I' o T-ideal de $J(X)$ gerado pelos 3 polinômios da Notação 1 e pelos 5 polinômios

$$(x_1^q - x_1)(x_2, x_3, x_4),$$
$$(x_1, x_2^q - x_2, x_3),$$
$$(x_1^q - x_1)(x_2^q - x_2),$$
$$\left(x_1, x_2, x_3, x_2^{(q-1)}\right) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}(x_1, x_2, x_3),$$
$$\left(x_1, x_1, x_2, x_1^{(q-2)}, x_2^{(q-1)}, x_3\right) - (-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(x_1, x_3, x_2^{(q)}\right) + (x_1, x_3, x_2)$$
$$- (-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(x_1, x_1, x_2, x_1^{(q-2)}, x_3\right).$$

Note que I' é gerado, como um T-ideal, por 8 polinômios, e $I \subseteq I'$.

Lema 3: Se I' é o T-ideal definido acima, então $I' \subseteq T(UJ_2)$.

Lema 4: O espaço vetorial quociente $J(X)/I'$ é gerado pelo conjunto de todos os polinômios $g+I'$ tais que:

a) $g = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ ou

b) $g = \left(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}\right)\left(x_t, x_u, x_l, x_u^{(s_u)}, x_{u+1}^{(s_{u+1})}, \ldots, x_n^{(s_n)}\right)$

onde $(m_1, \ldots, m_n) \in \Lambda_n$; $0 \le p_1, \ldots, p_n < q$; $t \le u$ e $t < l$; $0 \le s_u < q - 1$, $0 \le s_{u+1}, \ldots, s_n < q$ e $s_u + s_{u+1} + \cdots + s_n$ é par; e $n \geq 0$. Mais ainda, se $u = t$ e su = q - 2, então $0 \le s_l < q - 1$.

Teorema 2: Seja K um corpo finito com $|K|=q$ elementos, e característica diferente de 2. Se $T(UJ_2(K))$ é o T-ideal das identidades polinomiais da álgebra de Jordan $UJ_2(K)$, então

$$T(UJ_2(K)) = I'.$$

Mais ainda, o conjunto no Lema 4 é uma base para o espaço vetorial quociente $J(X)/I'$.

REFERÊNCIAS

[1] ALJADEFF, E.; GIAMBRUNO A.; PROCESI, C.; REGEV, A. **Rings with polynomial identities and finite dimensional representations of algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2020.

[2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra**. Singapore: Springer-Verlag Singapore, 2000.

[3] GIAMBRUNO, A; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[4] GONÇALVES, D. J.; KOSHLUKOV, P.; SALOMÃO, M. Polynomial identities for the Jordan álgebra of upper triangular matrices. **Journal of Algebra.** v. 593, p. 477–506, 2022.

[5] KOSHLUKOV, P.; MARTINO, F. Polynomial identities for the Jordan algebra of upper triangular matrices of order 2. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 216, n. 11, p. 2524–2532, 2012.

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em matemática e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2022

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Investigação científica em *matemática* e suas aplicações

Atena Editora

Ano 2022